Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Акбаров, Стереотипные групповые алгебры, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 941–944

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:19:21

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

СТЕРЕОТИПНЫЕ ГРУППОВЫЕ АЛГЕБРЫ

С. С. Акбаров

В заметках [1]–[3] автором была описана категория $\mathcal{S}$ стереотипных локально выпуклых пространств, и отмечалось, в частности, что $\mathcal{S}$ образует моноидальную категорию относительно проективного $\otimes$ и инъективного $\odot$ стереотипного тензорного произведения [3].

В этой заметке мы, по примеру работы Г. Л. Литвинова [4], показываем, что в категории $\mathcal{S}$ можно определить естественные конструкции *групповых алгебр* так, что возникает взаимно однозначное соответствие между непрерывными (гладкими, голоморфными, регулярными) представлениями локально компактных групп G (вещественных групп Ли, групп Штейна, аффинных алгебраических групп) и представлениями алгебры мер $\mathcal{C}'(G)$ (распределений $\mathcal{E}'(G)$, голоморфных потоков $\mathcal{H}'(G)$, регулярных потоков $\mathcal{R}'(G)$).

1. Проективные и инъективные стереотипные алгебры. Пусть $(\mathfrak{k}, \otimes)$ – моноидальная категория с единичным объектом $1_{\mathfrak{k}}$ [5]–[7]. Условимся *моноидом* (A, α, ε) в категории $(\mathfrak{k}, \otimes)$ называть всякий объект A из $\mathfrak{k}$ с фиксированными морфизмами $\alpha: A \otimes A \rightarrow A$ (умножение) и $\varepsilon: 1_{\mathfrak{k}} \rightarrow A$ (единица), подчиненным аксиомам ассоциативности и единицы:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (A \otimes A) & \cong & (A \otimes A) \otimes A \\ \downarrow 1 \otimes \alpha & & \downarrow \alpha \otimes 1 \\ A \otimes A & \xrightarrow{\alpha} & A \xleftarrow{\alpha} A \otimes A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1_{\mathfrak{k}} \otimes A & \cong & A \cong A \otimes 1_{\mathfrak{k}} \\ \downarrow \varepsilon \otimes 1 & & \downarrow 1 \otimes \varepsilon \\ A \otimes A & & A \otimes A \end{array}$$

Морфизмом моноидов $\varphi: (A, \alpha, \varepsilon) \rightarrow (B, \beta, v)$ назовем всякий $\mathfrak{k}$ -морфизм $\varphi: A \rightarrow B$, обеспечивающий коммутативность диаграмм

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\varphi \otimes \varphi} & B \otimes B \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow v \\ 1_{\mathfrak{k}} & & 1_{\mathfrak{k}} \end{array}$$

В частности, если в качестве $(\mathfrak{k}, \otimes)$ выбрана категория векторных пространств над полем k , то моноидами в $(\mathfrak{k}, \otimes)$ будут обычные ассоциативные алгебры с единицей над k (с обычными гомоморфизмами, сохраняющими единицу, в качестве морфизмов).

В соответствии с этим, назовем *проективной стереотипной алгеброй* всякий моноид (A, α, ε) в категории $(\mathcal{S}, \otimes)$, а *морфизмом проективных стереотипных алгебр* соответствующий морфизм моноидов. Аналогично, *инъективной стереотипной алгеброй* будем называть всякий моноид (A, α, ε) в категории $(\mathcal{S}, \odot)$ и таким же образом определять *морфизм инъективных стереотипных алгебр*.

Очевидно, проективные стереотипные алгебры – это в точности объекты, называвшиеся в [2], [3] стереотипными алгебрами, т.е. стереотипные пространства A с определенной структурой ассоциативной алгебры с единицей над $\mathbb{C}$, причем операция умножения удовлетворяет следующему условию непрерывности: для любой окрестности нуля $V \subseteq A$ и любого компакта $K \subseteq A$ найдется окрестность нуля $U \subseteq A$ такая, что $U \cdot K \subseteq V$ и $K \cdot U \subseteq V$. Морфизмами проективных стереотипных алгебр будут, как легко понять, непрерывные линейные мультипликативные отображения, сохраняющие единицу.

Примерами проективных стереотипных алгебр являются алгебры Фреше, а также алгебры операторов $\mathcal{L}(X) = X \odot X$ в стереотипных пространствах X [1], [3]. Еще один важный класс примеров – *классические функциональные алгебры*.

ПРИМЕР 1 (алгебра непрерывных функций $\mathcal{C}(U)$). Пусть U – локально компактное пространство, разложимое в прямую сумму $U = \bigoplus_{i \in I} U_i$ некоторого семейства счетно компактных пространств U_i [8]. Обозначим через $\mathcal{C}(U)$ алгебру непрерывных функций $x: U \rightarrow \mathbb{C}$, наделенную топологией равномерной сходимости на компактах $K \subseteq U$. Пространство $\mathcal{C}(U)$ будет стереотипным как прямое произведение пространств Фреше $\mathcal{C}(U) = \prod_{i \in I} \mathcal{C}(U_i)$. Справедливо тождество

$$\mathcal{C}(U) \odot \mathcal{C}(V) = \mathcal{C}(U \times V),$$

из которого следует, что $\mathcal{C}(U)$ является инъективной стереотипной алгеброй с операциями

$$\begin{aligned} \alpha: \mathcal{C}(G) \odot \mathcal{C}(G) &= \mathcal{C}(G \times G) \rightarrow \mathcal{C}(G), & \alpha(x \odot y)(t) &= x(t) \cdot y(t) & (\text{умножение}), \\ \varepsilon: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}(G), & & \varepsilon(\lambda) &= \lambda \cdot 1 & (\text{единица}). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2 (алгебра гладких функций $\mathcal{E}(U)$). Пусть U – гладкое многообразие (в обычном смысле [9]). Пространство $\mathcal{E}(U) = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ гладких функций $x: U \rightarrow \mathbb{C}$ с обычной топологией (равномерной сходимости на компактах по каждой производной) является стереотипным пространством (например, потому что оно полно и бочечно). Справедливо тождество

$$\mathcal{E}(U) \otimes \mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(U) \odot \mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(U \times V),$$

из которого следует, что $\mathcal{E}(U)$ является инъективной и проективной стереотипной алгеброй с операциями

$$\begin{aligned} \alpha: \mathcal{E}(U) \otimes \mathcal{E}(V) &= \mathcal{E}(G) \odot \mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(G \times G) \rightarrow \mathcal{E}(G), \\ \alpha(x \otimes y)(t) &= \alpha(x \odot y)(t) = x(t) \cdot y(t) & (\text{умножение}), \\ \varepsilon: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{E}(G), & \varepsilon(\lambda) = \lambda \cdot 1 & (\text{единица}). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3 (алгебра голоморфных функций $\mathcal{H}(U)$). Пусть U – многообразие Штейна [10], т.е. комплексно-аналитическое многообразие, у которого, в частности, пространство $\mathcal{H}(U)$ всюду определенных голоморфных функций $x: U \rightarrow \mathbb{C}$ разделяет точки U . Пространство $\mathcal{H}(U)$ (с топологией равномерной сходимости на компактах) является стереотипным пространством (потому что оно полно и бочечно). Справедливо тождество

$$\mathcal{H}(U) \otimes \mathcal{H}(V) = \mathcal{H}(U) \odot \mathcal{H}(V) = \mathcal{H}(U \times V),$$

из которого следует, что $\mathcal{H}(U)$ является инъективной и проективной стереотипной алгеброй (с умножением и единицей, определенными аналогично примеру 2).

ПРИМЕР 4 (алгебра регулярных функций $\mathcal{R}(U)$). Пусть U – аффинное алгебраическое многообразие над $\mathbb{C}$ [11]. Наделим пространство $\mathcal{R}(U)$ регулярных функций $x: U \rightarrow \mathbb{C}$ сильнейшей локально выпуклой топологией. Тогда $\mathcal{R}(U) = \mathbb{C}_I$ для некоторого множества индексов I , поэтому $\mathcal{R}(U)$ является стереотипным пространством. Справедливо тождество

$$\mathcal{R}(U) \otimes \mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(U) \odot \mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(U \times V),$$

из которого следует, что $\mathcal{R}(U)$ является инъективной и проективной стереотипной алгеброй (с умножением и единицей, определенными аналогично примеру 2).

2. Стереотипные групповые алгебры. *Проективной стереотипной алгеброй Хопфа* мы называем алгебру Хопфа [12] в моноидальной категории $(\mathcal{S}, \otimes)$. Аналогично, *инъективной стереотипной алгеброй Хопфа* называется алгебра Хопфа в моноидальной категории $(\mathcal{S}, \odot)$.

Из двойственности между $\otimes$ и $\odot$ следует, что A – проективная стереотипная алгебра Хопфа тогда и только тогда, когда A' – инъективная стереотипная алгебра Хопфа.

Следующие примеры можно объединить общим названием – стереотипные групповые алгебры.

ПРИМЕР 5 (алгебра мер Радона $\mathcal{C}'(G)$). Пусть G – локально компактная группа [13]. Поскольку G содержит открытую счетно компактную подгруппу H , можно представить G как дизъюнктное объединение некоторого семейства H_i счетно компактных открытых подпространств. Значит, алгебра $\mathcal{C}(G)$ непрерывных функций на G как частный случай общей конструкции примера 1 является инъективной стереотипной алгеброй. Более того, $\mathcal{C}(G)$ является инъективной стереотипной алгеброй Хопфа с дополнительными операциями

$$\begin{aligned} \kappa: \mathcal{C}(G) &\rightarrow \mathcal{C}(G) \odot \mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(G \times G), & \kappa(x)(s, t) &= x(s \cdot t) & (\text{коумножение}), \\ \iota: \mathcal{C}(G) &\rightarrow \mathbb{C}, & \iota(x) &= x(1_G) & (\text{коединица}), \\ \sigma: \mathcal{C}(G) &\rightarrow \mathcal{C}(G), & \sigma(x)(t) &= x(t^{-1}) & (\text{антипод}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что сопряженное стереотипное пространство $\mathcal{C}'(G)$ финитных мер Радона является проективной стереотипной алгеброй Хопфа относительно двойственных операций. Назовем ее стереотипной групповой алгеброй мер (локально компактной группы).

ПРИМЕР 6 (алгебра распределений $\mathcal{E}'(G)$). Пусть G – вещественная группа Ли [9], [14]. Соответствующая алгебра $\mathcal{E}(G)$ гладких функций на G будет в силу примера 2 инъективной и проективной стереотипной алгеброй. Более того, $\mathcal{E}(G)$ является инъективной и проективной стереотипной алгеброй Хопфа с дополнительными операциями

$$\begin{aligned} \kappa: \mathcal{E}(G) &\rightarrow \mathcal{E}(G) \otimes \mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(G) \odot \mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(G \times G), & \kappa(x)(s, t) &= x(s \cdot t) & (\text{коумножение}), \\ \iota: \mathcal{E}(G) &\rightarrow \mathbb{C}, & \iota(x) &= x(1_G) & (\text{коединица}), \\ \sigma: \mathcal{E}(G) &\rightarrow \mathcal{E}(G), & \sigma(x)(t) &= x(t^{-1}) & (\text{антипод}). \end{aligned}$$

Сопряженное стереотипное пространство $\mathcal{E}'(G)$ финитных распределений является проективной и инъективной стереотипной алгеброй Хопфа относительно двойственных операций. Назовем ее стереотипной групповой алгеброй распределений (вещественной группы Ли).

ПРИМЕР 7 (алгебра голоморфных потоков $\mathcal{H}'(G)$). Пусть G – группа Штейна, т.е. комплексная группа Ли [14], являющаяся многообразием Штейна [10]. Соответствующая алгебра $\mathcal{H}(G)$ голоморфных функций на G будет в силу примера 3 инъективной и проективной стереотипной алгеброй. Более того, $\mathcal{H}(G)$ является инъективной и проективной стереотипной алгеброй Хопфа (с коумножением, коединицей и антиподом, определенным аналогично примеру 6). Сопряженное стереотипное пространство $\mathcal{H}'(G)$ голоморфных потоков является проективной и инъективной стереотипной алгеброй Хопфа относительно двойственных операций. Назовем ее стереотипной групповой алгеброй голоморфных потоков (группы Штейна).

ПРИМЕР 8 (алгебра регулярных потоков $\mathcal{R}'(G)$). Пусть G – аффинная алгебраическая группа [11] (т.е. замкнутая по Зарисскому подгруппа в $\text{GL}(n, \mathbb{C})$). Соответствующая алгебра $\mathcal{R}(G)$ регулярных функций на G будет в силу примера 4 инъективной и проективной стереотипной алгеброй. Более того, $\mathcal{R}(G)$ является инъективной и проективной стереотипной алгеброй Хопфа (с коумножением, коединицей и антиподом, определенным аналогично примеру 6). Сопряженное стереотипное пространство $\mathcal{R}'(G)$ регулярных потоков является проективной и инъективной стереотипной алгеброй Хопфа относительно двойственных операций. Назовем ее стереотипной групповой алгеброй регулярных потоков (аффинной алгебраической группы).

3. Связь между представлениями групп и представлениями их групповых алгебр. Непрерывным представлением локально компактной группы G в стереотипной алгебре A назовем всякое непрерывное отображение $\pi: G \rightarrow A$ со свойствами

$$\pi(s \cdot t) = \pi(s) \cdot \pi(t), \quad \pi(1_G) = 1_A. \quad (1)$$

Гладким представлением вещественной группы Ли G в стереотипной алгебре A назовем всякое отображение $\pi: G \rightarrow A$ со свойствами (1), удовлетворяющее следующему дополнительному условию ("гладкости"): для всех $f \in A'$ $f \circ \pi \in \mathcal{E}(G)$, причем отображение $f \in A' \mapsto f \circ \pi \in \mathcal{E}(G)$ непрерывно (заметим, что по этому определению вложение $G \rightarrow \mathcal{E}'(G)$ не будет гладким представлением).

Голоморфным представлением группы Штейна G в стереотипной алгебре A назовем всякое отображение $\pi: G \rightarrow A$ со свойствами (1), удовлетворяющее следующему дополнительному условию ("голоморфности"): для всех $f \in A'$ $f \circ \pi \in \mathcal{H}(G)$, причем отображение $f \in A' \mapsto f \circ \pi \in \mathcal{H}(G)$ непрерывно.

Регулярным представлением аффинной алгебраической группы G над $\mathbb{C}$ в стереотипной алгебре A назовем всякое отображение $\pi: G \rightarrow A$ со свойствами (1), удовлетворяющее следующему дополнительному условию ("регулярности"): для всех $f \in A'$ $f \circ \pi \in \mathcal{R}(G)$, причем отображение $f \in A' \mapsto f \circ \pi \in \mathcal{R}(G)$ непрерывно.

ТЕОРЕМА. Для всякой проективной стереотипной алгебры A диаграммы

(в которых δ – вложения в качестве дельта-функций) устанавливают биекции между

- непрерывными представлениями произвольной локально компактной группы G в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi: \mathcal{E}'(G) \rightarrow A$;
- гладкими представлениями произвольной вещественной группы Ли G в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi: \mathcal{E}'(G) \rightarrow A$;
- голоморфными представлениями произвольной группы Штейна G в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi: \mathcal{H}'(G) \rightarrow A$;
- регулярными представлениями произвольной аффинной алгебраической группы G над $\mathbb{C}$ в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi: \mathcal{R}'(G) \rightarrow A$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акбаров С.С. // Матем. заметки. 1995. Т. 57. №3. С. 463–466.
2. Акбаров С.С. // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. №4. С. 68–72.
3. Акбаров С.С. // Функцион. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. №2. С. 68–73.
4. Litvinov G. L. // Selecta Math. Soviet. 1988. V. 7. №2. P. 101–182.
5. MacLane S. Categories for the Working Mathematician. Berlin: Springer, 1971.
6. Kelly G. Basic Concepts of Enriched Category Theory. London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 64. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.
7. Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А., Шеврин Л.Н., Шульгейфер Е.Г. Общая алгебра. М.: Наука, 1991.
8. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
9. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.
10. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т. 1, 2. М.: Наука, 1985.
11. Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
12. Chari V., Pressley A. A Guide to Quantum Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
13. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975.
14. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976.