Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, В. С. Медведев, О топологической сопряженности трехмерных градиентноподобных диффеоморфизмов с тривиально вложенным множеством сепаратрис седловых неподвижных точек, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 945–948

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1239>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 08:19:12

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ ГРАДИЕНТНОПОДОБНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ТРИВИАЛЬНО ВЛОЖЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ СЕПАРАТРИС СЕДЛОВЫХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

В. З. Гринес, В. С. Медведев

В работах [1], [2] получена топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов, а в работах [3]–[5] содержатся необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным и бесконечным множеством гетероклинических траекторий на двумерных многообразиях. Напомним, что диффеоморфизм, заданный на замкнутом многообразии, является *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если он структурно устойчив и его неблуждающее множество состоит из конечного числа периодических точек. Диффеоморфизм Морса–Смейла называется *градиентноподобным*, если множество блуждающих точек не содержит гетероклинических траекторий, т.е. устойчивые и неустойчивые сепаратрисы любых седловых периодических точек не пересекаются [6].

В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия топологической сопряженности сохраняющих ориентацию градиентноподобных диффеоморфизмов, заданных на гладком замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии в предположении, что неблуждающее множество рассматриваемых диффеоморфизмов состоит из неподвижных точек, а сепаратрисы седловых неподвижных точек удовлетворяют введенному в работе условию тривиальной вложенности. В [7] частично содержатся результаты настоящей работы в случае неприводимого M , при этом свойство тривиальной вложенности в этих работах строго не вводится, хотя существенно используется.

Следует отметить, что нетривиальность вложения сепаратрис является принципиально новым моментом, отличающим дискретные динамические системы на трехмерных многообразиях от потоков на них, а также от диффеоморфизмов, заданных на поверхностях. В работе [8] приведен принадлежащий Х. Бонатти пример градиентноподобного диффеоморфизма трехмерной сферы, неблуждающее множество которого состоит из одной седловой, двух стоковых и одной источниковой неподвижных точек, при этом двумерная сепаратриса и одна из одномерных сепаратрис седловой неподвижной точки являются инвариантными дико вложенными двумерной сферой и дугой соответственно (определение дико вложенных объектов см., например, в [9]). Следствием этого является существование на трехмерной сфере двух топологически несопряженных градиентноподобных диффеоморфизмов, неблуждающие множества которых состоят из одной седловой неподвижной точки с инвариантными сепаратрисами, двух стоковых и одной источниковой неподвижных точек. Подчеркнем, что в силу [10] два аналогичных потока Морса–Смейла на трехмерной сфере топологически эквивалентны, а в силу [1]–[3] два аналогичных градиентноподобных диффеоморфизма двумерной сферы топологически сопряжены.

Пусть $f: M \rightarrow M$ – сохраняющий ориентацию градиентноподобный диффеоморфизм, заданный на гладком замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M . Обозначим через $\Omega(f)$ множество периодических точек диффеоморфизма f и представим множество седловых периодических точек в виде $\Omega_1(f) \cup \Omega_2(f)$, где $\Omega_1(f)$ ($\Omega_2(f)$) состоит из точек p таких, что $\dim(W^u(p)) = 1$ ($\dim(W^u(p)) = 2$). Будем предполагать, что $\Omega_1(f) \cup \Omega_2(f) \neq \emptyset^1$. Для $\sigma \in \{s, u\}$ положим

$$W^\sigma = \bigcup_{p \in \Omega_1(f) \cup \Omega_2(f)} (W^\sigma(p) \setminus p), \quad W = W^s \cup W^u.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00230, совместного проекта INTAS–RFBR, грант № 95-418, и фонда INTAS, грант № 97-1843.

¹Если $\Omega_1(f) \cup \Omega_2(f) = \emptyset$, то неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит в точности из двух неподвижных точек, являющихся источником и стоком. Тогда многообразие M является трехмерной сферой и все такие диффеоморфизмы топологически сопряжены между собой.

Компоненты связности из множества W обычно называют *сепаратрисами* (одномерными или двумерными) *седловых периодических точек*.

В этой работе мы будем предполагать, что все периодические точки данного диффеоморфизма Морса–Смейла f являются неподвижными и все сепаратрисы седловых периодических точек являются инвариантными относительно f .

Пусть $\omega \in \Omega(f)$ – стоковая неподвижная точка диффеоморфизма f . Обозначим через $L^u(\omega)$ множество всех сепаратрис из W^u , которые содержат ω в своем замыкании. Множество $L^u(\omega)$ состоит из $k_1 \geq 0$ сепаратрис, размерность которых равна 1, и $k_2 \geq 0$ сепаратрис, размерность которых равна 2. При этом, так как множество седловых периодических точек непусто, одно из чисел k_1, k_2 отлично от 0. В случае $k_1 \neq 0$ обозначим через $L_1^1, \dots, L_1^{k_1}$ все одномерные сепаратрисы, а в случае $k_2 \neq 0$ обозначим через $L_2^1, \dots, L_2^{k_2}$ все двумерные сепаратрисы из множества $L^u(\omega)$.

Введем в множестве $W^s(\omega) \setminus \omega$ соотношение эквивалентности, считая точки $x, y \in W^s(\omega) \setminus \omega$ эквивалентными, если существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $y = f^n(x)$. Группа преобразований F , порожденная диффеоморфизмом f , является дискретной группой преобразований, свободно действующей на множестве $W^s(\omega) \setminus \omega$. Поэтому факторпространство $N_\omega = (W^s(\omega) \setminus \omega)/F$ по введенному соотношению эквивалентности является хаусдорфовым пространством, которое можно снабдить топологией гладкого многообразия. Обозначим через π_ω естественную проекцию множества $W^s(\omega) \setminus \omega$ на многообразие N_ω . Так как сток ω является гиперболической неподвижной точкой, существует гладкое вложение S_E стандартной двумерной сферы $S^2: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты в трехмерном евклидовом пространстве) такое, что S_E является границей открытого трехмерного диска D_ω , содержащего сток ω , и поверхность $S_I = f(S_E)$ целиком принадлежит D_ω . Тогда замыкание области $R(\omega)$, ограниченной поверхностями S_E, S_I , является фундаментальной областью группы F . Отсюда следует, что многообразие N_ω гомеоморфно произведению $S^2 \times S^1$ посредством некоторого гомеоморфизма $\psi: N_\omega \rightarrow S^2 \times S^1$. Универсальным накрытием для $S^2 \times S^1$ является произведение $S^2 \times \mathbb{R}$. Обозначим через π естественную проекцию $S^2 \times \mathbb{R}$ на $S^2 \times S^1$ и через T движение на пространстве $S^2 \times \mathbb{R}$, заданное формулой $T(s, t) = (s, t + 1)$, где $s \in S^2, t \in \mathbb{R}$. Тогда существует накрывающее отображение $\bar{\psi}: W^s(\omega) \setminus \omega \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}$ ($\pi \bar{\psi} = \psi \pi_\omega$) такое, что $\bar{\psi} f = T \bar{\psi}$. Положим

$$\gamma_1^1 = \pi_\omega(L_1^1), \dots, \gamma_1^{k_1} = \pi_\omega(L_1^{k_1}), \quad \gamma_2^1 = \pi_\omega(L_2^1), \dots, \gamma_2^{k_2} = \pi_\omega(L_2^{k_2}).$$

Множество γ_1^i ($i \in \{1, \dots, k_1\}$) является гладким вложением в N_ω стандартной окружности. Так как диффеоморфизм f сохраняет ориентацию многообразия M и каждая одномерная сепаратриса седловой неподвижной точки является инвариантной относительно f , ограничение диффеоморфизма f на двумерную сепаратрису каждой седловой неподвижной точки также является сохраняющим ориентацию отображением. Поэтому множество γ_2^j ($j \in \{1, \dots, k_2\}$) является гладким вложением стандартного двумерного тора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество

$$S(\omega) = \left(\bigcup_{i \in \{1, \dots, k_1\}} \gamma_1^i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, k_2\}} \gamma_2^j \right)$$

назовем *схемой стоковой неподвижной точки* ω .

Заддим на двумерной сфере $S^2 \times \{0\}$ $k_1 \geq 0$ различных точек $s_1, \dots, s_{k_1}$ и $k_2 \geq 0$ простых не пересекающихся между собой замкнутых кривых $c_1, \dots, c_{k_2}$, каждая из которых не проходит ни через одну из точек $s_1, \dots, s_{k_1}$ ($k_1^2 + k_2^2 \neq 0$). Положим $\nu_1^i = \pi(s_i \times \mathbb{R})$, $\nu_2^j = \pi(c_j \times \mathbb{R})$ ($i \in \{1, \dots, k_1\}, j \in \{1, \dots, k_2\}$). По построению множество ν_1^i является гладким вложением стандартной окружности, а ν_2^j является гладким вложением стандартного двумерного тора, и множества ν_r^i, ν_l^j не пересекаются, если выполняется хотя бы одно из условий $i \neq j, r \neq l$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Объединение

$$L(k_1, k_2) = \left(\bigcup_{i \in \{1, \dots, k_1\}} \nu_1^i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, k_2\}} \nu_2^j \right), \quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0,$$

назовем *тривиальным зацеплением* в $S^2 \times S^1$. При этом если $k_1 = 0$ ($k_2 = 0$), то тривиальное зацепление не содержит вложений окружности (тора).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Два тривиальных зацепления

$$L(k_1, k_2) = \left(\bigcup_{i \in \{1, \dots, k_1\}} \nu_1^i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, k_2\}} \nu_2^j \right),$$

$$L'(k'_1, k'_2) = \left(\bigcup_{i \in \{1, \dots, k'_1\}} \nu_1^i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, k'_2\}} \nu_2^j \right)$$

назовем *изоморфными*, если $k_1 = k'_1$, $k_2 = k'_2$ и существует гомеоморфизм $\varphi: S^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1$ такой, что $\varphi(\nu_1^i) = \nu_1'^i$, $\varphi(\nu_2^j) = \nu_2'^j$ ($i = \overline{1, k_1}$, $j = \overline{1, k_2}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что множество сепаратрис $L^u(\omega)$ *тривиально вложено*, если существует тривиальное зацепление

$$L(k_1, k_2) = \left(\bigcup_{i \in \{1, \dots, k_1\}} \nu_1^i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, k_2\}} \nu_2^j \right)$$

и гомеоморфизм $\psi: N_\omega \rightarrow S^2 \times S^1$ такие, что $\psi(\gamma_1^i) = \nu_1^i$, $\psi(\gamma_2^j) = \nu_2^j$ ($i = \overline{1, k_1}$, $j = \overline{1, k_2}$). В этом случае будем говорить, что схема стоковой неподвижной точки ω *тривиальна*.

Зацепление $L(k_1, k_2)$ будем называть *соответствующим схеме неподвижной точки ω* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Ориентированный граф $G(f)$ назовем *графом диффеоморфизма f* , если вершины графа $G(f)$ соответствуют неподвижным точкам из множества $\Omega(f)$, а его ребра соответствуют компонентам связности из множеств W .

При этом ориентация на любом ребре l^σ задается следующим образом. Если ребру l^σ инцидентны вершины a и b и l^σ отвечает сепаратрисе $L^\sigma(p)$ седловой неподвижной точки p , то одна из вершин, например a , отвечает точке p , а вершина b отвечает либо источнику (если $\sigma = s$), либо стоку (если $\sigma = u$). Тогда ориентация на ребре l^σ выбирается от b к a , если $\sigma = s$, и от a к b , если $\sigma = u$.

Пусть $f, f': M \rightarrow M$ — два сохраняющих ориентацию градиентноподобных диффеоморфизма и ω, ω' — стоковые неподвижные точки f, f' соответственно, обладающие тривиальными схемами ω, ω' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Назовем тривиальные схемы неподвижных точек ω, ω' *эквивалентными*, если тривиальные зацепления $L(k_1, k_2), L'(k_1, k_2)$, соответствующие точкам ω, ω' , изоморфны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Будем говорить, что градиентноподобный диффеоморфизм f *принадлежит классу $G(M)$* , если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f \in G(M)$ сохраняет ориентацию многообразия M ;
- 2) неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in G(M)$ состоит из неподвижных точек, и все сепаратрисы седловых неподвижных точек инвариантны относительно f ;
- 3) для каждой стоковой неподвижной точки $\omega \in \Omega(f)$ множество $L^u(\omega)$ всех сепаратрис, содержащих ω в своем замыкании, тривиально вложено (см. определение 4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Графы $G(f)$, $G'(f')$ диффеоморфизмов $f, f' \in G(M)$ назовем *изоморфными*, если существует сохраняющий ориентацию ребер изоморфизм η графов $G(f)$, $G'(f')$ такой, что выполняются следующие условия:

- 1) изоморфные в силу η вершины графов $G(f)$, $G'(f')$ отвечают топологически эквивалентным неподвижным точкам диффеоморфизмов f и f' ;
- 2) если изоморфные в силу η вершины графов соответствуют стоковым неподвижным точкам диффеоморфизмов f и f' , то их схемы эквивалентны.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f, f' \in G(M)$. Тогда, для того чтобы существовал сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $g: M \rightarrow M$ такой, что $f' = gfg^{-1}$, необходимо и достаточно, чтобы графы $G^*(f)$ и $G'^*(f')$ были изоморфны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безденежных А. Н., Гринес В. З. // Методы качественной теории дифференциальных уравнений / ред. Е. А. Лентович-Андропова. Межвуз. темат. сб. научн. тр. Горький: ГГУ, 1985. С. 22–38; 1987. С. 24–32.
2. Безденежных А. Н., Гринес В. З. // Дифференциальные и интегральные уравнения / ред. Н. Ф. Отроков. Сб. научн. тр. Горький: ГГУ, 1985. С. 33–37.
3. Гринес В. З. // Матем. заметки. 1993. Т. 54. №3. С. 3–17.
4. Langevin R. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1993. V. 43. №1. P. 265–278.
5. Bonatti C., Langevin R. Diffeomorphismes de Smale des surfaces. Astérisque. V. 250. Montrouge: Soc. Math. France, 1998.
6. Смейл С. // УМН. 1970. Т. 25. №1. С. 113–185.
7. Гринес В. З., Калай Х. Х. // УМН. 1994. Т. 49. №2. С. 149–150.
8. Bonatti Ch., Grines V. Z. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 (to appear).
9. Келдыш Л. В. // Тр. МИАН. 1966. Т. 81. С. 1–183.
10. Уманский Я. Л. // Матем. сб. 1990. Т. 181. №2. С. 212–239.