Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Протасов, Уравнения в βG и разложимость абелевых групп, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 6, 951–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 04:16:31

УРАВНЕНИЯ В βG И РАЗЛОЖИМОСТЬ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

И. В. Протасов

Топологическое пространство X называется *разложимым* (ω -разложимым), если X можно разбить на два (счетное число) плотных подмножества. Топологическая группа G называется *разложимой* (ω -разложимой), если ее пространство разложимо (ω -разложимо). Все рассматриваемые группы предполагаются абелевыми, а топологии – хаусдорфовыми.

Комфорт и ван Милл доказали [1] разложимость недискретной топологической группы G с конечной подгруппой $B(G) = \{g \in G : 2g = 0\}$. Эта теорема усилена в [2]: недискретная топологическая группа G с конечной подгруппой $B(G)$ ω -разложима. Примеры недискретных неразложимых топологических групп построены в [3]–[5] при дополнительных к системе аксиом **ZFC** теоретико-множественных предположениях. В [6] доказано существование моделей **ZFC**, в которых любая недискретная топологическая группа ω -разложима. Таким образом, неразложимость – весьма экзотическое свойство топологических групп. Подробнее о разложимости топологических групп см. обзоры [7], [8].

С другой стороны, на любой бесконечной группе G можно определить в **ZFC** недискретную неразложимую (и даже максимальную) топологию, в которой непрерывны все сдвиги $x \mapsto x + g$, $g \in G$. Топологическое пространство X без изолированных точек называется *максимальным*, если X имеет изолированные точки в любой более сильной топологии. О максимальных топологиях на группах см. статью [9].

В чем же причина разложимости топологических групп? Цель заметки – доказательство следующей теоремы, которая существенно проясняет этот вопрос.

ТЕОРЕМА. Пусть τ – неметризуемая топология на группе G , в которой непрерывны все сдвиги $x \mapsto x + g$, $g \in G$. Предположим, что для некоторого целого числа m отображение $x \mapsto tx$ непрерывно и подгруппа $\{g \in G : m(m-1)g = 0\}$ конечна. Если $|m| > 1$, то (G, τ) ω -разложима. Если $m = -1$, то (G, τ) разложима.

Таким образом, причина разложимости топологической группы кроется не в совместной непрерывности операции сложения, а в непрерывности сдвигов и отображения $x \mapsto -x$.

Доказательство теоремы разобьем на несколько фрагментов, сопровождая каждый из них необходимыми определениями и ссылками. Отметим, что решающую роль в этом доказательстве играют некоторые уравнения в чех-стоуновой компактификации группы.

1) Для произвольной группы G обозначим через βG чех-стоунову компактификацию группы G как дискретного пространства. Элементами компактного пространства βG являются всевозможные ультрафильтры на группе G , а базу топологии образуют множества $\bar{A} = \{p \in \beta G : A \in p\}$, где A пробегает все подмножества группы G . отождествим группу G с подмножеством всех главных ультрафильтров из βG , а подмножество $\beta G \setminus G$ всех свободных ультрафильтров обозначим через G^* .

Операция сложения элементов группы G естественно продолжается на βG . Сумму ультрафильтров $p, q \in \beta G$ определим указанием всех подмножеств $A \subseteq G$, которые являются элементами ультрафильтра $p + q$:

$$A \in p + q \iff \{g \in G : A - g \in q\} \in p.$$

Операция сложения ультрафильтров ассоциативна, непрерывна по первому аргументу при фиксированном втором аргументе и непрерывна по второму аргументу, если фиксированный первый аргумент является главным ультрафильтром. Подробную информацию о строении полугруппы βG , а также различные ее приложения можно найти в [10], [11].

Для любого целого числа m отображение $x \mapsto tx$ также естественно продолжается на βG . Для ультрафильтра $p \in \beta G$ обозначим через tp ультрафильтр с базой $\{mA : A \in p\}$.

Нам понадобится следующее утверждение об уравнениях в βG .

ТЕОРЕМА А. Пусть G – бесконечная группа, m – целое число, $m \neq 0, 1$. Если подгруппа $\{g \in G : m(m-1)g = 0\}$ конечна, то уравнение $x + p = y + tp$ неразрешимо в βG для любого ультрафильтра $p \in G^*$.

Для $m = 2$ это утверждение доказано в [12], а для $G = \mathbb{Z}$ и $m \neq 0, 1$ – в [13]. Доказательство теоремы А не требует новых идей и проводится по схеме, изложенной в [12, § 2].

2) Пусть τ – топология на группе G такая, что все отображения $x \mapsto x + g$, $g \in G$, непрерывны. Обозначим через $\bar{\tau}$ полугруппу всех ультрафильтров на G , сходящихся к 0 в топологии τ .

ТЕОРЕМА Б (см. [6, теорема 1.9]). Если для заданного натурального числа n топологическое пространство (G, τ) нельзя разбить на n плотных подмножеств, то каждый минимальный правый идеал полугруппы $\bar{\tau}$ содержит не более чем $n - 1$ элементов.

3) **ТЕОРЕМА ВАН ДАУЭНА–ИЛЬЯНЕСА** (см. [14]). Если для любого натурального числа n топологическое пространство X можно разбить на n плотных подмножеств, то X ω -разложимо.

4) Пусть (G, τ) удовлетворяет условиям теоремы и $|m| > 1$. Ввиду п. 2 и п. 3 достаточно показать, что каждый минимальный правый идеал полугруппы $\bar{\tau}$ бесконечен. Допустим противное и зафиксируем конечный минимальный правый идеал M полугруппы $\bar{\tau}$. Так как топология τ неметризуема, то M содержит некоторый свободный ультрафильтр q . Поскольку отображение $x \mapsto tx$ непрерывно в топологии τ , то $m^k q \in \bar{\tau}$ для любого натурального числа k . Следовательно, $q + m^k q \in M$. Так как правый идеал M конечен и $|m| > 1$, то найдутся натуральные числа r, s такие, что $r > s$ и $q + m^r q = q + m^s q$. Положим $p = m^s q$. Тогда $q + m^{r-s} p = q + p$, что противоречит п. 1.

Пусть $m = -1$, однако группа (G, τ) неразложима. Ввиду п. 1 каждый минимальный правый идеал полугруппы $\bar{\tau}$ одноэлементен. Пусть $\{q\}$ – минимальный правый идеал полугруппы $\bar{\tau}$. Так как отображение $x \mapsto -x$ непрерывно в топологии τ , то $-q \in \bar{\tau}$. Значит, $q - q = q$, что противоречит п. 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Покажем, что условие конечности подгруппы $\{g \in G : m(m-1)g = 0\}$ в доказанной теореме существенно. Допустим, что эта подгруппа бесконечна. Тогда бесконечна, по крайней мере, одна из подгрупп $G_m = \{g \in G : mg = 0\}$ либо $G_{m-1} = \{g \in G : (m-1)g = 0\}$. Пользуясь теоремой 1.2 из [9], снабдим одну из подгрупп G_m, G_{m-1} максимальной и, следовательно, неразложимой топологией τ' , в которой непрерывны сдвиги. Продолжим τ' до топологии τ на группе G , в которой непрерывны сдвиги. В первом случае $mx = 0$ для любого элемента x из открытой в τ подгруппы G_m . Во втором случае $mx = x$ для любого элемента x из открытой в τ подгруппы G_{m-1} . Значит, отображение $x \mapsto mx$ непрерывно в топологии τ .

ВОПРОС 1. Пусть G – бесконечная группа, m – целое число, $|m| > 1$. Допустим, что подгруппа $\{g \in G : m(m-1)g = 0\}$ конечна. Можно ли группу G разбить на счетное число подмножеств, плотных в любой топологии с непрерывными сдвигами и непрерывным отображением $x \mapsto mx$? Подчеркнем, что разбиение не должно зависеть от выбора топологии. Для свободной группы произвольной мощности такое разбиение можно построить, модифицируя конструкцию из [15].

ВОПРОС 2. Пусть G – бесконечная группа с конечной подгруппой $\{g \in G : 2g = 0\}$. Верно ли, что (G, τ) ω -разложима, если τ – неметризуемая топология на G , в которой непрерывны все сдвиги и отображение $x \mapsto -x$?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Comfort W. W., van Mill J. // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120. № 3. P. 687–696.
2. Протасов И. В. // Укр. матем. ж. 1997. Т. 49. № 10. С. 1385–1395. 3. Малыгин В. И. // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 1. С. 27–30. 4. Зеленюк Е. Г. // Матем. студ. 1996. Т. 6. С. 41–52. 5. Зеленюк Е. Г., Протасов И. В. // Докл. НАН Украины. 1997. № 3. С. 7–11.
6. Протасов И. В. // Укр. матем. ж. 1998. Т. 50. № 12. С. 1646–1655. 7. Протасов И. В. // Матем. студ. 1998. Т. 9. № 2. С. 130–148. 8. Comfort W. W. // Topology Appl. 1996. V. 74. P. 149–167. 9. Протасов И. В. // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 6. С. 1368–1381. 10. Hindman N., Strauss D. Algebra in the Stone–Čech Compactification. Berlin–New York: de Gruyter, 1998. 11. Protasov I. V. Combinatorics of Numbers. Math. Stud. Monogr. Ser. V. 2, 1997. 12. Протасов И. В. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 131–140. 13. Протасов И. В. // Укр. матем. ж. 1997. Т. 49. № 4. С. 563–570. 14. Illanes A. // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. № 4. P. 1243–1246. 15. Протасов И. В., Юрчук Т. Л. // Докл. НАН Украины. 1997. № 8. С. 38–40.