Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. О. Головин, Условия пространственных плоскости и инъективности неразложимой CSL-алгебры конечной ширины, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 9–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:01:59

УДК 512.745.2

УСЛОВИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЛОСКОСТИ И ИНЪЕКТИВНОСТИ НЕРАЗЛОЖИМОЙ CSL-АЛГЕБРЫ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

Ю. О. Головин

В этой работе изучается связь геометрических свойств решетки L подпространств гильбертова пространства H и гомологических свойств (таких, как плоскость и инъективность) естественного модуля H над рефлексивной алгеброй $\text{Alg } L$, состоящей из всех операторов, оставляющих инвариантными все элементы решетки L . Полученные результаты позволяют для широкого класса рефлексивных алгебр доказать тривиальность групп когомологий с коэффициентами в $\mathcal{B}(H)$.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. В этой статье продолжено начатое в [1]–[3] изучение связи геометрических свойств решетки L подпространств гильбертова пространства H с гомологическими свойствами H как модуля над рефлексивной алгеброй $\text{Alg } L$ всех операторов, оставляющих инвариантными все элементы L . Известно, что в случае линейно упорядоченной решетки H над $\text{Alg } L$ является плоским и инъективным модулем [1], однако [2] проективным он будет только в случае, когда H имеет непосредственного предшественника в L .

Скажем несколько слов о месте рефлексивных алгебр среди всех операторных алгебр. Из теоремы фон Нойманна о бикоммутанте следует, что произвольная алгебра фон Нойманна – это не что иное, как рефлексивная алгебра с решеткой инвариантных подпространств, замкнутой относительно взятия ортогонального дополнения. С этой точки зрения рефлексивные алгебры играют ту же роль среди всех операторных алгебр, что и алгебры фон Нойманна среди самосопряженных. Естественно, произвольная рефлексивная алгебра является более сложным объектом для изучения, чем алгебра фон Нойманна. Положение облегчается, если рассматривать рефлексивные алгебры, порожденные коммутативной решеткой.

Поскольку рефлексивная алгебра полностью задается решеткой инвариантных подпространств, возникает желание выяснить, какие геометрические свойства L и как влияют на гомологические свойства самой алгебры; в частности, на гомологические свойства H как левого банахова модуля над A . Кроме самостоятельной ценности таких

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00156, Международного научного фонда, грант M95000, и фонда INTAS, грант № 93-1376.

свойств модуля, как проективность, инъективность и плоскость, укажем на возможность использования этих свойств для изучения непрерывных групп когомологий алгебры с коэффициентами в простейшем случае в $\mathcal{B}(H)$.

Структура статьи такова. В п. 2 приводится необходимая информация из теории рефлексивных алгебр и решеток, а также гомологической теории банаховых алгебр. В п. 3 выводятся необходимые условия плоскости и инъективности H над неразложимой CSL-алгеброй A . В п. 4 доказываются достаточные условия плоскости и инъективности H над рефлексивной алгеброй. В классе CSL-алгебр конечной ширины эти условия оказываются эквивалентными (п. 5). Пункт 6 посвящен вычислению групп когомологий. В п. 7 полученные в предыдущих пунктах результаты применяются для изучения гомологических свойств операторно-алгебраического джойна.

2. Необходимые определения и факты. Все рассматриваемые подпространства в H предполагаются замкнутыми, проекторы – ортогональными, операторы – ограниченными. Отождествляя проекторы с их образами, мы наделяем множество всех подпространств в H сильной операторной топологией. Множество L подпространств H называется *решеткой*, если

- 1) $\{0\}, H \in L$;
- 2) для любых $E, F \in L$ замыкание линейной оболочки $E \vee F$ и пересечение $E \wedge F$ принадлежат L .

Решетка называется *полной*, если замыкание линейной оболочки и пересечение любого семейства ее элементов принадлежит ей. На протяжении статьи все решетки будут предполагаться полными. Решетка называется *гнездом*, если она линейно упорядочена по включению. Для множества операторов A (соответственно подпространств L) под $\text{Lat } A$ (соответственно $\text{Alg } L$) понимается множество всех подпространств (соответственно операторов), инвариантных относительно операторов из A (оставляющих инвариантными элементы L). Ясно, что $\text{Lat } A$ – сильно замкнутая (а поэтому и полная) решетка, а $\text{Alg } L$ – слабо замкнутая алгебра, содержащая единичный оператор. Решетки вида $\text{Lat } A$ (соответственно алгебры вида $\text{Alg } L$) называются *рефлексивными*. Решетка L называется *коммутативной*, если проекторы на элементы L коммутируют друг с другом, в этом случае $\text{Alg } L$ называется *CSL-алгеброй*. Ясно, что гнездо N образует коммутативную решетку, соответствующая алгебра $\text{Alg } N$ называется *гнездовой алгеброй*.

Нетрудно заметить, что оператор a принадлежит рефлексивной алгебре $A = \text{Alg } L$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $E \in L$ выполнено равенство $pap = ap$, где p – проектор на E . Если решетка L коммутативна, то проекторы на элементы решетки сами принадлежат алгебре.

Для подпространства $E \subseteq H$ через $E^\perp$ будем обозначать ортогональное дополнение к E , под $L^\perp$ в этом случае естественно понимать $\{E^\perp : E \in L\}$. Для фиксированных $e, f \in H$ под $e \otimes f$ будем понимать одномерный оператор, действующий по формуле $(e \otimes f)g = (g, e)f, g \in H$.

Для фиксированной решетки L и множества $D \subseteq H$ положим

$$D_- = \vee \{M \in L : M \not\supseteq D\}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующий результат, доказанный Лонгстафом в [4].

ЛЕММА 1. *Одномерный оператор $e \otimes f \in \text{Alg } L$ тогда и только тогда, когда существует $E \in L$ такой, что $f \in E$, $e \in E_-^\perp$ (напомним, что все решетки предполагаются полными).*

Легко заметить, что H_- – это непосредственный предшественник H в $\text{Lat } A$, если он существует; в противном случае $H_- = H$.

С гомологическими понятиями, встречающимися в настоящей статье, можно ознакомиться по [5]. Напомним только, что *проективные объекты* в категории левых банаховых модулей над банаховой алгеброй A с единицей – это прямые слагаемые модулей вида $A \hat{\otimes} Y$, где Y – банахово пространство, а “ $\hat{\otimes}$ ” – знак проективного тензорного произведения [5]; внешнее умножение задается формулой $a \cdot (b \otimes y) = ab \otimes y$, $a, b \in A$, $y \in Y$. Для A -модуля X *канонической проекцией* называется морфизм A -модулей $\pi: A \hat{\otimes} X \rightarrow X$, $\pi(a \otimes x) = a \cdot x$. Модуль X проективен тогда и только тогда, когда π – ретракция.

Инъективными объектами в этой категории будут прямые слагаемые модулей вида $\mathcal{B}(A, Y)$ ($\mathcal{B}(A, Y)$ – это множество линейных непрерывных операторов из A в Y , модульная структура на нем задается с помощью структуры правого A -модуля A : $(a \cdot f)(b) = f(ba)$, $f \in \mathcal{B}(A, Y)$, $a, b \in A$). Модуль X инъективен тогда и только тогда, когда *каноническое вложение* $\tilde{\pi}: X \rightarrow \mathcal{B}(A, X)$, $[\tilde{\pi}(x)](a) = a \cdot x$, $x \in X$, $a \in A$, является коретракцией. Наконец, модуль X называется *плоским*, если правый A -модуль X^* инъективен; это равносильно тому, что морфизм π_X^* , сопряженный к канонической проекции, является коретракцией.

Пусть A – унитарная (т.е. обладающая единицей) замкнутая относительно равномерной нормы алгебра операторов в H . Здесь, как обычно, мы будем рассматривать H в качестве левого банахова модуля над A с внешней операцией $a \cdot e = a(e)$, $a \in A$, $e \in H$. Будем говорить, что A обладает тем или иным свойством *пространственно*, если соответствующим свойством обладает A -модуль H ; например, A называется *пространственно проективной*, если H – проективный A -модуль.

CSL-алгебру $A \subseteq \mathcal{B}(H)$ будем называть *неразложимой*, если в $\text{Lat } A$ не существует нетривиальных элементов E, F таких, что одновременно $E \vee F = H$ и $E \wedge F = \{0\}$. Напомним [2], что критерием пространственной проективности неразложимой CSL-алгебры A служит наличие в A *столбца одномерных операторов* (т.е. множества вида $\{e \otimes f$, где e – фиксированный ненулевой вектор, а f пробегает H }), что на “решеточном” языке эквивалентно тому, что в $\tilde{L} = \text{Lat } A \setminus \{H, \{0\}\}$ есть наибольший элемент. Иными словами, неразложимая CSL-алгебра пространственно проективна тогда и только тогда, когда H не может быть получено в виде замыкания линейной оболочки *произвольного* семейства нетривиальных элементов решетки инвариантных подпространств.

Естественно возникает также вопрос о критериях пространственных плоскости и инъективности исследуемых алгебр. Этот вопрос важен хотя бы потому, что для установления тривиальности групп когомологий операторной алгебры с коэффициентами в $\mathcal{B}(H)$ достаточно доказать плоскость (или инъективность) H , требование проективности здесь излишне.

Более точно, справедливы следующие результаты. Как хорошо известно, для любых банаховых A -модулей

$$\mathcal{H}^n(A, \mathcal{B}(X, Y)) = \text{Ext}_A^n(X, Y),$$

поэтому гарантировать тривиальность этих групп когомологий можно в любой из сле-

дующих трех ситуаций:

- 1) если Y инъективен;
- 2) если X проективен;
- 3) если X плоский, а $Y = Z^*$, где Z – правый A -модуль

(обо всем этом см. [5, гл. 3]).

В заключение приведем еще несколько соображений, позволяющих связывать “плоскую” линию статьи с “инъективной”. Для удобства ссылок оформим их в виде леммы.

Пусть A – банахова алгебра операторов в H . Взяв вместо A алгебру $A^* = \{a^* : a \in A\}$ (a^* – оператор, сопряженный a), можем рассматривать H не только как левый модуль над A , но и как левый модуль над A^* .

ЛЕММА 2. 1) H – плоский левый A -модуль $\iff H$ – инъективный левый A^* -модуль [1].

2) Если $\text{Lat } A = L$, то $\text{Lat } A^* = L^\perp$.

3) Условие $E_1 \vee E_2 \neq H$ на элементы решетки L равносильно условию $E_1^\perp \wedge E_2^\perp \neq \{0\}$ на элементы решетки $L^\perp$.

4) Неразложимость алгебры A равносильна неразложимости алгебры A^* .

5) $(e \otimes f)^* = f \otimes e$.

3. Необходимые условия пространственных плоскости и инъективности неразложимой CSL-алгебры. Если A – множество операторов, а $\mathcal{F}$ – множество векторов, то будем обозначать через $\overline{A \cdot \mathcal{F}}$ замыкание линейной оболочки множества $\{a \cdot x : a \in A, x \in \mathcal{F}\}$. Если решетка L рефлексивна, то $\text{Alg } L \cdot \mathcal{F}$ – это минимальный элемент решетки, содержащий $\mathcal{F}$. Условия, вынесенные в заголовок пункта, доказываются в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Если A – пространственно плоская (соответственно пространственно инъективная) неразложимая CSL-алгебра и $L = \text{Lat } A$, то для любых $E_1, E_2 \in \dot{L}$

$$E_1 \vee E_2 \neq H$$

(соответственно $E_1 \wedge E_2 \neq \{0\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 эти два утверждения равносильны. Будем доказывать второе из них. Предположим противное, что в L есть ненулевые элементы с нулевым пересечением. Рассмотрим прямое произведение $L \times L$. Напомним, что порядок в нем вводится по следующему правилу: $(E_1, F_1) \leq (E_2, F_2)$ тогда и только тогда, когда $E_1 \leq E_2, F_1 \leq F_2$. Выделим в $L \times L$ подмножество элементов $(L \times L)_0 = \{(E, F) : E, F \in \dot{L}, E \wedge F = 0\}$ и наделим его индуцированным порядком. По предположению $(L \times L)_0$ непусто. Докажем, что в нем есть максимальный элемент. Для этого зафиксируем произвольный элемент $(E, F) \in (L \times L)_0$. В силу коммутативности решетки $E \subseteq F^\perp$. Положим $E_1 = \vee \{G \in L : G \subseteq F^\perp\}$. Тогда $E \subseteq E_1 \subseteq F^\perp$, причем если $G \in L, G \supset E_1$, то $G \wedge F \neq 0$. Аналогично, $F \subseteq E_1^\perp$. Положим $E_2 = \vee \{G \in L : G \subseteq E_1^\perp\}$. Тогда $F \subseteq E_2 \subseteq E_1^\perp$, причем если $G \in L, G \supset E_2$, то $G \wedge E_1 \neq 0$. Следовательно, пара (E_1, E_2) максимальна в $(L \times L)_0$.

Из неразложимости A следует, что $E_3 = (E_1 \vee E_2)^\perp \neq \{0\}$ и что E_3 не принадлежит L . Из максимальной пары (E_1, E_2) следует, что для любого ненулевого $x \in E_3$

$$\overline{A \cdot x} \wedge E_i \neq \{0\}, \quad i = 1, 2.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее простое утверждение. Напомним только, что $\mathcal{B}(A, H)$ можно наделять бимодульной структурой благодаря бимодульной структуре на A , а именно, для $\varphi \in \mathcal{B}(A, H)$, $a, b, c \in A$ полагаем

$$(a \cdot \varphi \cdot b)(c) = \varphi(bca).$$

ЛЕММА 3. Пусть p_i – проектор на E_i , $i = 1, 2, 3$. Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{B}(A, H)$ справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot \varphi \cdot p_2 &= p_1 \cdot \varphi \cdot p_3 = p_2 \cdot \varphi \cdot p_1 = p_2 \cdot \varphi \cdot p_3 = 0, \\ p_1 \cdot \varphi &= p_1 \cdot \varphi \cdot p_1 \quad \text{и} \quad p_2 \cdot \varphi = p_2 \cdot \varphi \cdot p_2. \end{aligned}$$

Доказательство очевидно.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Поскольку H – инъективный модуль, каноническое вложение $\tilde{\pi}: H \rightarrow \mathcal{B}(A, H)$, $[\tilde{\pi}(x)](a) = a \cdot x$, $x \in H$, $a \in A$, является коретракцией, т.е. существует морфизм левых A -модулей $\tilde{\rho}: \mathcal{B}(A, H) \rightarrow H$, левый обратный к $\tilde{\pi}$. Для упрощения записи в дальнейшем вместо $\tilde{\pi}(x)$ будем писать $\tilde{x}$. Зафиксируем произвольный ненулевой $x \in E_3$ и рассмотрим $y = \tilde{\rho}(\tilde{x} \cdot p_1)$.

1. Для любого $a \in A$, используя лемму 3, получаем

$$p_2 a \cdot y = \tilde{\rho}(p_2 a \cdot \tilde{x} \cdot p_1) = \tilde{\rho}(p_2 \cdot \widetilde{a \cdot x} \cdot p_1) = 0.$$

2. Легко видеть, что y принадлежит E_3 :

$$p_3 \cdot y = \tilde{\rho}(p_3 \cdot \tilde{x} \cdot p_1) = \tilde{\rho}(\tilde{x} \cdot p_1) = \tilde{\rho}(\tilde{\pi}(p_3 \cdot x) \cdot p_1) = y.$$

3. Поскольку $\overline{A \cdot x} \cap E_1 \neq \{0\}$, найдется $a \in A$ такой, что $a \cdot x$ принадлежит E_1 и отличен от 0 (берем a_1 такой, что $a_1 \cdot x \notin E_1^\perp$, и полагаем $a = p_1 a_1$). Тогда

$$p_1 a \cdot y = p_1 a \cdot \tilde{\rho}(\tilde{x} \cdot p_1) = \tilde{\rho}(p_1 \cdot (a \cdot \tilde{x}) \cdot p_1) = \tilde{\rho}(p_1 a \cdot \tilde{x}) = \tilde{\rho}(a \cdot \tilde{x}) = a \cdot x \neq 0,$$

поэтому и $y \neq 0$. Следовательно, найдется $b \in A$ такой, что $b \cdot y$ принадлежит E_2 и отличен от 0.

4. Для получения противоречия осталось сослаться на шаг 1: для выбранного b имеем $b \cdot y = p_2 b \cdot y = 0$.

Доказательство теоремы завершено.

ПРИМЕР. Для построения примера пространственно неплюской алгебры можно воспользоваться конструкцией операторно-алгебраического джойна [6]. Джойн $A \# B$ алгебры $A \subseteq \mathcal{B}(H_1)$ с помощью алгебры $B \subseteq \mathcal{B}(H_2)$ есть по определению подалгебра $\mathcal{B}(H_1 \oplus H_2)$, состоящая из всех операторов, задаваемых блок-матрицами вида $\begin{pmatrix} T & O \\ U & R \end{pmatrix}$, где R, T и U пробегает соответственно A, B и $\mathcal{B}(H_2, H_1)$ и правый верхний угол нулевой. Более подробно джойны изучаются в п. 7.

Разобьем H в прямую сумму трех попарно ортогональных ненулевых подпространств $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ и рассмотрим джойн $J = A_1 \# (A_2 \oplus A_3)$, где $A_i \subseteq \mathcal{B}(H_i)$, $i = 1, 2, 3$, – произвольная CSL-алгебра. Тогда J – CSL-алгебра, неразложимая как всякий джойн в решетке инвариантных подпространств, в которой есть элементы $H_1 \oplus H_2$ и $H_1 \oplus H_3$, в сумме дающие все H . Следовательно, по теореме 1 эта алгебра не может быть пространственно плоской. Как частный случай этой конструкции надстройка (т.е. джойн с помощью алгебры диагональных операторов на двумерном пространстве) никогда не дает пространственно плоскую алгебру.

Чтобы получить пример пространственно неинъективной алгебры, достаточно рассмотреть джойн $(A_1 \oplus A_2) \# A_3$.

4. Достаточные условия пространственных плоскости и инъективности операторной алгебры. Напомним, что если алгебра $A \subseteq \mathcal{B}(H)$ содержит столбец одномерных операторов, то она пространственно проективна. Следующая лемма утверждает, грубо говоря, что даже если в алгебре нет целого столбца одномерных операторов, но есть “сколь угодно большие отрезки” таких столбцов, то она будет пространственно плоской.

ЛЕММА 4. Пусть $A \subseteq \mathcal{B}(H)$ – унитарная банахова алгебра такая, что в решетке ее инвариантных подпространств $\text{Lat } A$ существует возрастающая (соответственно убывающая) сеть $N = \{E_\alpha\}$, $\alpha \in \Lambda$, сходящаяся к H (соответственно к $\{0\}$) в сильной операторной топологии, причем для каждого $E_\alpha \in N$ существует ненулевой вектор $\eta_\alpha \in H$ такой, что все одномерные операторы вида $\eta_\alpha \otimes \xi$ (соответственно $\xi \otimes \eta_\alpha$), где ξ пробегает E_α (соответственно $E_\alpha^\perp$), принадлежат A . Тогда A – пространственно плоская (соответственно пространственно инъективная) алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 эти утверждения равносильны. Докажем первое из них.

Пусть $\alpha \in \Lambda$ любое. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|\eta_\alpha\| = 1$. Рассмотрим отображение $\rho_\alpha: E_\alpha \rightarrow A \hat{\otimes} H$, корректно определенное формулой $\rho_\alpha(\xi) = (\eta_\alpha \otimes \xi) \otimes \eta_\alpha$, $\xi \in E_\alpha$. Очевидно, это морфизм левых A -модулей нормы 1. Положим $\rho^{(\alpha)} = \rho_\alpha \cdot p_\alpha$, где p_α – проектор из H на E_α . Тогда $\rho^{(\alpha)}$ – линейный оператор из H в $A \hat{\otimes} H$ нормы 1. Рассмотрим сопряженный оператор $\rho^{(\alpha)*}: (A \hat{\otimes} H)^* \rightarrow H^*$. Таким образом, $\rho^{(\alpha)*} \in \mathcal{B}((A \hat{\otimes} H)^*, H^*)$, а поскольку это пространство в силу сопряженной ассоциативности изометрически изоморфно $((A \hat{\otimes} H)^* \hat{\otimes} H)^*$, мы получили сеть элементов единичного шара сопряженного пространства. Благодаря его компактности в слабой* топологии, мы имеем возможность выбрать подсеть, сходящуюся к некоторому элементу $\sigma \in \mathcal{B}((A \hat{\otimes} H)^*, H^*)$ в указанной топологии. Поскольку в определение подсети входит требование конфинантности, мы можем, не ограничивая общности, считать, что вся сеть $\rho^{(\alpha)*}$ сходится к σ . Докажем, что σ – морфизм правых A -модулей, левый обратный к $\pi^*: H^* \rightarrow (A \hat{\otimes} H)^*$.

Сходимость $\rho^{(\alpha)*}$ к σ в слабой* топологии пространства $(A \hat{\otimes} H)^* \hat{\otimes} H$ означает, в частности, что для любых $\Phi \in (A \hat{\otimes} H)^*$, $\xi \in H$

$$(\rho^{(\alpha)*}(\Phi))(\xi) \rightarrow (\sigma(\Phi))(\xi).$$

Зафиксируем α и рассмотрим $\xi \in E_\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} (\sigma(\Phi \cdot a))(\xi) &= \lim_{\beta} (\rho^{(\beta)*}(\Phi \cdot a))(\xi) = \lim_{\beta} (\Phi \cdot a)(\rho^{(\beta)}(\xi)) \\ &= \lim_{\beta} (\Phi \cdot a)((\rho_\beta \cdot p_\beta)(\xi)) = \lim_{\beta} (\Phi \cdot a)(\rho_\beta(p_\beta \xi)) = \lim_{\beta} (\Phi \cdot a)(\rho_\beta(\xi)) \\ &= \lim_{\beta} \Phi(a \cdot \rho_\beta(\xi)) = \lim_{\beta} \Phi(\rho_\beta(a\xi)) = \lim_{\beta} \Phi((\rho_\beta \cdot p_\beta)(a\xi)) \\ &= \lim_{\beta} \Phi(\rho^{(\beta)}(a\xi)) = \lim_{\beta} (\rho^{(\beta)*}(\Phi))(a\xi) = (\sigma(\Phi))(a\xi) = (\sigma(\Phi) \cdot a)(\xi). \end{aligned}$$

Таким образом, $(\sigma(\Phi \cdot a))(\xi) = (\sigma(\Phi) \cdot a)(\xi)$ для любого $\xi \in E_\alpha$, а так как E_α сильно сходится к H , то $(\sigma(\Phi \cdot a))(\xi) = (\sigma(\Phi) \cdot a)(\xi)$ для любого $\xi \in H$. Следовательно,

$$(\sigma(\Phi \cdot a)) = \sigma(\Phi) \cdot a,$$

т.е. σ – морфизм правых A -модулей.

Для доказательства второй половины утверждения зафиксируем $\xi \in E_\alpha$ и $\varphi \in H^*$.

$$\begin{aligned} ((\sigma \cdot \pi^*)\varphi)(\xi) &= (\sigma(\pi^*\varphi))(\xi) = \lim_{\beta} (\rho^{(\beta)*})(\pi^*\varphi)(\xi) = \lim_{\beta} (\pi^*\varphi)(\rho^{(\beta)}\xi) \\ &= \lim_{\beta} \varphi(\pi(\rho_{\beta}\xi)) = \lim_{\beta} \varphi(\pi(\rho_{\beta}p_{\beta}\xi)) = \lim_{\beta} \varphi(\pi(\rho_{\beta}\xi)) \\ &= \lim_{\beta} \varphi(\pi((\eta_{\beta} \otimes \xi) \otimes \eta_{\beta})) = \lim_{\beta} \varphi(\xi) = \varphi(\xi). \end{aligned}$$

Итак, на E_α $\sigma\pi^*\varphi$ совпадает с φ . Так же, как и раньше, отсюда следует, что $\sigma\pi^*\varphi = \varphi$. Следовательно, $\sigma\pi^* = 1_{H^*}$, т.е. H^* инъективен, и, следовательно, H плоский. Доказательство леммы завершено.

Для рефлексивных (необязательно CSL-) алгебр эту лемму можно переформулировать более красиво.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \subseteq \mathcal{B}(H)$ – рефлексивная алгебра такая, что в решетке ее инвариантных подпространств L существует возрастающая (соответственно убывающая) сеть $\mathcal{N} = \{E_\alpha\}$, сходящаяся к H (соответственно к $\{0\}$) в сильной операторной топологии, причем для каждого $E_\alpha \in \mathcal{N}$ $E_{\alpha-} \neq H$ (соответственно $E_{\alpha+} \neq \{0\}$). Под E_+ здесь понимается $\bigwedge \{F \in L : F \not\subseteq E\}$. Тогда A – пространственно плоская (соответственно пространственно инъективная) алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$(\bigvee \{F \in L_A : F \not\subseteq E\})^\perp = \bigwedge \{F^\perp \in L_A^\perp : F^\perp \not\subseteq E^\perp\} = \bigwedge \{G \in L_{A^*} : G \not\subseteq E^\perp\},$$

эти теоремы также равносильны. Докажем первую из них. Пусть $E_\alpha \in \mathcal{N}$. Зафиксируем произвольный ненулевой вектор $\eta_\alpha \in (E_{\alpha-})^\perp$. По лемме 1 все одномерные операторы вида $\eta_\alpha \otimes \xi$, где ξ пробегает E_α , принадлежат A . Остается применить лемму 4.

Покажем, что (на вид более сильные) предположения этой теоремы на самом деле (в классе рефлексивных алгебр, естественно) эквивалентны предположениям леммы 4. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 5 [3]. Для любого множества $D \subseteq H$

$$(D_-)^\perp = \{e \in H : e \otimes f \in \text{Alg } L, \text{ где } f \text{ пробегает все } D\}.$$

Обещанная эквивалентность леммы 4 и теоремы 2 теперь доказывается с помощью одного предложения: если для некоторого E_α существует ненулевой вектор η_α такой, что все одномерные операторы вида $\eta_\alpha \otimes \xi$, где ξ пробегает E_α , принадлежат A , то по лемме 5 вектор η_α принадлежит $((E_\alpha)_-)^\perp$. Следовательно, $(E_\alpha)_- \neq H$.

5. Критерии пространственных плоскости и инъективности неразложимой CSL-алгебры конечной ширины. В дальнейшем мы будем пользоваться понятием “решетка, порожденная некоторым своим подмножеством $\mathcal{S}$ ”. Вообще говоря, эта фраза расшифровывается неоднозначно, даже если ограничиться полными решетками: под такой решеткой может пониматься или минимальная полная решетка L_1 , содержащая $\mathcal{S}$, или минимальная рефлексивная решетка L_2 , содержащая $\mathcal{S}$ (иными словами, $L_2 = \text{Lat Alg } L_1 = \text{Lat Alg } \mathcal{S}$). Покажем, что операция $D \mapsto D_-$ приводит к одному и тому же результату независимо от того, какую из этих двух решеток мы рассматриваем (в случае коммутативных решеток такие проблемы в принципе не возникают: для таких решеток полнота и рефлексивность – равносильные понятия; см. [7], [8]).

ЛЕММА 6. Пусть L_1 – полная решетка, $L_2 = \text{Lat Alg } L_1$, $D \subseteq H$. Тогда $D_{-1} = D_{-2}$, где D_{-i} , $i = 1, 2$, – результат применения операции “ $-$ ” в решетке L_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, по лемме 5 D_{-i} может быть выражено в терминах $\text{Alg } L_i$, а $\text{Alg } L_2 = \text{Alg Lat Alg } L_1 = \text{Alg } L_1$.

Эта лемма позволяет нам не утруждать себя выяснением, в каком именно смысле по отношению к решетке используется слово “порождена”.

В дальнейшем нам понадобится следующий результат.

ЛЕММА 7. Пусть решетка L порождена решетками L_ω , $\omega \in \Omega$, E_ω – произвольный элемент L_ω . Тогда

$$\left(\bigwedge_{\omega \in \Omega} E_\omega \right)_- \subseteq \bigvee_{\omega \in \Omega} E_{\omega - \omega},$$

где под $E_{\omega - \omega}$ понимается “ $-$ ”, взятый по решетке L_ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e \in (\bigvee E_{\omega - \omega})^\perp = \bigwedge ((E_{\omega - \omega})^\perp)$, тогда $e \in (E_{\omega - \omega})^\perp$ для любого $\omega \in \Omega$. Следовательно, по лемме 1 $e \otimes f \in \text{Alg } L_\omega$ для любого $f \in E_\omega$, а тогда $e \otimes f \in \bigcap \text{Alg } L_\omega = \text{Alg } L$ для любого $f \in \bigwedge E_\omega$, следовательно, по лемме 5 $e \in ((\bigwedge E_\omega)_-)^\perp$. Итак, $(\bigvee E_{\omega - \omega})^\perp \subseteq ((\bigwedge E_\omega)_-)^\perp$ и поэтому $(\bigwedge E_\omega)_- \subseteq \bigvee (E_{\omega - \omega})$.

Этот результат можно усилить.

ЛЕММА 8. Пусть решетка L порождена решетками L_ω , $\omega \in \Omega$, $D \subseteq H$ – произвольное подмножество, E_ω , $\omega \in \Omega$, – минимальный элемент решетки L_ω , содержащий D . Тогда

$$D_- = \bigvee_{\omega \in \Omega} E_{\omega - \omega}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, во-первых, что если E_D – минимальный элемент решетки L , содержащий D , то $D_- = E_{D-}$.

Поскольку E_ω , $\omega \in \Omega$, – минимальный элемент решетки L_ω , содержащий E_D , то для любых $F_\omega \in L_\omega$ таких, что $F_\omega \not\supseteq E_\omega$, выполнено $F_\omega \not\supseteq E_D$ (иначе $E_\omega \wedge F_\omega \supseteq E_D$, что противоречит предположению о минимальности E_ω). Следовательно, $F_\omega \subseteq E_{D-}$, а так как $E_{\omega - \omega} = \bigvee \{F_\omega \in L_\omega : F_\omega \not\supseteq E_\omega\}$, то и $E_{\omega - \omega} \subseteq E_{D-}$, поэтому $\bigvee (E_{\omega - \omega}) \subseteq E_{D-}$. Поскольку обратное включение гарантировано леммой 7, доказательство завершено.

Следуя [9], будем говорить, что решетка L имеет *конечную ширину*, если L порождена конечным числом (вообще говоря, некоммутирующих) гнезд, при этом для простоты алгебру $\text{Alg } L$ также будем называть *алгеброй конечной ширины*.

ТЕОРЕМА 3. Пусть решетка L имеет конечную ширину, причем $H_- = H$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) в L существует возрастающая сеть $N = \{E_\alpha\}$, сходящаяся к H в сильной операторной топологии, причем для $E_\alpha \in \dot{N}$ $E_{\alpha-} \neq H$;
- 2) для любых $E, F \in \dot{L}$ выполнено $E \vee F \neq H$;
- 3) для любых $E_i \in \dot{L}_i$, $i = 1, \dots, n$, выполнено $E_1 \vee \dots \vee E_n \neq H$ (здесь L_i – порождающие L гнезда).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2) Если $H = E \vee F$ с нетривиальными E и F , то обязательно найдется α такой, что $E \not\subseteq E_\alpha, F \not\subseteq E_\alpha$, поэтому $E_{\alpha-} \supseteq E \vee F = H$.

2) $\implies$ 3) очевидно.

3) $\implies$ 1) Будем обозначать операцию взятия “ $-$ ” по i -му гнезду через $E_{-i}, i = 1, \dots, n$. По лемме 8 $H_- = H_{-1} \vee \dots \vee H_{-n}$. По предположению $H_- = H$. Правая часть может равняться H только при условии, что один из H_{-i} равен H . Пусть $H_{-1} = \dots = H_{-k} = H$, а по остальным гнездам непосредственный предшественник у H есть. Пусть E_i пробегает $\dot{L}_i, i = 1, \dots, k$. Рассмотрим множество $N = \{E_1 \wedge \dots \wedge E_k\}$. По лемме 7

$$(E_1 \wedge \dots \wedge E_k)_- = (E_1 \wedge \dots \wedge E_k \wedge \underbrace{H \wedge \dots \wedge H}_{n-k})_- \subseteq E_{1-1} \vee \dots \vee E_{k-k} \vee H_{-k+1} \vee \dots \vee H_{-n}.$$

Следовательно, $(E_1 \wedge \dots \wedge E_k)_- \neq H$. Поэтому сеть N удовлетворяет условию 1).

Суммируя результаты, полученные в предыдущих пунктах, получаем критерий пространственной плоскости неразложимой CSL-алгебры конечной ширины.

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – неразложимая CSL-алгебра конечной ширины, $L = \text{Alg } A$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) A – пространственно плоская алгебра;
- 2) для любых $E, F \in \dot{L}$ выполнено $E \vee F \neq H$;
- 3) для любых $E_i \in \dot{L}_i, i = 1, \dots, n$, выполнено $E_1 \vee \dots \vee E_n \neq H$;
- 4) или $H_- \neq H$, или в L существует возрастающая сеть $N = \{E_\alpha\}$, сильно сходящаяся к H , причем для $E_\alpha \in \dot{N}$ выполнено $E_{\alpha-} \neq H$.

Автоматически получаем и критерий пространственной инъективности.

ТЕОРЕМА 5. Пусть A – неразложимая CSL-алгебра конечной ширины. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) A – пространственно инъективная алгебра;
- 2) для любых $E, F \in \dot{L}$ выполнено $E \wedge F \neq \{0\}$;
- 3) для любых $E_i \in \dot{L}_i, i = 1, \dots, n$, выполнено $E_1 \wedge \dots \wedge E_n \neq \{0\}$;
- 4) или $\{0\}_+ \neq \{0\}$, или в L существует убывающая сеть $N = \{E_\alpha\}$, сильно сходящаяся к $\{0\}$, причем для $E_\alpha \in \dot{N}$ выполнено $E_{\alpha+} \neq \{0\}$.

ПРИМЕР 1. Любая гнездовая алгебра пространственно плоска и инъективна (это было доказано еще в [1]).

ПРИМЕР 2. В [9] (коммутирующие) гнезда $L_1, \dots, L_n$ называются *независимыми*, если пересечение любых интервалов $F_i \ominus E_i, F_i \supset E_i$, взятых по одному из каждого гнезда, не равно 0. В частности, для таких гнезд выполнено

$$(H \ominus E_1) \wedge \dots \wedge (H \ominus E_n) = E_1^\perp \wedge \dots \wedge E_n^\perp = (E_1 \vee \dots \vee E_n)^\perp \neq \{0\},$$

т.е. $E_1 \vee \dots \vee E_n \neq H$. Следовательно, выполнено условие 3) теоремы 4, и алгебра, порожденная такими гнездами, пространственно плоска (впрочем, как и инъективна, поскольку выполнено условие 3) теоремы 5).

ПРИМЕР 3. Отбросим требование коммутирования гнезд в определении их независимости. Покажем, что и в этом случае алгебра будет пространственно плоской и инъективной. В самом деле, хотя для некоммутирующих гнезд ссылаться на теорему 4 нельзя, но можно воспользоваться теоремой 3. Точнее, если $H_- \neq H$, то A даже пространственно проективна; если $H_- = H$, то указанная теорема гарантирует пространственную плоскость алгебры.

6. Вычисление некоторых групп когомологий. В п. 2 статьи уже указывалось, какие условия на банаховы A -модули X и Y гарантируют тривиальность групп когомологий $\mathcal{H}^n(A, \mathcal{B}(X, Y))$. Используя их, немедленно получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A – рефлексивная алгебра операторов в гильбертовом пространстве H , X и Y – левые банаховы A -модули. Гарантировать тривиальность групп когомологий $\mathcal{H}^n(A, \mathcal{B}(X, Y))$, $n \geq 1$, можно в следующих ситуациях:

- 1) если $H_- \neq H$, то $\mathcal{H}^n(A, \mathcal{B}(H, Y)) = 0$ для любого Y ;
- 2) если в L существует убывающая сеть $N = \{E_\alpha\}$, сильно сходящаяся к $\{0\}$, причем для $E_\alpha \in \dot{N}$ $E_{\alpha+} \neq \{0\}$, то $\mathcal{H}^n(A, \mathcal{B}(X, H)) = 0$ для любого X ;
- 2') если L конечной ширины, причем $E \wedge F \neq \{0\}$ для любых $E, F \in \dot{L}$, то $\mathcal{H}^n(A, \mathcal{B}(X, H)) = 0$ для любого X ;
- 3) если в L существует возрастающая сеть $N = \{E_\alpha\}$, сильно сходящаяся к H , причем для $E_\alpha \in \dot{N}$ $E_{\alpha-} \neq H$, то $\mathcal{H}^n(A, \mathcal{B}(H, Z^*)) = 0$ для любого правого A -модуля Z ;
- 3') если L конечной ширины, причем $E \vee F \neq H$ для любых $E, F \in \dot{L}$, то $\mathcal{H}^n(A, \mathcal{B}(H, Z^*)) = 0$ для любого правого A -модуля Z

(во всех случаях алгебра A автоматически неразложима).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть A – рефлексивная алгебра конечной ширины в гильбертовом пространстве H , причем выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

- или для любых $E, F \in \dot{L}$ $E \vee F \neq H$,
или для любых $E, F \in \dot{L}$ $E \wedge F \neq \{0\}$.

Тогда $\mathcal{H}^n(A, \mathcal{B}(H)) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Как мы уже отмечали, если L порождена конечным числом независимых, не обязательно коммутирующих гнезд, то выполнены оба этих условия. Тем самым, это следствие перекрывает известные результаты о тривиальности групп когомологий рефлексивных алгебр с коэффициентами в $\mathcal{B}(H)$ (см. [9]–[13]).

7. Сохранение пространственных гомологических свойств при переходе к джойну. В п. 3 уже было дано определение джойна, и с помощью этой конструкции построены примеры пространственно неплюской и пространственно неинъективной алгебр. Сейчас мы продолжим изучение джойнов.

Пусть $A \subseteq \mathcal{B}(H_1)$, $B \subseteq \mathcal{B}(H_2)$. Обозначим $\text{Lat } A$ через L_A , $\text{Lat } B$ – через L_B , $H = H_1 \oplus H_2$.

Обратим внимание читателя на несколько простых свойств джойна:

- 1) $\text{Lat } A \# B = L_A \cup \{E \oplus H_1 : E \in L_B\}$;
- 2) $A \# B$ рефлексивен $\iff A$ и B рефлексивны;
- 3) $A \# B$ – CSL-алгебра $\iff A$ и B – CSL-алгебры;
- 4) $A \# B$ – конечной ширины $\iff A$ и B – конечной ширины;
- 5) $(A \# B)^* = B^* \# A^*$;

6) джойн CSL-алгебр всегда неразложим.

В самом деле, пусть для некоторых нетривиальных $E, F \in L_{A\#B}$ выполнено $E \vee F = H$, $E \wedge F = 0$. Если E и F принадлежат L_A , то $E \vee F \subseteq H_1 \neq H$; если $E = E_1 \oplus H_1$, $F = F_1 \oplus H_1$, то $E \wedge F \supseteq H_1 \neq \{0\}$; если $E \in L_A$, $F = F_1 \oplus H_1$, то $E \wedge F = F \neq \{0\}$. В любом случае мы получаем противоречие.

ТЕОРЕМА 7. Пусть A – унитарная алгебра, а B – CSL-алгебра. Тогда для пространственной проективности джойна $A\#B$ достаточно, а в случае, когда A – CSL-алгебра, и необходимо, чтобы B была неразложимой пространственно проективной алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – неразложимая пространственно проективная CSL-алгебра. Следовательно [2], B содержит столбец одномерных операторов $\{e \otimes f : f \in H_2\}$, а тогда и $A\#B$ содержит аналогичный столбец, где f пробегает уже H . Поэтому $A\#B$ пространственно проективен.

Пусть A и B – CSL-алгебры, и $A\#B$ пространственно проективен. Поскольку джойн CSL-алгебр снова является CSL-алгеброй, и любой джойн неразложим, $A\#B$ содержит столбец одномерных операторов $e \otimes f$, $e \in H$, f пробегает все H . Ясно, что $e \in H_2$. (В самом деле, наличие в алгебре $A\#B$ столбца одномерных операторов равносильно тому, что $H_- \neq H$. При этом $e \in H_-^\perp$. Поскольку H_1 – инвариантное подпространство для $A\#B$, $H_1 \subseteq H_-$, то $e \in H_1^\perp = H_2$.) Следовательно, $\{e \otimes f : f \in H_2\} \in B$, что приводит к пространственной проективности B и одновременно к ее неразложимости.

ТЕОРЕМА 8. Пусть A и B – CSL-алгебры конечной ширины. Тогда джойн $A\#B$ пространственно плоский (соответственно пространственно инъективный) тогда и только тогда, когда B – неразложимая пространственно плоская алгебра (соответственно A – неразложимая пространственно инъективная алгебра).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $A\#B$ пространственно плоска $\iff$ для любых $E, F \in L_{A\#B}$ выполнено $E \vee F \neq H \iff$ для любых $E, F \in L_B$ выполнено $E \vee F \neq H_2 \iff B$ – неразложимая пространственно плоская алгебра.

Для доказательства второго утверждения достаточно сослаться на два факта: $A\#B$ пространственно плоска $\iff (A\#B)^*$ пространственно инъективна и $(A\#B)^* = B^* \# A^*$.

Усилим эту теорему, отбрасывая то или иное условие.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть A – унитарная алгебра, а B – неразложимая пространственно плоская CSL-алгебра конечной ширины. Тогда $A\#B$ – пространственно плоская алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если B не только пространственно плоская, но и проективная, то она содержит столбец одномерных операторов $e \otimes f$, $f \in H_2$, а тогда и джойн содержит столбец одномерных операторов $e \otimes f$, $f \in H$, что приводит к его пространственной проективности и, следовательно, плоскости.

В противном случае $(H_2)_- = H_2$ (так будем обозначать операцию взятия “ $_-$ ” по решетке L_B). Пространственная плоскость алгебры B (условие 3) теоремы 4) доставляет нам возрастающую сеть элементов решетки инвариантных подпространств $\mathcal{N} = \{E_\alpha\}$, сильно сходящуюся к H_2 , такую, что для всех $E_\alpha \in \mathcal{N}$ $(E_\alpha)_- \neq H_2$. Следовательно, зафиксировав для каждого α вектор $\eta_\alpha \in (E_\alpha)_-^\perp$, мы выделяем в алгебре B множество одномерных операторов $\{\eta_\alpha \otimes \xi : \xi \in E_\alpha\}$. Остается заметить, что $E_\alpha \oplus H_1$ сильно сходится к H , и для каждого α все одномерные операторы $\eta_\alpha \otimes \xi$, где ξ пробегает $E_\alpha \oplus H_1$, принадлежат джойну $A\#B$. Поэтому мы можем сослаться на лемму 4, согласно которой $A\#B$ оказывается пространственно плоским.

Переходя к алгебрам сопряженных операторов, получаем инъективный вариант только что доказанной теоремы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть B – унитарная алгебра, а A – неразложимая пространственно инъективная CSL-алгебра конечной ширины. Тогда $A \# B$ – пространственно инъективная алгебра.

В обратную сторону теорему 8 удастся усилить только при более жестких условиях (доказательство теоремы 8 переносится без изменений).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть A и B – CSL-алгебры. Если B конечной ширины, то из пространственной плоскости алгебры $A \# B$ следует пространственная плоскость алгебры B . Если же A конечной ширины, то из пространственной инъективности алгебры $A \# B$ следует пространственная инъективность алгебры A .

Общие выводы этого пункта таковы. При некоторых предположениях относительно составляющих джойна $A \# B$, он сохраняет инъективные свойства алгебры A и плоские свойства алгебры B .

В заключение мне приятно выразить свою искреннюю признательность А. Я. Хелемскому и Ю. В. Селиванову за помощь в работе. В частности, А. Я. Хелемский подсказал, как упростить доказательство теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Головин Ю. О. Гомологические свойства гильбертовых модулей над гнездовыми операторными алгебрами // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 6. С. 769–775.
- [2] Головин Ю. О. Критерий пространственной проективности неразложимой CSL-алгебры операторов // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 161–162.
- [3] Головин Ю. О. Свойство пространственной проективности в классе CSL-алгебр с атомным коммутантом // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 1. С. 147–159.
- [4] Longstaff W. E. Strongly reflexive lattices // J. London Math. Soc. (2). 1975. V. 11. P. 491–498.
- [5] Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [6] Gilfeather F., Smith R. R. Cohomology for operator algebras: joins // Amer. J. Math. 1994. V. 116. P. 541–561.
- [7] Arveson W. E. Operator algebras and invariant subspaces // Ann. of Math. 1974. T. 100. C. 433–532.
- [8] Davidson K. R. Commutative subspace lattices // Indiana Univ. Math. J. 1978. V. 27. P. 479–490.
- [9] Gilfeather F., Hopenwasser A., Larson D. R. Reflexive algebras with finite width lattices: tensor products, cohomology, compact perturbations // J. Funct. Anal. 1984. V. 55. P. 176–199.
- [10] Калиман Ш. И., Селиванов Ю. В. О когомологиях операторных алгебр // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1974. № 5. С. 24–27.
- [11] Cristensen E. Derivations of nest algebras // Math. Ann. 1977. V. 229. P. 155–161.
- [12] Nielsen J. P. Cohomology of some non-selfadjoint operator algebras // Math. Scand. 1980. V. 47. P. 150–156.
- [13] Lance E. C. Cohomology and perturbations of nest algebras // Proc. London Math. Soc. (3). 1981. V. 43. P. 334–356.