Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Кароль, Асимптотика параболической функции Грина для эллиптического оператора на многообразии с коническими точками, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 28–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:35:04

УДК 517.98

АСИМПТОТИКА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА НА МНОГООБРАЗИИ С КОНИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ

А. И. Кароль

Построена асимптотика при $t \rightarrow 0$ следа оператора $\exp(-tP)$ для эллиптического оператора на многообразии с коническими точками.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть P – самосопряженный положительно определенный в L_2 эллиптический оператор порядка $2l$ на замкнутом компактном многообразии M размерности m . В случае, когда коэффициенты оператора гладкие, хорошо известно утверждение (см., например, [1]).

ТЕОРЕМА 1. *Разрешающий оператор $\exp(-tP)$ соответствующего уравнения теплопроводности является при $t > 0$ интегральным оператором с гладким по t, x, y ядром $H(t, x, y)$ (функцией Грина оператора $\exp(-tP)$) таким, что*

- 1) для некоторых $c, \varepsilon > 0$ $|H(t, x, y)| \leq ct^{-m/(2l)} e^{-\varepsilon t}$, $t > 0$;
- 2) справедливо разложение (разложение Минакишисундарама–Плейеля)

$$H(t, x, x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) t^{(-m+2k)/(2l)}, \quad t \rightarrow +0. \quad (1)$$

Такая асимптотика дает важную информацию об операторе P и геометрии многообразия (см. [1]).

Если коэффициенты оператора имеют разрывы в какой-то точке, то разложение становится неравномерным, в точке разрыва коэффициенты $c_k(x)$ имеют особенности. В работе рассматривается эллиптический оператор на многообразии M с конической точкой x_0 . Это означает (см., например, [2]), что $M \setminus \{x_0\}$ – m -мерное многообразие класса C^∞ , а у точки x_0 существует окрестность U и отображение k этой окрестности (диффеоморфизм, сохраняющий коническую структуру) на окрестность вершины O конического многообразия X . Через S будем обозначать фиксированное направляющее подмногообразие X (S – компактное многообразие размерности $m - 1$, пересекающееся с

каждым лучом из X в одной точке). Для точек многообразия X , а значит, и в окрестности U можно ввести полярные координаты $x = r, \omega$: $r \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in S$, $r^{-1}x \in S$. Для упрощения записи не будем различать функцию u на U и $u \circ k^{-1}$ на X . Фиксируем также гладкую в $M \setminus \{x_0\}$ положительную плотность dx на M и будем считать, что $dx = r^{m-1} dr d\omega$ в окрестности U , где $d\omega$ – гладкая положительная плотность на S . Разумеется, многообразие может иметь любое конечное количество конических точек; в дальнейшем речь будет идти лишь об одной такой точке x_0 .

Важным примером оператора на многообразии с конической точкой является оператор на замкнутом гладком многообразии с символом, имеющим изолированную особенность в точке. Старший символ должен иметь в этой точке предел, который может зависеть от направления подхода, младшие члены могут иметь степенные особенности. В этой ситуации $X = \mathbb{R}^m$, $S = S^{m-1}$.

Оператор определен в пространстве $L_2(M)$ $\mathbb{C}^d$ -значных функций с помощью квадратичной формы

$$(Pu, u) = \int_M \sum_{|\alpha_1|, |\alpha_2| \leq l} \langle a_{\alpha_1, \alpha_2}(x) D^{\alpha_1} u, D^{\alpha_2} u \rangle dx, \quad (2)$$

$$a_{\alpha_1, \alpha_2}(x) = a_{\alpha_2, \alpha_1}^*(x), \quad D_{x_j} = -i \partial_{x_j},$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^d$, матричнозначные функции $a_{\alpha_1, \alpha_2}(x)$ гладкие в $M \setminus \{x_0\}$. В окрестности U коэффициенты допускают асимптотическое разложение

$$a_{\alpha_1, \alpha_2}(\rho x) \approx \rho^{|\alpha_1| + |\alpha_2| - 2l} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\alpha_1, \alpha_2, k}(x) \rho^k, \quad \rho \rightarrow +0, \quad (3)$$

где $a_{\alpha_1, \alpha_2, k}$ – однородные степени $|\alpha_1| + |\alpha_2| - 2l + k$ функции на X .

Эллиптичность оператора на многообразии с конической точкой требует выполнения двух условий (см. [2]–[5]).

1. Эллиптичность в обычном смысле вне конической точки:

$$\langle p_{2l}(x, \xi) \eta, \eta \rangle = \sum_{|\alpha_1|, |\alpha_2| = l} \langle a_{\alpha_1, \alpha_2}(x) \xi^{\alpha_1 + \alpha_2} \eta, \eta \rangle \geq c_0 |\xi|^{2l} \cdot |\eta|^2$$

$$\forall \eta \in \mathbb{C}^d, \quad \forall x, \xi \in T^*(M \setminus \{x_0\}).$$

2. Обозначим через $P_0(x, D_x)$ оператор на коническом многообразии X с однородными коэффициентами

$$P_0(x, D_x)u = \sum_{|\alpha_1|, |\alpha_2| \leq l} D_x^{\alpha_2} (a_{\alpha_1, \alpha_2, 0}(x) D_x^{\alpha_1} u(x)) = r^{-2l} \sum_{k=0}^{2l} p_k(\omega, D_\omega) (r D_r)^k u, \quad (4)$$

$p_k(\omega, D_\omega)$ – дифференциальные операторы на S . Второе условие состоит в том, что для всех $\mathbb{C}^d$ -значных функций $f \in C^\infty(S)$ и всех λ на прямой $\text{Im } \lambda = m/2 - l$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{2l} (p_k(\omega, D_\omega) \lambda^k f, f)_{L_2(S)} \geq c_0 (\|f\|_{H^l(S)}^2 + |\lambda|^{2l} \cdot \|f\|_{L_2(S)}^2), \quad c_0 > 0. \quad (5)$$

При выполнении этих условий оператор P с областью определения $C_0^\infty(M \setminus \{x_0\})$ полуограничен снизу в $L_2(M)$, обозначим через $\mathcal{P}$ его расширение по Фридрихсу. Добавив подходящую константу к $\mathcal{P}$ (это приведет к замене $\exp(-t\mathcal{P})$ на $\exp(-tc) \exp(-t\mathcal{P})$), будем считать, что $\mathcal{P}$ положительно определен в $L_2(M)$. Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 2. Оператор $\mathcal{H}(t) = \exp(-t\mathcal{P})$ – ядерный при $t > 0$, для его следа имеет место асимптотическое разложение

$$\mathrm{tr} \mathcal{H}(t) = \int_M \mathcal{H}(t, x, x) dx \approx \sum_{k=0}^{\infty} (a_k t^{(-m+k)/(2l)} + b_k t^{k/(2l)} \ln t),$$

$\mathcal{H}(t, x, y)$ – ядро интегрального оператора $\mathcal{H}(t)$. Для коэффициента a_0 соотражается классическая формула

$$a_0 = (2\pi)^{-m} \Gamma\left(\frac{m}{2l} + 1\right) \int_{T^*M} N(1, p_{2l}(x, \xi)) dx d\xi, \quad (6)$$

$N(1, p_{2l}(x, \xi))$ – функция распределения спектра – количество собственных чисел матрицы p_{2l} , меньших 1. Для нечетной размерности $b_0 = 0$, для четного m

$$b_0 = -\frac{1}{2l} c_{m/2}, \quad (7)$$

где $c_{m/2}$ – коэффициент в асимптотике

$$\int_S H_0(t, \omega, \omega) d\omega \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{(-m+2k)/(2l)} \quad \text{при } t \rightarrow +0,$$

$H_0(t, x, x)$ – ядро интегрального в $L_2(X)$ оператора $\exp(-tP_0)$ (см. теорему 1).

Доказательство теоремы получается интегрированием по M асимптотического разложения ядра оператора $\mathcal{H}(t)$. Вне конической точки такая асимптотика хорошо известна (теорема 1), основные трудности связаны с исследованием окрестности конической точки. Близкая задача построения асимптотики фундаментального решения параболического уравнения в окрестности конических точек рассматривалась В. А. Козловым [6], [7]. Однако, эти асимптотические разложения получены в зоне $t \geq r^{2l}$, что не позволяет написать асимптотику при $t \rightarrow 0$. Ранее асимптотика при $t \rightarrow 0$ следа сингулярного оператора теплопроводности вычислялась лишь в одномерном случае операторов Штурма–Лиувилля [8]. Предлагаемое в работе построение асимптотики ядра $\mathcal{H}(t, x, x)$ в окрестности конической точки основывается на свойстве однородности оператора $\mathcal{P}$ относительно радиальных растяжений с центром в точке x_0 , что позволяет отойти на фиксированное расстояние от этой точки и воспользоваться известным результатом типа теоремы 1. Отметим, что при обосновании асимптотики не привлекаются теоремы о повышении гладкости решения в окрестности конической точки, а используется лишь неравенство Гординга.

2. Оператор $\exp(-t\mathcal{P})$. Введем необходимые весовые пространства Соболева (см. [2]–[5]). Через $H_0^s(X)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, обозначим пополнение класса $C_0^\infty(X \setminus O)$ по норме

$$\|u\|_{H_0^s(X)}^2 = \int_X \sum_{|\alpha| \leq s} |r^{2|\alpha| - 2s} \cdot |D^\alpha u(x)|^2 dx.$$

С помощью разбиения единицы определим пространство $H_0^s(M)$. При $s \in \mathbb{Z}_-$ пространства $H_0^{+s}(X)$, $H_0^{+s}(M)$, сопряженные с $H_0^{-s}(X)$, $H_0^{-s}(M)$ относительно двойственности – скалярного произведения в L_2 .

Применение неравенства (5) к функции $f(\omega) = \tilde{u}(\lambda, \omega)$ – преобразованию Меллина функции $u(r, \omega)$ по переменной r – сразу приводит к неравенству Гординга для однородного оператора $P_0(x, D_x)$ на X (ср. [2]–[5])

$$(P_0(x, D_x)u, u) \geq c_0 \|u\|_{H_0^l(X)}^2, \quad u \in C_0^\infty(X \setminus O). \quad (8)$$

Из этого неравенства с помощью разбиения единицы на M и стандартных соображений теории возмущений получается неравенство Гординга для оператора $\mathcal{P}$ на M :

$$(\mathcal{P}(x, D_x)u, u) \geq c_0 \|u\|_{H_0^l(M)}^2 - C \|u\|_{L_2(M)}^2, \quad u \in C_0^\infty(M \setminus \{x_0\}).$$

В дальнейшем считаем, что в этом неравенстве $C = 0$.

Продолжим коэффициенты $a_{\alpha_1, \alpha_2}(x)$ квадратичной формы (2) с окрестности $k(U)$ до гладких матричнозначных функций $a_{\alpha_1, \alpha_2}^*(x)$ на X так, чтобы в окрестности бесконечности функции становились однородными: $a_{\alpha_1, \alpha_2}^*(x) = a_{\alpha_1, \alpha_2, 0}^*(x)$ из (3). Возникшая квадратичная форма

$$(Pu, u) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{|\alpha_1|, |\alpha_2| \leq l} \langle a_{\alpha_1, \alpha_2}^*(x) D^{\alpha_1} u, D^{\alpha_2} u \rangle dx, \quad u \in C_0^\infty(X \setminus O), \quad (9)$$

будет мало отличаться от квадратичной формы оператора P_0 (4), и для новой формы (9) сохранится неравенство (8).

ЛЕММА 1. Пусть φ , ζ – операторы умножения на функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(X)$; $\zeta(x) \in C^\infty(X)$, $\zeta(x) = 1$ при $r > R$, $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \zeta = \emptyset$. Тогда

1) для $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re } \lambda \leq \varepsilon \max(1, |\text{Im } \lambda|)$, и всех $q_1, q_2 \geq 0$ справедлива оценка

$$\|r^{q_1} \zeta(P - \lambda)^{-1} \varphi\|_{H_0^{-l}(X) \rightarrow H^{l+q_2}(X)} \leq c_{q_1, q_2} (1 + |\lambda|)^{-q_2/(2l)}; \quad (10)$$

2) оператор $r^{q_1} \zeta(P - \lambda)^{-1} \varphi$ ядерный в $L_2(X)$, его S_1 -норма также убывает быстрее любой степени λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство оценки (10) проведем по индукции. Пусть сначала $q_1 = 0$. Имеем

$$\zeta(P - \lambda)^{-1} \varphi = (P - \lambda)^{-1} [P, \zeta] (P - \lambda)^{-1} \varphi = (P - \lambda)^{-1} [P, \zeta] \zeta' (P - \lambda)^{-1}, \quad (11)$$

где коммутатор $[P, \zeta] = P\zeta - \zeta P$ – дифференциальный оператор порядка $2l - 1$ с коэффициентами, равными 0 при $r > R$ и вблизи $\text{supp } \varphi$, ζ' – оператор умножения на функцию $\zeta(x) \in C_0^\infty(X)$, $\zeta(x)' \zeta(x) = \zeta(x)$ при $r < R + 1$, $\text{supp } \zeta' \cap \text{supp } \zeta = \emptyset$. Пусть оценка (10) выполнена со срезкой ζ' и параметром $q_2 = q^*$ (для $q^* = 0$ это следует из неравенства Гординга (8) для оператора P и вложения $\zeta' H_0^l \subset H^l$). Если η, η' – операторы умножения на гладкие функции, равные 0 вблизи нуля и равные 1 вблизи бесконечности, то из условия эллиптичности оператора P (условие (1)) получаем, что

$$\|\eta'(P - \lambda)^{-1} \eta\|_{H^{-l+q^*+1/2} \rightarrow H^{l+q^*}} \leq c(1 + |\lambda|)^{-1/(4l)}.$$

Из представления (11) вытекает теперь оценка (10) с параметром $q_2 = q^* + 1/2$. Аналогично можно провести индукцию и по параметру q_1 : коммутатор $[P, \zeta r^{q_1}]r^{1-q_1}$ – оператор порядка $2l - 1$ в шкале $H^q(X)$.

Так как на финитных в бесконечности функциях норма пространства $H_0^{-l}(X)$ оценивается через норму $L_2(X)$, оператор $r^{q_1} \zeta (P - \lambda)^{-1} \varphi$ можно рассматривать как оператор в $L_2(X)$. Ядерность и оценка S_1 -нормы этого оператора сразу следуют из оценки (10) и известных свойств ядерности оператора вложения пространств Соболева.

Имеем

$$\exp(-tP) = H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(-\lambda t) (P - \lambda)^{-1} d\lambda, \quad (12)$$

где $\Gamma = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda = \varepsilon(\max(1, |\operatorname{Im} \lambda|))\}$, $\varepsilon > 0$. При $t > 0$ этот интеграл абсолютно сходится в пространстве операторов, действующих из $H_0^{-l}(X)$ в $H_0^l(X)$. Такое же представление будем использовать и для оператора $\mathcal{H}(t) = \exp(-t\mathcal{P})$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi, \psi \in C_0^\infty(U)$, $\psi|_{\operatorname{supp} \varphi} = 1$. Тогда оператор $\psi H(t)\varphi - \psi \mathcal{H}(t)\varphi$ ядерный в $L_2(X)$, причем его норма в S_1 есть $O(t^N)$ при $t \rightarrow 0$ для любого N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что

$$R_{\psi, \varphi}(t) = \psi(P - \lambda)^{-1} \varphi - \psi(\mathcal{P} - \lambda)^{-1} \varphi$$

– ядерный в $L_2(X)$ оператор и его S_1 -норма есть $O(|\lambda|^{-N})$ для любого N . Так как в окрестности U операторы P и $\mathcal{P}$ совпадают, из формулы (11) следует, что

$$R_{\psi, \varphi}(t) = (P - \lambda)^{-1} ([P, \psi](P - \lambda)^{-1} \varphi - [P, \psi](\mathcal{P} - \lambda)^{-1} \varphi).$$

Коммутатор $[P, \psi]$ обращается в 0 на функциях с носителем в малой окрестности носителя φ , и утверждение теоремы следует из леммы 1.

Будем рассматривать функции $u(x)$ на коническом многообразии X как функции от r со значениями в пространстве функций на S . Следующая теорема является аналогом известной леммы Агмона [9].

ТЕОРЕМА 4. При $t > 0$ имеет место представление

$$H(t)u(r) = \int_0^\infty K(t, r, r') u(r') r'^{m-1} dr',$$

где ядро $K(t, r, r')$ – оператор, действующий на S , причем

$$\|K(t, r, r')\|_{H^{-l+1/2}(S) \rightarrow H^{l-1/2}(S)} \leq c(r r')^{l-m/2} \|H(t)\|_{H_0^{-l}(X) \rightarrow H_0^l(X)}. \quad (13)$$

Оператор K – ядерный оператор в $L_2(S)$ с S_1 -нормой

$$\|K(t, r, r')\|_t \leq c(t)(r r')^{l-m/2}, \quad r, r' \leq R < \infty. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Однородность нормы пространства $H_0^l(X)$ относительно растяжений по переменной r приводит к вложению

$$\|u(r)\|_{H^{l-1/2}(S)} \leq cr^{l-m/2} \|u\|_{H_0^l(X)}. \quad (15)$$

Построим интегральное ядро для произвольного оператора $T: H_0^{-l}(X) \rightarrow H_0^l(X)$. Определим оператор $K_{r'}: H_0^{-l}(X) \rightarrow H^{l-1/2}(S)$ формулой $K_{r'}\nu = (T^*\nu)(r')$. Рассмотрим на функциях $u, v \in H_0^{-l}(X)$ полуторалинейную форму оператора T

$$\begin{aligned} (Tu, \nu)_{L_2(X)} &= (u, T^*\nu)_{L_2(X)} = \int_0^\infty (u(r'), K_{r'}\nu)_{L_2(S)} r'^{m-1} dr' \\ &= \int_0^\infty K_{r'}^*(u(r'), \nu)_{L_2(X)} r'^{m-1} dr' \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty ((K_{r'}^*(u(r')))(r), \nu(r))_{L_2(S)} r'^{m-1} r^{m-1} dr' dr. \end{aligned}$$

Оператор $K(r, r'): H^{-l+1/2}(S) \rightarrow H^{l-1/2}(S)$, действующий по формуле $K(r, r')w = (K_{r'}^*w)(r)$, и является интегральным ядром оператора T . Оценка нормы оператора $K(r, r')$ следует из вложения (15).

Известно [9], что если $2l > m$, то из оценки (13) следует ядерность оператора K в $L_2(S)$ и оценка (14) его S_1 -нормы при всех $r, r' > 0$. Если же $2l < m$, то из (13) вытекает лишь оценка S_p -нормы с $p > (m-1)/(2l-1)$. Имеем

$$K(t, r, r') = \int_0^\infty K\left(\frac{t}{2}, r, r_1\right) K\left(\frac{t}{2}, r_1, r'\right) r_1^{m-1} dr_1. \quad (16)$$

Если для некоторого $p_0 > 1$ $\|K(t, r, r')\|_{p_0} \leq c(t)(rr')^{l-m/2}$ при $r, r' \leq R < \infty$, то интеграл по отрезку $(0, R+1)$ абсолютно сходится в S_{p_1} , $p_1 = \max(1, p_0/2)$, для его S_{p_1} -нормы справедлива такая же оценка. Остается проверить, что оставшийся интеграл по интервалу $(R+1, \infty)$ – ядерный оператор в $L_2(S)$ с S_1 -нормой, не превосходящей $c(rr')^{l-m/2}$. Из леммы 1 и формулы (12) следует представление

$$K\left(\frac{t}{2}, r_1, r\right) = \int_{R+1}^\infty (1+r_1^2)^{-q} T_q(r_1, r_2) \tilde{K}_q(t, r_2, r') r_2^{m-1} dr_2,$$

где $T_q(r_1, r_2)$, $\tilde{K}_q(t, r_2, r')$ – операторы в $L_2(S)$, порожденные операторами $(1-\Delta)^{-q}$ в $L_2(X)$ и $(1-\Delta)^q(1+|x|^2)^q H(t/2)$ соответственно. Из леммы 1 следует, что норма оператора $\tilde{K}_q(t, r_2, r'): H^{-l+1/2}(S) \rightarrow H^{l-1/2}(S)$ при $r' < R, R+1 < r_2$ не превосходит $c_q r_2^{-q} (r')^{l-m/2}$, а при $q > m/2$ оператор $T_q(r_1, r_2)$ ядерный с ограниченной по r_1, r_2 S_1 -нормой. Следовательно, интеграл по r_2 абсолютно сходится в S_1 и

$$\left\| K\left(\frac{t}{2}, r_1, r'\right) \right\|_{S_1} \leq c(1+r_1^2)^{-q} (r')^{l-m/2}, \quad r' < R, \quad R+1 < r_1.$$

Поэтому интеграл (16) по интервалу $(R+1, \infty)$ абсолютно сходится в S_1 и его S_1 -норма оценивается через $c(rr')^{l-m/2}$.

3. Асимптотика ядра $H(t, x, x)$. Определим оператор $P_h(\sigma)$, $\sigma \in [0, 1]$, на коническом многообразии X с помощью квадратичной формы (см. (9))

$$(P_h(\sigma)u, u) = \int_X \sum_{|\alpha_1|, |\alpha_2| \leq l} \langle \sigma^{2l-|\alpha_1|-|\alpha_2|} a_{\alpha_1, \alpha_2}^*(\sigma x) D^{\alpha_1} u, D^{\alpha_2} u \rangle dx, \quad (17)$$

$$u \in C_0^\infty(X \setminus O), \quad P_h(1) = P, \quad P_h(0) = P_0.$$

Так как по условию (2) $\sigma^{2l-|\alpha_1|-|\alpha_2|} a_{\alpha_1, \alpha_2}^*(\sigma x) \rightarrow a_{\alpha_1, \alpha_2, 0}^*(x)$ при $\sigma \rightarrow 0$ равномерно по $x \in X \setminus O$, можно считать, что для оператора $P_h(\sigma)$ также выполнено неравенство Гординга (8) равномерно по $\sigma \in [0, 1]$.

Пусть U_ρ – унитарный в $L_2(X)$ оператор растяжения $U_\rho f(x) = \rho^{m/2} f(\rho x)$, $\rho > 0$. Для оператора $P_h(\sigma)$ выполняется условие однородности: $U_\rho^{-1} P_h(\sigma) U_\rho = \rho^{2l} P_h(\rho^{-1} \sigma)$, а это приводит к однородности оператора $H_h(\sigma, t) = \exp(-tP_h(\sigma))$: $U_\rho^{-1} H_h(\sigma, t) U_\rho = H_h(\rho^{-1} \sigma, \rho^{2l} t)$ и к однородности ядра $K_h(\sigma, t, r, r')$ оператора $H_h(\sigma, t)$:

$$K_h(\sigma, t, r, r') = \rho^m K_h(\rho^{-1} \sigma, \rho^{2l} t, \rho r, \rho r'). \quad (18)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть θ_ε – оператор умножения на индикаторную функцию окрестности $r < \varepsilon$. При $t \rightarrow +0$ имеет место асимптотика

$$\text{tr } \theta_\varepsilon H(t) = \int_0^\varepsilon \text{tr } K(t, r, r) r^{m-1} dr \approx \sum_{k=0}^{\infty} (a_k(\varepsilon) t^{(-m+k)/(2l)} + b_k t^{k/(2l)} \ln t). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При всех $\sigma \in [0, 1]$ оператор $K_h(\sigma, t, r, r')$ ядерный в $L_2(S)$, $K_h(1, t, r, r') = K(t, r, r')$. Используя однородность ядра (18), получаем, что

$$\int_0^\varepsilon \text{tr } K(t, r, r) r^{m-1} dr = \int_0^\varepsilon \text{tr } K_h(1, t, r, r) r^{m-1} dr = \int_0^\varepsilon \text{tr } K_h(r, tr^{-2l}, 1, 1) r^{-1} dr. \quad (20)$$

В слое $c^{-1} < r < c$ оператор $P_h(\sigma)$ – эллиптический оператор с гладкими коэффициентами, гладко зависящий от параметра $\sigma \in [0, 1]$. Поэтому оператор $K_h(\sigma, \tau, 1, 1)$ – интегральный оператор в $L_2(S)$ с гладким на $S \times S$ ядром, для которого справедливо утверждение теоремы 1, оценку и асимптотику в этой теореме можно любое число раз дифференцировать по параметру σ .

Представим в (20)

$$\int_0^\varepsilon = \int_0^{t^{1/(2l)}} + \int_{t^{1/(2l)}}^\varepsilon.$$

После замены $tr^{-2l} = \tau$ получим, что

$$\int_0^{t^{1/(2l)}} \text{tr } K_h(r, tr^{-2l}, 1, 1) r^{-1} dr = \frac{1}{2l} \int_1^\infty \text{tr } K_h\left(\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/(2l)}, \tau, 1, 1\right) \tau^{-1} d\tau. \quad (21)$$

Так как все производные по σ функции $\text{tr } K_h(\sigma, \tau, 1, 1)$ экспоненциально убывают по τ на бесконечности, интеграл (21) является гладкой функцией от $t^{1/(2l)}$.

Рассмотрим оставшийся интеграл

$$\int_{t^{1/(2l)}}^{\varepsilon} \operatorname{tr} K_h(r, tr^{-2l}, 1, 1) r^{-1} dr.$$

В соответствии с теоремой 1 представим в этом интеграле

$$\operatorname{tr} K_h(\sigma, \tau, 1, 1) = \sum_{k < N} c_k(\sigma) \tau^{(-m+2k)/(2l)} + K^{(N)}(\sigma, \tau) \tau^{(-m+2N)/(2l)}, \quad (22)$$

где коэффициенты $c_k(\sigma)$ гладкие по $\sigma \in [0, 1]$, а для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ $|\partial_{\sigma}^j K^{(N)}(\sigma, \tau)| \leq c(N, j)$. Проинтегрируем разложение (22):

$$I_k(t) = \int_{t^{1/(2l)}}^{\varepsilon} c_k(r) (tr^{-2l})^{(-m+2k)/(2l)} r^{-1} dr = t^{(-m+2k)/(2l)} \int_{t^{1/(2l)}}^{\varepsilon} c_k(r) r^{m-2k-1} dr,$$

разложение функции $c_k(r)$ по степеням r показывает, что

$$I_k(t) = \begin{cases} t^{(-m+2k)/(2l)} f_k(t^{1/(2l)}) & \text{при } 2k < m, \\ -\frac{c_k(0)}{2l} \ln t + g_k(t^{1/(2l)}) & \text{при } 2k = m, \\ t^{(-m+2k)/(2l)} h_k(t^{1/(2l)}) + \sum_{j \leq 2k-m} a_{kj} t^{j/(2l)} & \text{при } 2k > m. \end{cases}$$

В этих формулах f_k, g_k, h_k — гладкие функции. Таким образом, оправдана формула (7) в теореме 2.

При интегрировании остаточного члена в (22) сделаем замену $tr^{-2l} = \tau$ и разложим $K^{(N)}(\sigma, \tau)$ по степеням σ :

$$\begin{aligned} K^{(N)}(\sigma, \tau) &= \sum_{j < 2N-m-1} K_j^{(N)}(\tau) \sigma^j + \sigma^{2N-m-1} K_*^{(N)}(\sigma, \tau), \\ &\int_{t^{1/(2l)}}^{\varepsilon} K^{(N)}(r, tr^{-2l}) (tr^{-2l})^{(-m+2N)/(2l)} r^{-1} dr \\ &= \frac{1}{2l} \int_{\varepsilon^{-2lt}}^1 K^{(N)}\left(\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/(2l)}, \tau\right) \tau^{(2N-m)/(2l)-1} d\tau \\ &= \sum_{j < 2N-m-1} t^{j/(2l)} A_j(t) + \frac{1}{2l} t^{(-m+2N-1)/(2l)} R_N(t), \end{aligned}$$

где

$$A_j(t) = \frac{1}{2l} \int_{\varepsilon^{-2lt}}^1 K_j^{(N)}(\tau) \tau^{(2N-j-m)/(2l)-1} d\tau$$

– гладкая функция от t , а

$$R_N(t) = \frac{1}{2l} \int_{\varepsilon-2lt}^1 K_*^{(N)} \left(\left(\frac{t}{\tau} \right)^{1/(2l)}, \tau \right) \tau^{1/(2l)-1} d\tau$$

ограничена по t .

Теорема 2 сразу следует из теоремы 5 и классической теоремы 1. Формула (6) для старшего члена асимптотики также получается суммированием старших коэффициентов асимптотик (1) и (19).

Подсчитаем коэффициент a_0 . Из доказательства теоремы 5 видно, что этот коэффициент возникает при интегрировании старшего члена асимптотики функции $\operatorname{tr} K_h(\sigma, \tau, 1, 1) = c_0(\sigma) \tau^{-m/(2l)} + O(\tau^{(-m+2)/(2l)})$:

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{t^{1/(2l)}}^{\varepsilon} c_0(\sigma) \sigma^{m-1} d\sigma = \int_0^{\varepsilon} c_0(\sigma) \sigma^{m-1} d\sigma.$$

Коэффициент $c_0(\sigma)$ выражается через старший символ $P_h(\sigma, x, \xi)$ оператора $P_h(\sigma)$ (17):

$$c_0(\sigma) = (2\pi)^{-m} \Gamma\left(\frac{m}{2l} + 1\right) \int_S dS(\omega) \int_{T_{\sigma\omega}^* X} N(1, p_h(\sigma, \omega, \xi)) d\xi,$$

$N(1, p_h)$ – функция распределения спектра – это количество собственных чисел матрицы p_h , меньших 1. В достаточно маленькой окрестности вершины конического многообразия X матрица $p_h(r, \omega, \xi)$ совпадает со старшим символом $p_{2l}(r\omega, \xi)$ исходного оператора P . Таким образом,

$$\begin{aligned} a_0 &= -(2\pi)^{-m} \Gamma\left(\frac{m}{2l} + 1\right) \int_0^{\varepsilon} \int_S dS(\omega) \int_{T_{r\omega}^* X} N(1, p_{2l}(r\omega, \xi)) r^{m-1} d\xi dr \\ &= (2\pi)^{-m} \Gamma\left(\frac{m}{2l} + 1\right) \int_{T^* M \cap \{r \leq \varepsilon\}} N(1, p_{2l}(x, \xi)) d\xi dx. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Greiner P. An asymptotic expansion for the heat equation // Arch. Rational Mech. Anal. 1971. V. 41. №3. P. 163–218.
- [2] Пламеневский Б. А. Алгебры псевдодифференциальных операторов. М.: Наука, 1986.
- [3] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
- [4] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38. №2. С. 3–77.
- [5] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
- [6] Козлов В. А. Об асимптотике функции Грина и ядер Пуассона смешанной параболической задачи в конусе. I // Z. Anal. Anwendungen. 1989. V. 8. №2. P. 131–151.
- [7] Козлов В. А. Об асимптотике функции Грина и ядер Пуассона смешанной параболической задачи в конусе. II // Z. Anal. Anwendungen. 1991. V. 10. №1. P. 27–42.
- [8] Bruning J. Heat equation asymptotics for singular Sturm–Liouville operators // Math. Ann. 1984. V. 268. P. 173–196.
- [9] Agmon S. On kernels, eigenvalues and eigenfunctions related to elliptic problems // Comm. Pure Appl. Math. 1965. V. 18. №4. P. 627–663.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: karol@aik.usr.ru

Поступило
19.01.95
Исправленный вариант
26.04.96