Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Кириллов, Обобщенные дифференцируемые произведения, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 37–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:16:21

УДК 519.216.22

ОБОБЩЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ПРОДАКТ-МЕРЫ

А. И. Кириллов

Рассматривается класс мер на пространстве $\mathbb{R}^\infty$, определяемых последовательностями функций конечного числа переменных. Доказана теорема существования таких мер. Исследованы их свойства. Приведены конкретные примеры.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Введение

1.1. Постановка задачи. Продакт-меры возникают естественным образом, когда бывает задана последовательность пространств $X_1, X_2, \dots$, снабженных σ -кольцами измеримых множеств $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots$, на которых определены вероятностные меры $\mu_1, \mu_2, \dots$. В таком случае можно ввести пространство $X_1 \times X_2 \times \dots$ и наименьшее σ -кольцо $\mathfrak{M}$, содержащее полукольцо $\mathfrak{M}_0$ множеств $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots$, у которых $\forall k \in \mathbb{N} \mathcal{M}_k \in \mathfrak{M}_k$ и только для конечного числа индексов $k \mathcal{M}_k \neq X_k$. На $\mathfrak{M}_0$ определена аддитивная функция множеств

$$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \longrightarrow \mu_0(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots) = \prod_{k=1}^{\infty} \mu_k(\mathcal{M}_k).$$

Если пространства X_k польские и $\mathfrak{M}_k$ — σ -кольца борелевских множеств, то существует единственное продолжение μ_0 до σ -аддитивной меры μ на $\mathfrak{M}$ (см., например, [1, с. 123]). Мера μ называется *продакт-мерой, ассоциированной с семейством* $\{X_k, \mathfrak{M}_k, \mu_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Свойства продакт-меры μ выводятся из свойств мер μ_k . Обычно пространства X_k конечномерны и μ_k определяются плотностями ϱ_k относительно соответствующих мер Лебега. В этом смысле продакт-меры определяются функциями и для их исследования можно применить методы конечномерного анализа. Поскольку других методов практически нет, среди всевозможных мер на функциональных пространствах лишь продакт-меры изучены достаточно подробно.

Класс продакт-мер широк. Однако, в бесконечномерном анализе нельзя обойтись только продакт-мерами или мерами, абсолютно непрерывными относительно продакт-мер. В частности, иллюстрации теорем примерами, основанными на продакт-мерах,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01701.

нередко считаются тривиальными. Поэтому интересны классы других мер, которые были бы столь же доступны анализу, как и продакт-меры, но не сводились бы к ним и имели нетривиальные применения. В данной работе описаны меры из одного такого класса, которые мы называем обобщенными продакт-мерами.

1.2. Определение обобщенной продакт-меры. Обозначим $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел и предположим, что заданы две возрастающие последовательности $\{m(k)\}_{k=1}^{\infty}, \{n(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такие, что $m(1) = 1$ и $\forall k \in \mathbb{N} \ m(k+1) \leq n(k) + 1$. Обозначим $N_k = [m(k), n(k)] \cap \mathbb{N}$. Очевидно, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k = \mathbb{N}$ и каждое $n \in \mathbb{N}$ входит только в конечное число множеств N_k . Пусть, как обычно, $\mathbb{R}^{\infty}$ – пространство последовательностей вещественных чисел и $\mathbb{R}_0^{\infty}$ – его подпространство, состоящее из последовательностей, у которых лишь конечное число членов отлично от нуля. Для любой последовательности $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\infty}$ и $\forall k \in \mathbb{N}$ положим $\hat{P}_k x = (x_{m(k)}, \dots, x_{n(k)})$.

Допустим, что на каждом из пространств $\hat{P}_k \mathbb{R}^{\infty}$ можно определить неотрицательную функцию ϱ_k таким образом, что выполняются следующие три условия:

1) $\forall q = (q_1, q_2, \dots) \in \mathbb{R}_0^{\infty}$ существует

$$\tilde{\mu}(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{M(n)}} \prod_{k=1}^n \varrho_k(x_{m(k)}, \dots, x_{n(k)}) \prod_{j=1}^{M(n)} e^{iq_j x_j} dx_j, \quad (1)$$

где $M(n) = \max\{n(k) : k \leq n\}$ – наибольшее число в $\bigcup_{k=1}^n N_k$;

2) $\tilde{\mu}(0) = 1$;

3) Сужение функции $\tilde{\mu}(\cdot)$ на каждое конечномерное подпространство в $\mathbb{R}_0^{\infty}$ непрерывно.

Очевидно, что $\tilde{\mu}(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы Бохнера–Колмогорова (см., например, [2, § IV.4.2]). Поэтому на цилиндрическом σ -кольце $\mathcal{C}((\mathbb{R}_0^{\infty})^a, \mathbb{R}_0^{\infty})$ определена вероятностная мера μ_a , для которой $\tilde{\mu}(\cdot)$ является характеристическим функционалом. Пространство $(\mathbb{R}_0^{\infty})^a$, алгебраически сопряженное к $\mathbb{R}_0^{\infty}$, каноническим образом отождествляется с $\mathbb{R}^{\infty}$. Обозначим через μ образ μ_a при таком отождествлении.

В случае, когда $\forall k \in \mathbb{N} \ m(k) = n(k) = k$, каждая функция ϱ_k определяет вероятностную меру μ_k на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Предел (1) существует для любого $q \in \mathbb{R}_0^{\infty}$ и равен $\tilde{\mu}_1(q_1) \cdots \tilde{\mu}_j(q_j)$, где j – номер последнего члена последовательности $q = (q_1, q_2, \dots)$, отличного от нуля, и $\tilde{\mu}_k(\cdot)$ ($k = 1, \dots, j$) – характеристические функции мер μ_k . Непрерывность $\tilde{\mu}(\cdot)$ очевидна. Мера μ с характеристическим функционалом $\tilde{\mu}(\cdot)$ является продакт-мерой, ассоциированной с семейством $\{X_k = \mathbb{R}, \mathfrak{M}_k = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Вообще, предел (1) определяет характеристический функционал некоторой продакт-меры, если множества из $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ не “сцеплены”, т.е. не существует возрастающей последовательности натуральных чисел, каждый член которой принадлежит не менее чем двум множествам из семейства $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$. Возможны и иные ситуации. Пусть, например, $N_1 = \{1\}, N_2 = \{1, 2\}, \dots, N_k = \{k-1, k\}, \dots$ и

$$\varrho_1(x_1) = \pi^{-1}(1+x_1^2)^{-1}, \quad \varrho_2(x_1, x_2) = \pi^{-1}(1+x_1^2)^{1/2}(1+x_1^2+x_2^2)^{-1}, \quad \dots,$$

$$\varrho_k(x_{k-1}, x_k) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1+x_{k-1}^2}}{1+x_{k-1}^2+x_k^2}, \quad \dots$$

В данном случае (1) определяет некоторую вероятностную меру на $\mathbb{R}^\infty$, которая не является продакт-мерой. Меры, определяемые характеристическими функционалами (1) для всевозможных семейств $\{N_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\varrho_k\}_{k=1}^\infty$, называются в данной статье *обобщенными продакт-мерами*. Мы рассмотрим некоторые дифференцируемые меры такого класса.

1.3. Дифференцируемые меры. Напомним, что мера μ на σ -кольце $\mathcal{M}$ измеримых подмножеств линейного пространства X называется *дифференцируемой по некоторому направлению* $h \in X$, если $\forall A \in \mathcal{M}$ существует

$$\mu'_h(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu(A + th) - \mu(A)}{t}.$$

Функция множеств μ'_h σ -аддитивна и абсолютно непрерывна относительно μ (см., например, [3]). По теореме Радона–Никодима существует функция $\beta_h \in L^1(X, \mu)$ такая, что $\forall A \in \mathcal{M}$

$$\mu'_h(A) = \int_A \beta_h(x) d\mu(x).$$

Функция β_h называется *логарифмической производной меры μ по направлению h* .

Пусть μ – продакт-мера на $\mathbb{R}^\infty$, определяемая последовательностью плотностей $\{\varrho_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}_{k=1}^\infty$, имеющих обобщенные производные. Тогда μ дифференцируема по направлению каждого вектора e_k канонического базиса пространства $\mathbb{R}^\infty$. При этом $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\beta_{e_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \ln \varrho_k(x_k).$$

Очевидно, что логарифмические производные продакт-меры по направлениям e_k ($k \in \mathbb{N}$) являются функциями одной переменной. Обобщенные продакт-меры характерны тем, что их логарифмические производные по направлениям e_k ($k \in \mathbb{N}$) являются функциями *конечного* числа переменных. Точнее, если задана некоторая система $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ и последовательность неотрицательных функций $\varrho_k: \widehat{\Pi}_k \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, определяющих обобщенную дифференцируемую продакт-меру μ , то логарифмические производные меры μ имеют вид

$$\beta_j: x \in \mathbb{R}^\infty \mapsto \beta_j(x_{l(j)}, \dots, x_{r(j)}) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\partial}{\partial x_j} \ln \varrho_k(x_{m(k)}, \dots, x_{n(k)}), \quad (2)$$

где $l(j)$ – левый конец первого из множеств $\{N_k\}_{k=1}^\infty$, содержащих j , а $r(j)$ – правый конец последнего из таких множеств.

1.4. Содержание статьи. В данной работе условия, при которых функции $\{\varrho_k\}_{k=1}^\infty$ определяют обобщенную продакт-меру на $\mathbb{R}^\infty$, выводятся из условий, при которых функции $\{\beta_j\}_{j=1}^\infty$ являются логарифмическими производными некоторой меры на $\mathbb{R}^\infty$. Такие условия были исследованы в работах [4]–[9]. Применительно к функциям вида (2) их можно ослабить. Кроме того, некоторые дополнительные упрощения обусловлены тем, что в данной работе искомые меры задаются на $\mathbb{R}^\infty$, тогда как в [4]–[9] меры строились на гильбертовом пространстве.

Статья организована следующим образом. В § 2 мы установим критерий существования обобщенных продакт-мер и исследуем их дифференцируемость. В § 3 мы приведем

несколько примеров обобщенных продакт-мер. В частности, в § 3 показано, что класс обобщенных продакт-мер включает в себя смеси гауссовых мер, рассмотренные в [10]. В § 3 описано также применение обобщенных продакт-мер в статистической механике систем, состоящих из бесконечного числа частиц. (Мы имеем в виду применение обобщенных продакт-мер и в предельных теоремах для зависимых случайных величин, но об этом в данной статье речь идти не будет.) В § 4 описаны свойства обобщенных продакт-мер.

Для прояснения сути дела в данной статье за исключением п. 3.2 и п. 3.6 мы ограничиваемся случаем, когда каждое $n \in \mathbb{N}$ принадлежит не более чем двум множествам из совокупности $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. когда $\forall k \in \mathbb{N} \ n(k) < m(k+2)$. Обобщенные продакт-меры с более сложным зацеплением множеств $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ трактуются аналогично.

§ 2. Существование и дифференцируемость обобщенных продакт-мер

2.1. Вспомогательная теорема. Пусть заданы множества

$$\{N_k = [m(k), n(k)] \cap \mathbb{N}\}_{k=1}^{\infty}$$

и неотрицательные функции $\{\varrho_k : \widehat{\Pi}_k \mathbb{R}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что $\forall k \in \mathbb{N}$ на пространстве $\mathbb{R}^{n(k)}$ определена вероятностная мера μ_k с плотностью

$$x \in \mathbb{R}^{n(k)} \mapsto \prod_{j=1}^k \varrho_j(x_{m(j)}, \dots, x_{n(j)}).$$

Напомним, что $\forall j \in \mathbb{N} \ r(j) = \max\{n(k) : m(k) \leq j \leq n(k)\}$ – правый конец последнего из множеств $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, содержащих j . Обозначим $V^{2,1}(\mathbb{R}^n)$ пространство функций из $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, имеющих обобщенные производные класса $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ по каждой переменной. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\forall k \in \mathbb{N} \ \varrho_k \in V^{2,1}(\widehat{\Pi}_k \mathbb{R}^{\infty})$ и $\forall j \in \mathbb{N}$ существует ограниченное множество $U_j \subset \mathbb{R}^{r(j)}$, вне которого для любого $k \in \mathbb{N}$ такого, что $n(k) \geq j$, и для некоторых $q, v_1, \dots, v_j > 0$ выполняется неравенство

$$q \max_{i \leq j} v_i + \sum_{i=1}^j v_i \left[1 + x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{s=1}^k \ln \varrho_s(x) \right] < -A_j < 0. \quad (3)$$

Пусть, кроме того,

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}^{n(k)} \cap Q_j} \left| \sum_{i=1}^j v_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{s=1}^k \ln \varrho_s(x) \right| d\mu_k(x) < \infty, \quad (4)$$

где $Q_j = \{x \in \mathbb{R}^{\infty} : (x_1, \dots, x_{r(j)}) \in U_j \setminus B_j\}$ и B_j – некоторый шар с центром в начале координат.

Тогда $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}^{n(k)}} \left(\sum_{i=1}^j x_i^2 \right)^{q/2} d\mu_k(x) < \infty. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Разумеется, при каждом $k \in \mathbb{N}$ интеграл в левой части неравенства (4) ограничен. Условие (4) означает, что все такие интегралы ограничены в совокупности. Это условие выполняется, например, в случае, когда функции $\ln \varrho_k$ имеют производные, которые локально ограничены вне некоторого шара. Внутри этого шара функции $\ln \varrho_k$ могут иметь особенности. Условие (3) – это слабейшее из неравенств коэрцитивности для отображения

$$x \in \mathbb{R}^{r(j)} \mapsto \left\{ v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{s=1}^k \ln \varrho_k(x), \dots, v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{s=1}^k \ln \varrho_k(x) \right\} \in \mathbb{R}^j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для меры μ_k справедлива формула интегрирования по частям, из которой следует, что $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\forall f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^{n(k)})$

$$\int_{\mathbb{R}^{n(k)}} L_k f(x) d\mu_k(x) = 0, \quad (6)$$

где

$$L_k = \sum_{i=1}^{n(k)} v_i \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \beta_i^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad \text{и} \quad \beta_i^{(k)}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{s=1}^k \ln \varrho_s(x).$$

Фиксируем произвольное $j \in \mathbb{N}$ и положим $\|x\|_j^2 = \sum_{i=1}^j x_i^2$. Обозначим через r радиус шара B_j . Выберем некоторую неубывающую функцию $f \in C_{\text{loc}}^{(2)}(\mathbb{R})$ такую, что $f(x) = 0$ при $0 \leq x \leq r$ и $f(x) = x$ при $x > 3r/2$. Положим

$$V(x) = \frac{f(\|x\|_j^{q+2})}{1 + \alpha f(\|x\|_j^{q+2})}, \quad \tilde{U}_j = \{x \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, \dots, x_{r(j)}) \in U_j \cup (3B_j/2)\}.$$

Нетрудно проверить, что если $n(k) \geq j$, то

$$\begin{aligned} L_k V(x) &\leq \frac{(q+2)\|x\|_j^q f'(\|x\|_j^{q+2})}{(1 + \alpha f(\|x\|_j^{q+2}))^2} \left[q \max_{i \leq j} v_i + \sum_{i=1}^j v_i (1 + x_i \beta_i^{(k)}(x)) \right] \\ &\quad + \frac{(q+2)^2 \|x\|_j^{2q+2} f''(\|x\|_j^{q+2})}{(1 + \alpha f(\|x\|_j^{q+2}))^2} \max_{i \leq j} v_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Пользуясь (6), (7), (3) и (4), получаем, что

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}^{n(k)} \setminus U_j} \frac{\|x\|_j^q}{(1 + \alpha \|x\|_j^{q+2})^2} d\mu_k(x) < \infty.$$

Отсюда в силу леммы Фату следует (5). Теорема 1 доказана.

2.2. Существование обобщенных продакт-мер. Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \dots, n(k)$ обозначим через $\mu_{k,j}$ проекцию меры μ_k на пространство $\mathbb{R}^j$, состоящее из тех элементов пространства $\mathbb{R}^{n(k)}$, у которых все координаты с номерами больше j равны 0. Мы будем естественным образом отождествлять пространства $\mathbb{R}^n$ с подпространствами из $\mathbb{R}_0^\infty$. В этом смысле $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \ n_1 \leq n_2 \implies \mathbb{R}^{n_1} \subset \mathbb{R}^{n_2}$.

Из неравенства (5) следует, что $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}^j} \left(\sum_{i=1}^j x_i^2 \right)^{q/2} d\mu_{k,j}(x) < \infty.$$

Поэтому $\forall j \in \mathbb{N}$ семейство мер $\{\mu_{k,j} : k \in \mathbb{N}, n(k) \geq j\}$ относительно компактно в слабой топологии пространства мер на $\mathbb{R}^j$. Значит, последовательность $\mu_1, \mu_2, \dots$ содержит подпоследовательность различных мер, проекции которых на $\mathbb{R}^1$ слабо сходятся к некоторой вероятностной мере ν_1 на $\mathbb{R}^1$. Обозначим эту подпоследовательность через $\mu_{k(1,1)}, \mu_{k(2,1)}, \dots$. Из нее можно выбрать подпоследовательность различных мер, проекции которых на $\mathbb{R}^2$ слабо сходятся к некоторой вероятностной мере ν_2 на $\mathbb{R}^2$. Эту подпоследовательность мы обозначим через $\mu_{k(1,2)}, \mu_{k(2,2)}, \dots$. Продолжая такой процесс, мы получим бесконечную матрицу натуральных чисел $\{k(i,j)\}_{i,j=1}^\infty$ и последовательность мер $\nu_1, \nu_2, \dots$ на $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \dots$, причем

$$\nu_n = w - \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{k(i,n),n}. \quad (8)$$

На пространстве $\mathbb{R}_0^\infty$ определим функцию $\tilde{\mu}(\cdot) : \mathbb{R}_0^\infty \rightarrow \mathbb{C}$, положив $\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}_0^\infty$

$$\tilde{\mu}(q) := \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i \sum_{k=1}^n q_k x_k\right) d\nu_n(x). \quad (9)$$

Легко проверить, что при $m \geq n$ проекция меры ν_m на $\mathbb{R}^n$ равна ν_n . Поэтому $\tilde{\mu}(\cdot)$ не зависит от числа n , фигурирующего в правой части (9).

Поскольку пространство, алгебраически сопряженное к $\mathbb{R}_0^\infty$, отождествимо с $\mathbb{R}^\infty$, из теоремы Бохнера–Колмогорова [2, § IV.4.2] следует, что на $\mathbb{R}^\infty$ определена вероятностная мера μ , характеристический функционал которой равен $\tilde{\mu}(\cdot)$. Сопоставляя (9) с (1) и учитывая (8), мы видим, что μ есть обобщенная продакт-мера, ассоциированная с последовательностями $\{N'_j\}_{j=1}^\infty, \{\varrho'_j\}_{j=1}^\infty$, где $\forall j \in \mathbb{N}$

$$N'_j = \bigcup_{k=k_j}^{k_{j+1}} N_k, \quad \varrho'_j = \prod_{k=k_j}^{k_{j+1}} \varrho_k$$

и $k_j = k(j, j)$. Мы будем называть $\{N'_j\}_{j=1}^\infty, \{\varrho'_j\}_{j=1}^\infty$ модификацией $\{N_j\}_{j=1}^\infty, \{\varrho_j\}_{j=1}^\infty$. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. При условиях теоремы 1 существует модификация $\{N_j\}_{j=1}^\infty, \{\varrho_j\}_{j=1}^\infty$, определяющая обобщенную продакт-меру на $\mathbb{R}^\infty$.

2.3. Дифференцируемость обобщенных продакт-мер. Доказательство теоремы 2 показывает, что существует бесконечное множество модификаций $\{N_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\varrho_k\}_{k=1}^\infty$, определяющих обобщенные продакт-меры. В § 4 мы рассмотрим некоторые условия, при которых все такие меры совпадают, а здесь мы исследуем их дифференцируемость. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть семейства $\{N_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\varrho_k\}_{k=1}^\infty$ определяют обобщенную продакт-меру μ на $\mathbb{R}^\infty$, причем для некоторого $j \in \mathbb{N}$ и всех $k \in \mathbb{N}$ существуют обобщенные производные $\partial \varrho_k / \partial x_j \in L^1(\hat{\Pi}_k \mathbb{R}^\infty) \cap L^2(\hat{\Pi}_k \mathbb{R}^\infty)$ и справедливо неравенство

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}^{n(k)}} \beta_j^{(k)}(x)^2 d\mu_k(x) < \infty. \quad (10)$$

Тогда мера μ дифференцируема по направлению j -й координатной оси пространства $\mathbb{R}^\infty$, и ее логарифмическая производная β_j принадлежит $L^2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$ таковы, что $n(k) \geq m \geq j$. Для произвольной функции $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}^m)$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_{\mathbb{R}^{n(k)}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\mu_k = - \int_{\mathbb{R}^{n(k)}} \varphi \beta_j^{(k)} d\mu_k.$$

Поэтому существует положительное число Q такое, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\mu_{k,m} \right| \leq Q \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} \varphi^2 d\mu_{k,m} \right\}^{1/2}.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем, что линейный функционал

$$\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\mu$$

равномерно по m непрерывен в топологии пространства $L^2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$. Поэтому существует функция $\beta_j \in L^2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$ такая, что $\forall \varphi \in \bigcup_{m=j}^\infty C^{(1)}(\mathbb{R}^m)$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_{\mathbb{R}^\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\mu = - \int_{\mathbb{R}^\infty} \varphi \beta_j d\mu,$$

из которой, в свою очередь, следует утверждение теоремы.

2.4. Логарифмические производные обобщенных продакт-мер. Установим условия, при которых справедлива формула (2).

Пусть $f_1, f_2, \dots$ – последовательность неотрицательных функций из $L^1(\mathbb{R})$, причем $\forall k \in \mathbb{N} \|f_k\|_{L^1} = 1$. На пространстве $\mathbb{R}^\infty$ определим последовательность вероятностных мер $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots$, для которых при каждом $q \in \mathbb{R}_0^\infty$

$$\tilde{\mu}^{(k)}(q) = \int_{\mathbb{R}^\infty} \exp\left(i \sum_{s=1}^\infty q_s x_s\right) \prod_{s=1}^k \varrho_s(x) \prod_{s=1}^{r(k)} dx_s \prod_{s=r(k)+1}^\infty f_s(x_s) dx_s.$$

Иными словами, каждая мера $\mu^{(k)}$ есть произведение меры μ_k на $\mathbb{R}^{r(k)}$ и продакт-меры

$$d\lambda_k = \prod_{s=r(k)+1}^{\infty} f_s(x_s) dx_s.$$

Легко проверить, что последовательность мер $\{\mu^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится к μ . Поэтому, если выполняются условия теоремы 3, то $\forall m \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}^m)$

$$\int_{\mathbb{R}^{\infty}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{\infty}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\mu^{(n)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{\infty}} \varphi \beta_j d\mu^{(n)}.$$

Остается выяснить, при каких условиях

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{\infty}} \varphi \beta_j d\mu^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^{\infty}} \varphi \beta_j d\mu.$$

Это равенство справедливо, если, например, функция β_j непрерывна и ограничена. Другие условия рассматривались в [5]–[9]. В случае обобщенных продакт-мер эти условия упрощаются, и можно сформулировать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть семейства $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}, \{\varrho_k\}_{k=1}^{\infty}$ определяют обобщенную продакт-меру μ на $\mathbb{R}^{\infty}$, причем $\forall j, k \in \mathbb{N}$

- 1) $\varrho_k \in V^{2,1}(\hat{\Pi}_k \mathbb{R}^{\infty})$;
- 2) функции

$$\beta_j^{(k)}(x) = \sum_{s=1}^k \varrho_s(x)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho_s(x)$$

непрерывны почти всюду по мере Лебега на $\mathbb{R}^{r(j)}$;

- 3) справедливы неравенства (10).

Тогда мера μ дифференцируема по всем направлениям из $\mathbb{R}_0^{\infty}$, ее логарифмические производные принадлежат $L^2(\mathbb{R}^{\infty}, \mu)$ и определяются формулой (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3 требуется проверить лишь то, что для логарифмических производных β_j меры μ справедлива формула (2).

Фиксируем произвольное $j \in \mathbb{N}$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $n(k) \geq r(j)$. Проекция $\nu_{n(k)}$ меры μ на $\mathbb{R}^{n(k)}$ дифференцируема по всем направлениям из $\mathbb{R}^{n(k)}$ и, следовательно, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^{n(k)}$ [11]. Поэтому функция $\beta_j^{(k)}$ непрерывна $\nu_{n(k)}$ -почти всюду в $\mathbb{R}^{n(k)}$. В силу (10) $\forall \varphi \in C(\mathbb{R}^{n(k)})$ интегралы

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^{n(k)}} \varphi(x) \beta_j^{(k)}(x) d\mu_{s, n(k)}(x) \right\}_{s=n(k)}^{\infty}$$

равномерно абсолютно непрерывны. Используя теоремы 5.2 (iii) и 5.4 из [12], мы можем утверждать, что $\forall \varphi \in C(\mathbb{R}^{n(k)})$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n(k)}} \varphi \beta_j^{(k)} d\mu_{s, n(k)} = \int_{\mathbb{R}^{n(k)}} \varphi \beta_j^{(k)} d\nu_{n(k)}.$$

С учетом этого получаем, что $\forall \varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}^{n(k)})$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\infty} \varphi \beta_j d\mu &= - \int_{\mathbb{R}^\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\mu = - \int_{\mathbb{R}^{n(k)}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\nu_{n(k)} = - \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n(k)}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\mu_{s, n(k)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n(k)}} \varphi \beta_j^{(k)} d\mu_{s, n(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n(k)}} \varphi \beta_j^{(k)} d\nu_{n(k)} = \int_{\mathbb{R}^\infty} \varphi \beta_j^{(k)} d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\beta_j = \beta_j^{(k)}$. Теорема 4 доказана.

§ 3. Примеры

3.1. Стохастические ядра. Рассмотрим последовательность произвольных неотрицательных функций $\varrho_1(x_1), \varrho_2(x_1, x_2), \dots$, которые, начиная со второй, являются стохастическими ядрами, т.е. при $k \geq 2$

$$\int_{\mathbb{R}} \varrho_k(x_{k-1}, x_k) dx_k = 1.$$

Нетрудно проверить, что функции

$$D_1(x_1) = \varrho_1(x_1), \quad D_k(x_1, \dots, x_k) = \varrho(x_1) \prod_{j=2}^k \varrho_j(x_{j-1}, x_j)$$

образуют последовательность согласованных конечномерных распределений, т.е. $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_{k+n}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}) dx_{k+1} \cdots dx_{k+n} = D_k(x_1, \dots, x_k).$$

Следовательно, на $\mathbb{R}^\infty$ определена единственная вероятностная мера, проекции которой на пространства $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^k, \dots$ совпадают с функциями $D_1, D_2, \dots, D_k, \dots$. Очевидно, что эта мера является обобщенной продакт-мерой.

В п. 4.2 будет показано, что каждая обобщенная продакт-мера, определяемая последовательностью $\varrho_1(x_1), \varrho_2(x_1, x_2), \dots$, может быть задана с помощью последовательности стохастических ядер.

3.2. Смеси гауссовых мер. Описанный в п. 3.1 элементарный способ построения обобщенных продакт-мер может быть применен и при более сложных зацеплениях, когда последовательность функций имеет вид $\{\varrho_k(x_1, \dots, x_k)\}_{k=1}^\infty$ и

$$\int_{\mathbb{R}} \varrho_k(x_1, \dots, x_k) dx_k = 1. \quad (11)$$

Например, если $\varrho_1(x_1) = \pi^{-1}(1+x_1^2)^{-1}$ и $\forall k \geq 2$

$$\varrho_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{(1+x_1^2+\dots+x_{k-1}^2)^{k/2}}{(1+x_1^2+\dots+x_k^2)^{(k+1)/2}} \Big/ \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^{(k+1)/2}},$$

то соответствующая обобщенная продакт-мера является мерой Коши на $\mathbb{R}^\infty$. Она относится к классу смесей гауссовых мер, рассмотренному в [10]. Нетрудно проверить, что другие меры этого класса тоже являются обобщенными продакт-мерами, определяемыми функциями ϱ_k , для которых выполняется условие (11).

3.3. Пример. Рассмотрим последовательность функций

$$\varrho_k(x_k, x_{k+1}) = c_k [1 + \exp(x_k^2 + x_{k+1}^2)]^{-1}, \quad (12)$$

где $c_1, c_2, \dots$ – нормировочные множители.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$-4\|x\|_j^2 \leq \sum_{i=1}^j x_i \beta_i^{(k)}(x) \leq -\|x\|_j^2.$$

Следовательно, условия (3) и (4) теоремы 1 могут быть выполнены при любом $q \geq 1$ и $v_1 = v_2 = \dots = v_j$. Поэтому некоторая модификация последовательности функций (12) определяет обобщенную продукт-меру μ на $\mathbb{R}^\infty$. По теореме 4 эта мера дифференцируема вдоль всех направлений из $\mathbb{R}_0^\infty$. При этом логарифмические производные меры μ равны

$$\beta_1(x) = -2x_1 \frac{e^{x_1^2 + x_2^2}}{1 + e^{x_1^2 + x_2^2}}$$

и $\forall j \geq 2$

$$\beta_j(x) = -2x_j \left[\frac{e^{x_{j-1}^2 + x_j^2}}{1 + e^{x_{j-1}^2 + x_j^2}} + \frac{e^{x_j^2 + x_{j+1}^2}}{1 + e^{x_j^2 + x_{j+1}^2}} \right].$$

3.4. Пример. Рассмотрим функции

$$\varrho_k(x_k, x_{k+1}) = c_k (x_k^2 + x_{k+1}^2 + 1)^{-\gamma_k}, \quad (13)$$

где $c_1, c_2, \dots$ – нормировочные множители, а $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ удовлетворяют условиям

$$\gamma_{i+1} > \gamma_i, \quad \sup \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} < \infty, \quad 2\gamma_1^{-1} + \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_i^{-1} < 2. \quad (14)$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\forall j, k \in \mathbb{N}, j \geq 2, n(k) \geq j$,

$$\sum_{i=1}^j v_i x_i \beta_i^{(k)}(x) = -2 \sum_{i=2}^j \gamma_{i-1} \frac{v_{i-1} x_{i-1}^2 + v_i x_i^2}{1 + x_{i-1}^2 + x_i^2} - 2\gamma_j \frac{v_j x_j^2}{1 + x_j^2 + x_{j+1}^2}. \quad (15)$$

Положим $v_1 = \gamma_1^{-1}$ и при $i \geq 2$ $v_i = \gamma_{i-1}^{-1}$. Используя (15), получаем

$$\left| \sum_{i=1}^j v_i x_i \beta_i^{(k)}(x) \right| \leq 2 \left(1 + \sum_{i=2}^j \frac{\gamma_i}{\gamma_{i-1}} \right)$$

и

$$\sum_{i=1}^j v_i x_i \beta_i^{(k)}(x) \leq -2 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{z_i^2}{1 + z_i^2}, \quad (16)$$

где $z_i^2 = x_i^2 + x_{i+1}^2$. Легко проверить, что

$$\sum_{i=1}^{j-1} z_i^2 > r^2 \implies \sum_{i=1}^{j-1} \frac{z_i^2}{1 + z_i^2} \geq \frac{r^2}{1 + r^2}.$$

Отсюда и из (16) следует, что условия (3) и (4) теоремы 1 выполняются, если $q = 1$,

$$U_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^j : \sum_{i=1}^{j-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq d^2 \right\}$$

и d таково, что при $r > d$ справедливо неравенство

$$\frac{2r^2}{1 + r^2} > \sum_{i=1}^j \gamma_i^{-1}.$$

Из (14) вытекает, что это неравенство имеет решение.

Итак, условия (3) и (4) теоремы 1 выполнены. Поэтому некоторая модификация последовательности функций (13) определяет обобщенную продакт-меру на $\mathbb{R}^\infty$. По теореме 4 эта мера дифференцируема вдоль всех направлений из $\mathbb{R}_0^\infty$. При этом логарифмические производные меры μ равны

$$\beta_1(x) = -2x_1 \frac{\gamma_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

и $\forall j \geq 2$

$$\beta_j(x) = -2x_j \left(\frac{\gamma_{j-1}}{1 + x_{j-1}^2 + x_j^2} + \frac{\gamma_j}{1 + x_j^2 + x_{j+1}^2} \right).$$

3.5. Пример. Рассмотрим функции

$$\varrho_k(x) = |x_k|^{b_k} \varrho_k^{(0)}(x), \quad (17)$$

где функции $\varrho_k^{(0)}(\cdot)$ определены с помощью (12) и $b_1, b_2, \dots$ — неотрицательные числа. В данном случае

$$-4\|x\|_j^2 + \sum_{i=1}^j v_i b_i \leq \sum_{i=1}^j v_i x_i \beta_i^{(k)}(x) \leq -\|x\|_j^2 + \sum_{i=1}^j v_i b_i.$$

Следовательно, доказательство существования обобщенной продакт-меры, порождаемой функциями (17), можно выполнить так же, как и в п. 3.3. Заметим, что если $\forall m \in \mathbb{N} \exists i \in \mathbb{N}, i > m$ такое, что $b_i > 0$, то эта мера не является абсолютно непрерывной относительно меры μ , описанной в п. 3.3, поскольку $\prod_{i=1}^\infty |x_i|^{b_i}$ расходится μ -почти всюду.

3.6. Меры Гиббса. Обобщенные произведение-меры неявно фигурируют в качестве основных объектов в статистической механике систем, состоящих из бесконечного числа частиц. Простейшим примером такой системы является одномерная цепочка атомов. Ее энергия имеет вид

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} V_{ij}(x_i - x_j), \quad (18)$$

где Φ_i – потенциалы взаимодействия атомов с внешними полями и V_{ij} – потенциалы взаимодействия атомов между собой. Если силы взаимодействия атомов обращаются в 0 при расстоянии между атомами, большем некоторого фиксированного числа, то лишь конечное число членов ряда $\sum_{j=i+1}^{\infty} V_{ij}(x_i - x_j)$ отлично от 0, и мы можем представить (18) в виде

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{i+n} V_{ij}(x_i - x_j).$$

Согласно постулату Гиббса вероятностное распределение координат $(x_1, \dots, x_N)$ цепочки из *конечного* числа атомов имеет плотность

$$d_N(x_1, \dots, x_N) = c_N \exp \left\{ -\alpha \left[\sum_{i=1}^N \Phi_i(x_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N \wedge (i+n)} V_{ij}(x_i - x_j) \right] \right\}.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ и $N > k$ определим

$$d_{N,k}(x_1, \dots, x_N) = \int d_N(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N) dx_{k+1} \cdots dx_N.$$

Основной задачей статистической механики является выяснение условий, при которых $\forall k \in \mathbb{N}$ на $\mathbb{R}^k$ существует вероятностная мера μ_k , плотность которой относительно меры Лебега есть функция $D_k(x_1, \dots, x_k)$, для которой в том или ином смысле

$$D_k(x_1, \dots, x_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} d_{N,k}(x_1, \dots, x_k).$$

Очевидно, что меры $\mu_1, \mu_2, \dots$ являются проекциями обобщенной произведение-меры, ассоциированной с семейством функций

$$\varrho_k(x) = c_k \exp \left\{ -\alpha \Phi_k(x_k) - \alpha \sum_{j=k+1}^{k+n} V_{kj}(x_k - x_j) \right\}. \quad (19)$$

В случае, когда применимо приближение “взаимодействия ближайших соседей”,

$$\varrho_k(x) = c_k \exp \left\{ -\alpha \Phi_k(x_k) - \alpha V_k(x_k - x_{k+1}) \right\}. \quad (20)$$

При $\Phi_k = 0$ можно ввести новые координаты $y_2 = x_2 - x_1, y_3 = x_3 - x_2, \dots$ и с помощью функций $\varrho_k(y) = c_k \exp \{-\alpha V_k(y_k)\}$ определить на пространстве последовательностей $(y_2, y_3, \dots)$ произведение-меру, характеризующую вероятностное распределение расстояний между соседними атомами цепочки.

Если не все потенциалы Φ_k равны 0, то положив $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1, y_3 = x_3 - x_2, \dots$, можно строить на $\mathbb{R}^\infty$ обобщенную продакт-меру, ассоциированную с функциями

$$\varrho_k(y) = c_k \exp\{-\alpha \Phi_k(y_1 + \dots + y_k) - \alpha V_k(y_k)\}.$$

Другой подход состоит в том, чтобы строить обобщенную продакт-меру непосредственно с помощью функций (20). Преимуществом такого подхода является то, что функции (20) имеют более простое зацепление.

Заметим, что вопрос о единственности обобщенной продакт-меры, ассоциированной с заданным семейством функций типа (19) или (20), эквивалентен весьма важному вопросу о существовании фазовых переходов в соответствующей системе частиц.

§ 4. Некоторые свойства обобщенных продакт-мер

4.1. Структура конечномерных проекций. Пусть μ – обобщенная продакт-мера на $\mathbb{R}^\infty$, определяемая последовательностью функций $\{\varrho_k(x_k, x_{k+1})\}_{k=1}^\infty$. Обозначим $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ последовательность натуральных чисел такую, что $\forall n \in \mathbb{N}, f \in C(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{k_j+1}} f(x_1, \dots, x_n) \varrho_1(x_1, x_2) \cdots \varrho_{k_j}(x_{k_j}, x_{k_j+1}) dx_1 \cdots dx_{k_j+1} \\ = \int_{\mathbb{R}^\infty} f(x_1, \dots, x_n) d\mu(x). \end{aligned} \quad (21)$$

Положим $\forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n$,

$$F_{n,m}(x) = \int_{\mathbb{R}^{m-n+1}} \varrho_n(x, x_{n+1}) \cdots \varrho_m(x_m, x_{m+1}) dx_{n+1} \cdots dx_{m+1}.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия:

- 1) мера μ на $\mathbb{R}^\infty$ определяется равенствами (21);
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}$ и всех достаточно больших $m \in \mathbb{N}$ $F_{n,m}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$;
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}$ и $p = 1, 2$ функция

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_1^p(x_1, x_2) \cdots \varrho_n^p(x_n, x) dx_1 \cdots dx_n$$

непрерывна, ограничена и при $p = 1$ принадлежит $L^2(\mathbb{R})$;

- 4) $\forall n \in \mathbb{N}$ функция

$$g_n(\cdot) = \left[\int_{\mathbb{R}} \varrho_n(x_n, \cdot)^2 dx_n \right]^{1/2}$$

непрерывна и ограничена;

- 5) $\forall n \in \mathbb{N}$ существует положительное число q такое, что

$$\sup_m \left\{ \int_{\mathbb{R}} |x|^q F_{n,m}(x) dx \middle/ \int_{\mathbb{R}} F_{n,m}(x) dx \right\} < \infty. \quad (22)$$

Тогда

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}$ проекция меры μ на $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^n$ и соответствующая плотность имеет вид

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = \varrho_1(x_1, x_2) \cdots \varrho_{n-1}(x_{n-1}, x_n) F_n(x_n); \quad (23)$$

- 2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $F_n(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$;

- 3) $\forall n \in \mathbb{N}$ последовательность $\{F_{n,m}\}_{m=n}^\infty$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к F_n в $L^2(\mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично тому, как была доказана теорема 1, можно показать, что неравенство (22) вытекает из следующего условия: $\forall k \in \mathbb{N}$ $\varrho_k \in V^{2,1}(\hat{\Pi}_k \mathbb{R}^\infty)$ и существует ограниченное множество $U_k \subset \hat{\Pi}_k \mathbb{R}^\infty$, вне которого справедливо неравенство

$$q + 1 + x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \ln \varrho_k(x_k, x_{k+1}) < -A_k < 0$$

и, кроме того,

$$\sup_m \int_{W_{k,m}} \left| x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \ln \varrho_k(x_k, x_{k+1}) \right| d\nu_{k,m}(x) < \infty,$$

где $W_{k,m} = \{(x_k, \dots, x_{k+m+1}) : (x_k, x_{k+1}) \in U_k \setminus B_k\}$, B_k – некоторый шар с центром в начале координат и $\nu_{k,m}$ – вероятностная мера с плотностью

$$d_{k,m}(x_k, \dots, x_{k+m+1}) = c_{k,m} \varrho_k(x_k, x_{k+1}) \cdots \varrho_{k+m}(x_{k+m}, x_{k+m+1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Рассмотрим последовательность вероятностных мер на $\mathbb{R}$ с плотностями $c_{1,k_j} F_{1,k_j}(x)$, где индексы $j \in \mathbb{N}$ таковы, что $k_j > 1$. Из условия (22) следует, что эти меры образуют относительно компактное множество. Следовательно, из указанной последовательности можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой вероятностной мере ν_1 на $\mathbb{R}$. Обозначим через J_1 множество индексов j , соответствующих этой сходящейся подпоследовательности, и $j(1, 1)$, $j(1, 2)$, $j(1, 3), \dots$ – элементы из J_1 . Затем рассмотрим последовательность вероятностных мер на $\mathbb{R}$ с плотностями $c_{2,k_j} F_{2,k_j}(x)$ с индексами $j \in J_1$ такими, что $k_j > 2$. В силу (22) из нее можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой вероятностной мере ν_2 на $\mathbb{R}$. Пусть $J_2 \subset J_1$ – множество индексов j , соответствующих этой подпоследовательности, и $j(2, 1)$, $j(2, 2), \dots$ – элементы из J_2 . Продолжая этот процесс, мы получим бесконечную матрицу целых чисел $\{j(n, i)\}$. Обозначим $k(n, i) = k_{j(n, i)}$.

Имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{k(n, i)+1}} \varrho_1(x_1, x_2) \cdots \varrho_{k(n, i)}(x_{k(n, i)}, x_{k(n, i)+1}) dx_1 \cdots dx_{k(n, i)+1} = 1$$

и $\forall n \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} c_{n, k(n, i)} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_1(x_1, x_2) \cdots \varrho_{n-1}(x_{n-1}, x_n) F_{n, k(n, i)}(x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} c_{n, k(n, i)} \int_{\mathbb{R}^{k(n, i)+1}} \prod_{s=1}^{k(n, i)+1} \varrho_{s-1}(x_{s-1}, x_s) dx_s, \end{aligned}$$

где $\varrho_0(\cdot, \cdot) = 1$. Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N}$ существует

$$c_n = \lim_{i \rightarrow \infty} c_{n,k(n,i)} > 0.$$

Докажем теперь, что $\forall n \in \mathbb{N}$ проекция μ_n меры μ на пространство $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Пусть $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\begin{aligned} c_{n+1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu_n(x) \right| &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} c_{n+1,k(n+1,i)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(x_1, \dots, x_n)| F_{n+1,k(n+1,i)}(x_{n+1}) \\ &\quad \times \prod_{s=1}^{n+1} \varrho_{s-1}(x_{s-1}, x_s) dx_s \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lim_{i \rightarrow \infty} c_{n+1,k(n+1,i)} \int_{\mathbb{R}} F_{n+1,k(n+1,i)}(x) h(x) dx, \end{aligned}$$

где

$$h(x) = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_1(x_1, x_2)^2 \cdots \varrho_n(x_n, x)^2 dx_1 \cdots dx_n \right]^{1/2}.$$

Поэтому

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu_n \right| \leq O(1) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

откуда следует, что мера μ_n абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.

Пусть $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_n(x) \right| &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} c_{n,k(n+1,i)} \int_{\mathbb{R}^{k(n+1,i)-n+2}} |f(x_n)| \\ &\quad \times \prod_{s=n}^{n+k(n+1,i)} \varrho_s(x_s, x_{s+1}) dx_s dx_{n+k(n+1,i)+1} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \frac{c_n}{c_{n+1}} \lim_{i \rightarrow \infty} c_{n+1,k(n+1,i)} \int_{\mathbb{R}} g_n(x_{n+1}) F_{n+1,k(n+1,i)}(x_{n+1}) dx_{n+1}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что $\{k(n+1, i)\}_{i=1}^{\infty}$ есть подпоследовательность последовательности $\{k(n, i)\}_{i=1}^{\infty}$. Поэтому

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_n(x) \right| \leq O(1) \|f\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

откуда следует, что $\forall n \in \mathbb{N}$ мера ν_n абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.

Пусть F_n – плотность меры ν_n , деленная на c_n . По построению $F_n \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

Докажем теперь третье утверждение теоремы.

Пусть $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) F_n(x) dx &= \frac{1}{c_n} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_n(x) = \frac{1}{c_n} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) F_{n,m(n,i)}(x) dx \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) F_{n,m(n,i)}(x) dx. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}} F_{n,k(n+1,i)}(x)^2 dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}} g_n(x) F_{n+1,k(n+1,i)}(x) dx \right]^2,$$

откуда следует, что L^2 -нормы членов последовательности $\{F_{n,k(n+1,i)}\}_{i=1}^{\infty}$ ограничены в совокупности. Таким образом, эта последовательность сходится к $F_n(x)$ слабо в $L^2(\mathbb{R})$ [13, теорема V.1.3]. Утверждение 3) доказано.

Теперь докажем формулу (23). Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Для любой $f \in C(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu_n &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) F_{n,k(n+1,i)}(x_n) \prod_{s=1}^n \varrho_{s-1}(x_{s-1}, x_s) dx_s \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) F_n(x_n) \prod_{s=1}^n \varrho_{s-1}(x_{s-1}, x_s) dx_s, \end{aligned}$$

так как функция

$$x_n \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) \prod_{s=1}^{n-1} \varrho_s(x_s, x_{s+1}) dx_s$$

принадлежит $L^2(\mathbb{R})$. Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорему 5 можно применять, начиная с некоторого номера n . При меньших номерах представление (23) получается последовательным интегрированием с учетом того, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$F_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \varrho_n(x, y) F_{n+1}(y) dy. \quad (24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналоги теоремы 5 справедливы для обобщенных продакт-мер, определяемых функциями ϱ_k с более сложными зацеплениями, чем в (21).

4.2. Построение обобщенных продакт-мер с помощью стохастических ядер. Рассмотрим сначала случай, когда $\forall n \in \mathbb{N}$ функция $F_n(x)$, фигурирующая в (23), положительна. Введем функции

$$\tilde{\varrho}_1(x_1) = F_1(x), \quad \tilde{\varrho}_k(x_{k-1}, x_k) = F_{k-1}(x_{k-1})^{-1} \varrho_{k-1}(x_{k-1}, x_k) F_k(x_k). \quad (25)$$

Тогда в силу (24) при $k \geq 2$

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varrho}_k(x_{k-1}, x_k) dx_k = 1, \quad (26)$$

т.е. функции $\tilde{\varrho}_k$ – стохастические ядра. Плотности (23) можно представить в виде

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = \tilde{\varrho}_1(x_1) \tilde{\varrho}_2(x_1, x_2) \cdots \tilde{\varrho}_n(x_{n-1}, x_n), \quad (27)$$

как в примере 3.1.

Допустим теперь, что в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ $F_n(x_0) = 0$. Из (24) следует, что тогда для почти всех y $\varrho_n(x_0, y) F_{n+1}(y) = 0$. Если функция $\varrho_n(\cdot, \cdot)$ положительна, это невозможно. Следовательно, если обобщенная продакт-мера определяется положительными функциями (ϱ_k) , то эта мера может быть задана с помощью стохастических ядер (25).

Если функции (F_n) могут обращаться в 0, то мы сохраним определения (25) при $F_{k-1}(x_{k-1}) > 0$ и положим $\tilde{\varrho}_k(x_{k-1}, x_k) = 0$ при $F_{k-1}(x_{k-1}) = 0$. Тогда представление (27) будет по-прежнему справедливо, но условие (26) примет вид

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varrho}_k(x_{k-1}, x_k) dx_k = 1 \quad \text{при} \quad \tilde{\varrho}_{k-1}(x_{k-2}, x_{k-1}) > 0, \quad k \geq 2.$$

4.3. О единственности обобщенной продакт-меры. Рассмотрим пример использования теоремы 5 для доказательства единственности обобщенной продакт-меры, определяемой последовательностью $\{\varrho_k(x_k, x_{k+1})\}_{k=1}^{\infty}$. В случае, когда $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\varrho_k(x_k, x_{k+1}) = \varrho(x_k, x_{k+1}), \quad (28)$$

равенство (24) принимает вид

$$F_n(\cdot) = P F_{n+1}(\cdot), \quad (29)$$

где P – интегральный оператор с ядром $\varrho(\cdot, \cdot)$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функции (28) удовлетворяют условиям теоремы 5, оператор (29) непрерывен в $L^2(\mathbb{R})$, имеет изолированное простое собственное значение 1 и остальной его спектр принадлежит $[-r, r]$, где $r < 1$. Тогда существует не более одной вероятностной меры на $\mathbb{R}^{\infty}$, определяемой последовательностью функций (28).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ последовательность $\{P^k f\}_{k=1}^{\infty}$ сходится либо к нулю, либо к собственному вектору оператора P , соответствующему собственному значению 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ произвольно, а $m \in \mathbb{N}$ таково, что $F_{n,m} \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда по теореме 5 некоторая подпоследовательность последовательности $\{P^k F_{n,m}\}_{k=1}^{\infty}$ слабо в $L^2(\mathbb{R})$ сходится к F_n . Следовательно, F_n – собственная функция оператора P . Поэтому все обобщенные продакт-меры, определяемые различными модификациями последовательности (28), имеют одни и те же конечномерные проекции (23), т.е. совпадают. Теорема 6 доказана.

Для функций (12) можно принять

$$\varrho(x, y) = c[1 + \exp(x^2 + y^2)]^{-1}. \quad (30)$$

Соответственно, P – симметричный, вполне непрерывный оператор с неразложимым ядром. Поэтому P имеет единственное так называемое позитивное собственное значение [14]. Обозначим его через Λ . Для любого другого собственного значения λ справедливо неравенство $\lambda < \Lambda$. Полагая в (30) $c = \Lambda^{-1}$, нетрудно проверить, что для соответствующих функций (28) выполняются условия теоремы 6. Поэтому обобщенная продакт-мера, описанная в п. 3.3, является единственной, определяемой функциями (12). Аналогично можно проверить, что мера, определяемая функциями (17) при одинаковых b_k , единственна.

4.4. Марковская единственность. Пусть $X^* \subset H \subset X$ – оснащение вещественного сепарабельного гильбертова пространства H локально выпуклыми топологическими векторными пространствами X^* и X , причем X^* – пространство, топологически сопряженное к X относительно формы двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle: X^* \times X \rightarrow \mathbb{R}$, сужение которой на $X^* \times H$ совпадает со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$ в H . Для некоторого пространства $K \subset X^*$, всюду плотного в H , определим пространство цилиндрических функций

$$C_{\text{cyl}}^{\infty} = \{f(l_1, \dots, l_m) : m \in \mathbb{N}, f \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^m), l_1, \dots, l_m \in K\}.$$

Рассмотрим билинейную форму

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_X (\nabla_H u, \nabla_H v)_H d\mu, \quad u, v \in C_{\text{cyl}}^{\infty}, \quad (31)$$

где $\forall x \in X \nabla_H u(x)$ – такой элемент пространства H , что $\forall l \in K$

$$\langle l, \nabla_H u(x) \rangle = (l, \nabla_H u(x))_H = \frac{\partial u}{\partial l}(x).$$

Допустим, что μ дифференцируема по всем направлениям $l \in K$, причем $\beta_l \in L^2(X, \mu)$. Тогда форма (31) имеет замкнутое расширение $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$, являющееся формой Дирихле (см., например, [8] и цитированную там литературу). Генератор формы $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ обозначим $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$. Нетрудно проверить, что если K содержит ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots$ пространства H , то $\forall u \in C_{\text{cyl}}^\infty$

$$\mathcal{L}u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial e_n} \left(\frac{\partial u}{\partial e_n} \right) + \beta_{e_n} \frac{\partial u}{\partial e_n} \right).$$

Правая часть этого равенства содержит только конечное число членов и определяет на C_{cyl}^∞ линейный оператор L . Будем говорить, что $(L, C_{\text{cyl}}^\infty)$ обладает свойством *марковской единственности*, если $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ – единственный оператор Дирихле, являющийся расширением $(L, C_{\text{cyl}}^\infty)$. Это свойство представляет большой интерес, поскольку из него следует единственность решения мартингальной проблемы для L [15].

Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}(X)$ – наименьшее σ -кольцо, относительно которого измеримы все функции $\langle e_j, \cdot \rangle$ с $j = 1, \dots, n$ и $E_\mu(\cdot | \mathcal{B}_n)$ – условное математическое ожидание относительно $\mathcal{B}_n$. В [15] доказано, что если

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^n \|\beta_{e_j} - E_\mu(\beta_{e_j} | \mathcal{B}_n)\|_{L^2(X, \mu)}^2 < \infty, \quad (32)$$

то оператор $(L, C_{\text{cyl}}^\infty)$ обладает свойством марковской единственности. Для произдукт-мер $\beta_{e_j} = E_\mu(\beta_{e_j} | \mathcal{B}_n)$, поэтому оператор L обладает свойством марковской единственности при любом выборе пространства H , оснащенного $\mathbb{R}_0^\infty$ и $\mathbb{R}^\infty$.

Если μ – обобщенная произдукт-мера, то условие (32) упрощается. Предположим, что μ дифференцируема по всем направлениям из $K = \mathbb{R}_0^\infty = X^*$ и $\forall f \in \mathbb{R}_0^\infty \beta_f \in L^2(\mathbb{R}^\infty, \mu)$. Возьмем в качестве $e_1, e_2, \dots$ канонический базис пространства $\mathbb{R}^\infty$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ β_{e_j} зависит лишь от конечного числа переменных. Например, если, как в § 3, $\beta_{e_j}(x) = \beta_{e_j}(x_1, \dots, x_{j+1})$, то

$$\sum_{j=1}^n \|\beta_{e_j} - E_\mu(\beta_{e_j} | \mathcal{B}_n)\|_{L^2(X, \mu)}^2 = \|\beta_{e_n} - E_\mu(\beta_{e_n} | \mathcal{B}_n)\|_{L^2(X, \mu)}^2$$

и вместо (32) получаем

$$\sup_n \|\beta_{e_n} - E_\mu(\beta_{e_n} | \mathcal{B}_n)\|_{L^2(X, \mu)}^2 < \infty.$$

Поскольку

$$\|\beta_{e_n} - E_\mu(\beta_{e_n} | \mathcal{B}_n)\|_{L^2(X, \mu)}^2 \leq 4\|\beta_{e_n}\|_{L^2(X, \mu)}^2,$$

всегда можно найти гильбертово пространство H такое, что $\mathbb{R}_0^\infty$ и $\mathbb{R}^\infty$ оснащают H и соответствующий оператор L обладает свойством марковской единственности.

Для обобщенной продакт-меры, рассмотренной в п. 3.3,

$$\|\beta_{e_n} - E_\mu(\beta_{e_n}|\mathcal{B}_n)\|_{L^2(X,\mu)}^2 \leq C\|x_n\|_{L^2(X,\mu)}^2.$$

Применяя к функции $v(x) = x_n^4/(1 + \alpha x_n^4)$ те же преобразования, что и при доказательстве теоремы 1, нетрудно проверить, что для любой обобщенной продакт-меры, ассоциированной с функциями (12), $\sup_n \|x_n\|_{L^2(X,\mu)}^2 < \infty$. Следовательно, для каждой такой меры оператор L обладает свойством марковской единственности при $H = \ell^2$.

Для обобщенной продакт-меры, рассмотренной в п. 3.4, $|\beta_{e_n}| \leq 4\gamma_{n+1}$. Поэтому оператор L будет обладать свойством марковской единственности, если в качестве H взять гильбертово пространство $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum \gamma_{n+1}^2 x_n^2 < \infty\}$.

В случае, рассмотренном в п. 3.5, $\beta_{e_n}(x) = b_n/x_n + \tilde{\beta}_{e_n}(x)$, где $\tilde{\beta}_{e_n}$ обозначает логарифмическую производную меры из п. 3.3. Поскольку

$$\|\beta_{e_n} - E_\mu(\beta_{e_n}|\mathcal{B}_n)\|_{L^2(X,\mu)}^2 = \|\tilde{\beta}_{e_n} - E_\mu(\tilde{\beta}_{e_n}|\mathcal{B}_n)\|_{L^2(X,\mu)}^2,$$

мы можем утверждать, что оператор L , ассоциированный с обобщенной продакт-мерой из п. 3.5, обладает свойством марковской единственности при $H = \ell^2$.

В заключение автор выражает свою глубокую благодарность О. В. Зиминной за постоянное внимание, помощь и поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
- [2] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
- [3] Богачёв В. И., Смолянов О. Г. Аналитические свойства бесконечномерных распределений // УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 3–83.
- [4] Кириллов А. И. О двух математических проблемах канонического квантования. III. Стохастическая механика вакуума // ТМФ. 1992. Т. 91. № 3. С. 377–395.
- [5] Кириллов А. И. О двух математических проблемах канонического квантования. IV // ТМФ. 1992. Т. 93. № 2. С. 249–263.
- [6] Кириллов А. И. О задании мер на функциональных пространствах с помощью числовых плотностей и континуальных интегралов // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 5. С. 152–155.
- [7] Кириллов А. И. Броуновское движение со сносом в гильбертовом пространстве и его применение в теории интегрирования // Теория вероятн. и ее применения. 1993. Т. 38. № 3. С. 629–634.
- [8] Кириллов А. И. Бесконечномерный анализ и квантовая теория как исчисления семимартингалов // УМН. 1994. Т. 49. № 3. С. 43–92.
- [9] Кириллов А. И. Овосстановлении мер по их логарифмическим производным // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 1. С. 121–138.
- [10] Норин Н. В., Смолянов О. Г. Несколько результатов о логарифмических производных мер на локально выпуклом пространстве // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 135–138.
- [11] Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры // Тр. ММО. 1971. Т. 24. № 133–174.
- [12] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [13] Йосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
- [14] Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
- [15] Albeverio S., Röckner M., Zhang T. S. Markov uniqueness for a class of infinite-dimensional Dirichlet operators. Preprint SISSA № 223/92/FM, 1992.