Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Колесников, Некоторые замечания о дескриптивно-метрических характеристиках особых множеств аналитических функций, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 56–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1247>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:14:03

УДК 517.514.72

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ДЕСКРИПТИВНО-МЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ОСОБЫХ МНОЖЕСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. В. Колесников

Настоящая работа содержит два замечания о строении особых граничных множеств функций, аналитических в единичном круге $D: |z| < 1$. Первое замечание касается вопроса об обращении теоремы Плеснера. Доказано, что для того чтобы три попарно не пересекающихся множества E_1, E_2 и $E_3, \bigcup_{i=1}^3 E_i = \Gamma$, единичной окружности $\Gamma: |z| = 1$, были соответственно множествами всех точек Плеснера $-I(f)$, всех точек Фату $-F(f)$ и множеством всех исключительных граничных точек $-E(f)$ для некоторой голоморфной в D функции f , необходимо и достаточно, чтобы E_1 имело тип G_δ , а E_3 имело тип $G_{\delta\sigma}$ и линейную меру нуль. Во второй части работы показывается, что для любого подмножества E единичной окружности Γ , имеющего нулевую логарифмическую емкость и тип $G_{\delta\sigma}$ на Γ , существует однолиственная в D функция, у которой угловые пределы не существуют в точках множества E и существуют в остальных точках окружности Γ .

Библиография: 10 названий.

Настоящая работа содержит два замечания о строении множеств граничных особых точек функций, аналитических в единичном круге $D: |z| < 1$. Первое замечание касается обращения теоремы Плеснера об особых граничных точках функций, мероморфных в D . Во второй части работы показывается, что для любого подмножества E единичной окружности Γ , типа G_δ и нулевой логарифмической емкости, существует однолиственная в D функция, не имеющая угловых пределов на E и имеющая их в остальных точках окружности Γ .

1. Пусть $f(z)$ – функция, определенная в круге D ; Γ – единичная окружность $|z| = 1$; $\zeta \in \Gamma$. *Радиальным пределом* функции $f(z)$ в ζ называется предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} f(r\zeta).$$

Говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке ζ *угловой предел*, если $f(z)$ имеет предел при $z \rightarrow \zeta$ по любому углу с вершиной в ζ , образованному хордами круга D .

В 1906 году П. Фату [1] доказал, что если $f(z)$ ограничена и аналитична в круге D , то она почти всюду на окружности Γ имеет радиальные пределы, а следовательно, по теореме Линделефа $f(z)$ имеет почти всюду и угловые пределы. Н. Н. Лузин в [2] показал, что этот результат Фату является точным: для любого множества $E \subset \Gamma$ существует ограниченная аналитическая функция, не имеющая угловых пределов в точках множества E .

Точки $\zeta \in \Gamma$, в которых функция $f(z)$ имеет угловые пределы, называются *точками Фату*. Множество всех точек Фату функции $f(z)$ будем обозначать через $F(f)$. *Точками Плеснера* функции f называются такие точки ζ , в которых предельное множество

по любому углу с вершиной в ζ совпадает с расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$. Множество всех точек Плеснера функции f обозначим через $I(f)$.

И. И. Плеснером [3] было показано, что для любой мероморфной в D функции f почти каждая точка окружности Γ является или точкой Фату, или точкой Плеснера. Таким образом, окружность Γ представляется в виде объединения множества Плеснера $I(f)$, множества Фату $F(f)$ и некоторого исключительного множества $E(f)$, имеющего линейную лебегову меру нуль. Заметим, что если $f(z)$ ограничена в D , то $E(f)$ является множеством всех точек, в которых f не имеет угловых пределов.

Известно, что множество $F(f)$ имеет тип $F_{\sigma\delta}$ на окружности Γ . В 1970 году П. Лаппаном [4] было доказано, что для мероморфных функций множество Плеснера имеет тип G_δ и что для любого множества E типа G_δ существует голоморфная функция $f(z)$, для которой $E = I(f)$. Отсюда, в частности, следует, что множество $E(f)$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$. В примере Лаппана точки множества $\Gamma \setminus I(f)$, вообще говоря, могут быть как точками Фату, так и точками из $E(f)$.

Рядом авторов рассматривался вопрос о совместной характеристике всех трех множеств. В частности, А. Н. Канатниковым [5] было показано, что для любых трех попарно не пересекающихся множеств E_1, E_2 и E_3 , $\bigcup_{i=1}^3 E_i = \Gamma$, таких, что E_1 имеет тип G_δ , а E_3 – тип F_σ и линейную меру нуль, существует мероморфная в круге D функция f такая, что $E_1 = I(f)$, $E_2 = F(f)$ и $E_3 = E(f)$. При этом для доказательства им применялся следующий результат Ловатера и Пираяна: для любого множества $E \subset \Gamma$, имеющего нулевую линейную меру и тип F_σ , существует аналитическая и ограниченная в круге D функция $f(z)$ такая, что $E = E(f)$ [6].

Используя полученную автором (см. [7]) полную характеристику множеств $E(f)$ для функций f , аналитических и ограниченных в круге, методом, аналогичным используемому в [5], легко дать полную совместную характеристику множеств $I(f)$, $F(f)$ и $E(f)$ для голоморфных в D функций. Как следствие, отсюда получается полная характеристика множеств всех точек, в которых голоморфные в круге D функции не имеют конечных угловых пределов.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы три попарно не пересекающихся множества E_1, E_2 и E_3 , $\bigcup_{i=1}^3 E_i = \Gamma$, были соответственно множествами $I(f)$, $F(f)$ и $E(f)$ для некоторой голоморфной в D функции f , необходимо и достаточно, чтобы E_1 имело тип G_δ , а E_3 имело тип $G_{\delta\sigma}$ и линейную меру нуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [7] при доказательстве теоремы 3 показывается, что любое множество типа G_δ на Γ является множеством Плеснера некоторой голоморфной в D функции, причем функцию можно выбрать так, что все точки, не принадлежащие этому множеству, будут точками Фату.

Пусть f_1 – такая функция для множества E_1 .

По теореме 1 из [8] для множества E_3 найдется ограниченная голоморфная в D функция f_3 , не имеющая на E_3 угловых пределов и имеющая их в каждой точке множества $\Gamma \setminus E_3$. Положим $f(z) = f_1(z) + f_3(z)$.

В точках $\zeta \in E_1$ по любому углу V с вершиной ζ , образованному хордами круга D , предельное множество функции f_1 есть расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, а предельное множество функции f_3 состоит из одной точки. Очевидно, предельное множество функции f в точке ζ по углу V есть $\overline{\mathbb{C}}$. Таким образом, все точки $\zeta \in E_1$ являются точками Плеснера. Если $\zeta \in E_3$, то функция f_1 имеет в ζ конечный предел по углу V , а f_3 не имеет предела. Поэтому функция f также не имеет угловых пределов в точках $\zeta \in E_3$. Поскольку f_3 ограничена, то угловое предельное множество функции f не может быть плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$. Таким образом, E_3 состоит из исключительных особых точек

функции f .

Наконец, все точки множества E_2 являются точками Фату функции f , поскольку таковыми они являются для обеих функций f_1 и f_3 .

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для того чтобы множество $E \subset \Gamma$ являлось множеством всех точек, в которых нет конечных угловых пределов у некоторой голоморфной в D функции, необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в виде объединения двух множеств – множества типа G_δ и множества типа $G_{\delta\sigma}$ линейной меры нуль.

2. Пусть E – некоторое ограниченное борелевское множество на комплексной плоскости; μ – положительная борелевская мера на E . *Логарифмическим потенциалом* $U_\mu(z)$ будем называть интеграл

$$U_\mu(z) = \int_E \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\mu(\zeta).$$

Логарифмической емкостью множества E называется величина

$$\text{Cap } E = \sup \mu(E),$$

где супремум берется по всем положительным борелевским мерам, сосредоточенным на E , для которых $U_\mu(z) \leq 1$.

А. Берлингом [9] было доказано, что если функция $f(z)$ однолистка в круге D , то она имеет конечные угловые пределы во всех точках окружности Γ за исключением множества точек логарифмической емкости нуль. Таким образом, для однолистной в D функции f множество $E(f)$ имеет тип $G_{\delta\sigma}$ и нулевую логарифмическую емкость.

Ниже дается достаточное условие на множество для того, чтобы оно было множеством $E(f)$ для некоторой функции, однолистной в D .

ТЕОРЕМА 2. Для любого множества $E \subset \Gamma$, имеющего нулевую логарифмическую емкость и тип G_δ на окружности Γ , существует ограниченная однолистная в круге D функция $f(z)$ такая, что $E = E(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого открытого на Γ множества $O \supset E$ существуют открытое множество $\tilde{O}$ и положительная борелевская мера μ , $\mu(\Gamma) < \varepsilon$, такие, что $E \subset \tilde{O} \subset O$, а потенциал $U_\mu(z)$ ограничен и удовлетворяет условиям:

$$U_\mu(z) \geq 1, \quad z \in \tilde{O}; \quad U_\mu(z) < \varepsilon, \quad z \in \Gamma \setminus O.$$

Для доказательства каждую из открытых дуг, составляющих множество O , двумя последовательностями, сходящимися к ее концам, разобьем на открытые дуги. При этом, так как $\text{Cap } E = 0$, а логарифмическая емкость любой невырожденной дуги положительна, то точки разбиения можно выбрать из $\Gamma \setminus E$. Совокупность всех полученных дуг расположим в последовательность $\gamma_n, n = 1, 2, \dots$. Обозначим через ρ_n расстояние от дуги γ_n до ближайшей дуги, не смежной с γ_n .

Поскольку логарифмическая емкость пересечения $E \cap \gamma_n$ равна 0 и борелевские множества измеримы относительно емкости, то можно найти открытое множество $\tilde{O}_n \subset \gamma_n$ такое, что $E \cap \gamma_n \subset \tilde{O}_n$ и

$$\text{Cap } \tilde{O}_n < \frac{\varepsilon}{M2^n}, \quad \text{где } M_n = \max \left\{ 1, \ln \frac{1}{\rho_n} \right\}. \quad (1)$$

Пусть $\tilde{\mu}_n$ – равновесная мера для $\tilde{O}_n$, $n = 1, 2, \dots$, $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}_n$. Так как $\tilde{\mu}_n$ – равновесная мера, то $\tilde{\mu}_n(\Gamma) = \text{Cap } \tilde{\mu}_n(\Gamma)$, и согласно (1)

$$\mu(\Gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}_n(\Gamma) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{M_n 2^n} \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим потенциал $U_\mu(z)$. Так как $U_{\tilde{\mu}_n}$ – равновесный потенциал для $\tilde{O}_n$, то $U_{\tilde{\mu}_n}(z) = 1$ во внутренних точках множества $\tilde{O}_n$. Отсюда следует, что на множестве $\tilde{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{O}_n$ имеет место неравенство

$$U_\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{\tilde{\mu}_n}(z) \geq 1.$$

Из неравенства (1) следует, что для всех точек $z \in \Gamma$, находящихся от γ_n на расстоянии $> \rho_n$, выполнено

$$U_{\tilde{\mu}_n}(z) = \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\tilde{\mu}_n(\zeta) < \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{\rho_n} d\tilde{\mu}_n = M_n \tilde{\mu}_n(\tilde{O}_n) = M_n \text{Cap } \tilde{O}_n < \frac{\varepsilon}{2^n}. \quad (2)$$

Поскольку точки $z \in \Gamma \setminus O$ находятся от дуги γ_n на расстоянии, большем ρ_n , $n = 1, 2, \dots$, из (2) следует, что на $\Gamma \setminus O$ имеет место неравенство

$$U_\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{\tilde{\mu}_n}(z) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Наконец, если $z \in O \setminus \tilde{O}$, то (2) может не выполняться только для индексов n , соответствующих дуге γ_n , содержащей z , или дугам, смежным с ней, т.е. лишь для трех индексов. Отсюда получается, что потенциал $U_\mu(z)$ ограничен: $U_\mu(z) < 3 + \varepsilon$, и требуемое утверждение доказано.

Поскольку множество E имеет тип G_δ , то, применяя доказанное утверждение, нетрудно построить последовательность открытых на Γ множеств $O_1 \supset O_2 \supset \dots \supset O_n \supset \dots$, пересечение которых равно E ($E = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$), и меры μ_n , $\mu_n(\Gamma) < 1/2^n$, так, что потенциал U_{μ_n} ограничен, удовлетворяет неравенству $U_{\mu_n}(z) \geq 1$ на множестве O_n и неравенству $U_{\mu_n}(z) < 1/2^n$ на $\Gamma \setminus O_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$.

Положим $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$. Тогда

$$U_\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{\mu_n}(z).$$

Если $z \in E$, то по построению мер μ_n $U_{\mu_n}(z) > 1$ и потенциал $U_\mu(z)$ равен $+\infty$. Отсюда в силу непрерывности снизу потенциала U_μ следует, что $U_\mu(z)$ имеет в каждой точке множества E предел, равный $+\infty$.

Если $z \in \Gamma \setminus E$, то существует номер N такой, что $z \notin O_n$ при $n > N$. Тогда на $\Gamma \setminus O_N$ выполнено $U_{\mu_n}(z) < 1/2^n$, $n > N$, и

$$U_\mu(z) = \sum_{n=1}^N U_{\mu_n}(z) + \sum_{n=N+1}^{\infty} U_{\mu_n}(z) < \sum_{n=1}^N U_{\mu_n}(z) + 1.$$

Поскольку все потенциалы U_{μ_n} ограничены, то $U_\mu(z) < +\infty$, т.е. потенциал U_μ конечен в каждой точке множества $\Gamma \setminus E$.

Положим

$$F(z) = \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{\zeta - z} d\mu(\zeta),$$

где ветвь логарифма выбирается так, что $0 \leq \operatorname{Im} \ln(1/\zeta) < 2\pi$.

Очевидно, $F(z)$ голоморфна в круге D , $\operatorname{Re} F(z) = U_\mu(z)$ и $F(z)$ имеет бесконечные пределы в каждой точке множества E .

Покажем, что если $z_0 \in \Gamma \setminus E$, то функция $F(z)$ имеет в точке z_0 конечный угловой предел.

Пусть V – угол с вершиной в z_0 величины 2φ , симметричный относительно радиуса круга D с концом в z_0 ; $z \in V \cap D$, $|z - z_0| < \cos \varphi$. Нетрудно видеть, что при $\zeta \in \Gamma$ выполнено $|\zeta - z_0|/|\zeta - z| < 1/\cos \varphi$.

Отсюда по выбору ветви $\ln(1/(\zeta - z))$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \ln \frac{1}{\zeta - z} \right| &\leq \left| \operatorname{Re} \ln \frac{1}{\zeta - z} \right| + \left| \operatorname{Im} \ln \frac{1}{\zeta - z} \right| \leq \left| \ln \frac{1}{|\zeta - z|} \right| + 4\pi \leq \ln \frac{2}{|\zeta - z|} + 4\pi \\ &= \ln \frac{1}{|\zeta - z|} + \ln 2 + 4\pi = \ln \frac{1}{|\zeta - z_0|} + \ln \frac{|\zeta - z_0|}{|\zeta - z|} + \ln 2 + 4\pi \\ &\leq \ln \frac{1}{|\zeta - z_0|} + \ln \frac{1}{\cos \varphi} + \ln 2 + 4\pi. \end{aligned}$$

Поскольку интеграл

$$U_\mu(z_0) = \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{|\zeta - z_0|} d\mu(\zeta)$$

конечен, отсюда следует, что при всех $z \in V \cap D$, $|z - z_0| < \cos \varphi$ (а также и при $z = z_0$), функция $|\ln(1/(\zeta - z))|$ мажорируется функцией, суммируемой на Γ по мере μ .

Так как $1/(\zeta - z) \rightarrow 1/(\zeta - z_0)$ при $z \rightarrow z_0$, применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получим, что

$$F(z) \rightarrow F(z_0) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z_0} d\mu(\zeta),$$

когда $z \rightarrow z_0$, оставаясь внутри угла V .

Далее, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \int_{\Gamma} \left| \operatorname{Re} \ln \frac{1}{\zeta - z} \right| d\mu(\zeta) + \int_{\Gamma} \left| \operatorname{Im} \ln \frac{1}{\zeta - z} \right| d\mu(\zeta) \\ &\leq \int_{\Gamma} \left| \ln \frac{1}{|\zeta - z|} \right| d\mu(\zeta) + 4\pi\mu(\Gamma) \leq \mu(\Gamma) \ln \frac{1}{1 - |z|} + 4\pi\mu(\Gamma). \end{aligned}$$

Пусть

$$q(z) = \int_0^z z F(z) dz.$$

Очевидно, из предыдущего неравенства следует, что $q(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

Положим

$$g(z) = zF(z) - q(z) + \frac{\mu(\Gamma)}{2}z.$$

Эта функция, как и $F(z)$, имеет на множестве E бесконечные пределы, а на его дополнении $\Gamma \setminus E$ – конечные угловые пределы. Дифференцируя $g(z)$, получим

$$\operatorname{Re} g'(z) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} d\mu(\zeta) > 0,$$

где $\zeta = e^{it}$, а $z = re^{i\theta}$.

Отсюда по известному критерию однолиственности (см., например, [10]) следует, что g однолистка в круге D .

Пусть G – область, на которую функция g отображает единичный круг; w_0 – некоторая конечная граничная точка области G . Обозначим через K связную компоненту множества всех конечных граничных точек области G , а через G_1 ту компоненту дополнения к K , которая содержит G . При этом бесконечная точка принадлежит носителю только одного простого конца области G_1 . Пусть $\tau(z)$ – функция, отображающая G_1 конформно на круг с разрезом по гладкой спирали, разматывающейся к окружности Γ так, что простой конец области G_1 , соответствующий бесконечной граничной точке, переходит в простой конец круга с разрезом, соответствующий окружности. Тогда функция $\tau(z)$ не будет иметь предела по любому пути, ведущему в бесконечную точку, и будет иметь предел по любому пути с концом в конечной точке границы области G_1 . Отсюда, так как $g(z)$ имеет бесконечные пределы в каждой точке множества E и конечные пределы в остальных точках окружности Γ , то функция $f(z) = \tau(g(z))$ не имеет радиальных пределов на E и имеет их на $\Gamma \setminus E$. Таким образом, однолистная функция $f(z)$ является искомой.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fatou P. Series trigonometriques et series de Taylor // Acta Math. 1906. V. 30. P. 335–400.
- [2] Лузин Н. Н. Sur la représentation conforme // J. Reine Angew. Math. 1919. V. 158. P. 77–80.
- [3] Plessner A. Über das Verhalten analytischer Functionen am Rande ihres Definitionsbereichs // J. Reine Angew. Math. 1927. V. 158. P. 219–227.
- [4] Lappan P. A characterization of Plessner points // Bull. London Math. Soc. 1970. V. 2. P. 60–62.
- [5] Канатников А. Н. Обращение теоремы Мейера для мероморфных функций // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 5. С. 1043–1046.
- [6] Lohwater A. J., Piranian G. The boundary behavior of functions analytic in a disk // Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 1957. V. 239. P. 1–17.
- [7] Хасан А. А.-Р., Канатников А. Н. Обращение теоремы Мейера для произвольных направлений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 5. С. 38–41.
- [8] Колесников С. В. О множествах несуществования радиальных пределов ограниченных аналитических функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 4. С. 91–100.
- [9] Beurling A. Ensembles exceptionnels // Acta Math. 1940. V. 72. P. 1–13.
- [10] Фёдоров В. С. О производной комплексной функции // Докл. АН СССР. 1948. Т. 63. № 1. С. 34–36.

Ивановский государственный университет

Поступило

26.03.96

Исправленный вариант

20.04.97