Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Леонов, Замечания о полной вариации функций нескольких переменных и многомерном аналоге принципа выбора Хелли, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 69–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:01:57

УДК 517.397

ЗАМЕЧАНИЯ О ПОЛНОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И МНОГОМЕРНОМ АНАЛОГЕ ПРИНЦИПА ВЫБОРА ХЕЛЛИ

А. С. Леонов

Для класса Харди функций многих переменных с ограниченными вариациями вводится новое понятие полной вариации и устанавливается ряд свойств функций этого класса, аналогичных имеющимся в одномерном случае. В частности, показывается, что в этом классе справедлив точный аналог принципа выбора Хелли.

Библиография: 15 названий.

Известно несколько подходов к конструкции понятия вариации функции нескольких переменных. Таковы, например, вариации Витали, Арцела, Фреше, Тонелли, Хаана, Кронрода–Витушкина, Минлоса и др. (см., например, [1]–[4]). В основном, свойства функций N переменных ($N > 1$) с ограниченной вариацией каждого из этих типов аналогичны свойствам функций с ограниченной вариацией одной переменной. Последние, однако, имеют свойства, вопрос о переносе которых на N -мерный случай требует специального исследования. Это касается, в частности, известного принципа выбора Хелли: из бесконечного семейства функций одной переменной $\{z(x)\}$, $x \in [a, b]$, которые удовлетворяют условию

$$|z(a)| + V_a^b(z) \leq C = \text{const},$$

можно выделить последовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[a, b]$ к некоторой функции с конечной вариацией (см. [5, с. 209]).

В данной заметке будет рассматриваться класс Харди $\mathcal{V}_N$ функций нескольких переменных с ограниченными вариациями, введенный в [6] (см. п. 3). Для функций этого класса в N -мерном случае известны утверждения, близкие по сути к принципу выбора Хелли (см., например, [7], [8]). Одно из них приведено ниже в п. 4. Эти утверждения, однако, отличаются от принципа выбора Хелли использованием “сходимости в существенном” вместо поточечной сходимости. Таким образом, и для класса Харди проблема точного аналога принципа выбора Хелли в N -мерном случае открыта. Далее будет показано, что такой точный аналог имеется.

В заметке предлагается также иное определение упомянутого класса Харди. Дело в том, что при изучении класса $\mathcal{V}_N$ в работах [2], [3], [6] не вводилось единое понятие “вариации функции N переменных”, а функция характеризовалась целым набором вариаций различной размерности. В принципе, такой подход весьма плодотворен особенно для других конструкций вариаций (см. [4], [9]). Вместе с тем, в построенной таким образом в [2], [3] теории функций N переменных с ограниченными вариациями отсутствуют

аналоги некоторых хорошо известных при $N = 1$ утверждений. Например, неравенство для функции одной переменной

$$|z(x) - z(y)| \leq V_x^y(z) \quad \forall x, y \in [a, b]$$

не переносится на класс $\mathcal{V}_N$ из работ [2], [3]. Оказывается, что вводя новое определение *полной вариации* функции N переменных, можно не только охарактеризовать класс $\mathcal{V}_N$ как множество функций с ограниченной полной вариацией, но и получить для функций этого класса в N -мерном случае ряд дополнительных свойств (например, перенести на N -мерный случай приведенное выше неравенство и т.п.).

Введение полной вариации, установление дополнительных свойств функций класса Харди, а также N -мерного аналога принципа выбора Хелли, важно в связи с рядом приложений. Одно из них – использование функций нескольких переменных с ограниченной вариацией в решении проблемы кусочно-равномерной регуляризации (см. [10, с. 200]) многомерных некорректно поставленных задач.

1. Полная вариация функций нескольких переменных. Пусть $B = B_a^b = B_{a_1 \dots a_N}^{b_1 \dots b_N} = \{x \in \mathbb{R}^N : a_i \leq x_i \leq b_i, a_i < b_i, i = \overline{1, N}\}$ – основной брус в $\mathbb{R}^N$, в котором определена функция $z(x) = z(x_1, \dots, x_N)$. Введем в B частичную упорядоченность точек $\alpha, \beta \in B$ с помощью конуса $K^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : x_i > 0, i = \overline{1, N}\}$:

$$\begin{aligned} \alpha < \beta, & \text{ если } \beta - \alpha \in K^+; \\ \alpha \leq \beta, & \text{ если } \beta - \alpha \in \overline{K^+}. \end{aligned}$$

Будем обозначать как $B_\alpha^\beta = B_{\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\beta_1 \dots \beta_N} = \{x \in \mathbb{R}^N : \alpha_i < x_i \leq \beta_i, i = \overline{1, N}\}, \alpha < \beta$, (координатные) подбрусы размерности N основного бруса. Если при этом $\alpha_i = a_i$, то неравенство $\alpha_i < x_i$ заменяется здесь на $\alpha_i \leq x_i$. Определим с помощью функции $z(x)$ “ N -мерный квазиобъем” σ_N бруса B_α^β по правилу:

$$\sigma_N(B_\alpha^\beta) = \sum_{\nu_1=0}^1 \dots \sum_{\nu_N=0}^1 (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_N} z[\beta_1 + \nu_1(\alpha_1 - \beta_1), \dots, \beta_N + \nu_N(\alpha_N - \beta_N)] \quad (1)$$

(см. [7], [11], [12]). Например, при $N = 2$ получим

$$\sigma_2(B_\alpha^\beta) = \sigma_2(B_{\alpha_1 \alpha_2}^{\beta_1 \beta_2}) = z(\beta_1, \beta_2) - z(\beta_1, \alpha_2) - z(\alpha_1, \beta_2) + z(\alpha_1, \alpha_2).$$

Квазиобъем σ_N является аддитивной функцией брусов (см. [12, с. 162]). Зададим допустимое разбиение Π основного бруса: $\Pi = \{B_j\}_{j=1}^n$, в котором N -мерные подбрусы B_j не пересекаются и $B = B_1 + \dots + B_n$. Совокупность всех таких разбиений для всевозможных n обозначим как $\mathcal{P}$. Тогда N -мерной *вариацией* (вариацией Витали) функции $z(x)$ в бресе B называется величина

$$V_N(z, B) = \sup_{\Pi} \left\{ \sum_{j=1}^n |\sigma_N(B_j)| : \Pi = \{B_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{P} \right\} \quad (2)$$

(см. [1], [3]). Вариация $V_N(z, \cdot)$ представляет собой аддитивную функцию N -мерных брусов [12]. Нетрудно видеть, что $V_N(z_1 + z_2, B) \leq V_N(z_1, B) + V_N(z_2, B)$ для любых $z_1(x), z_2(x)$, имеющих в B конечную вариацию. Отметим также равенство

$$V_N(z, B) = \sup_{\Pi} \left\{ \sum_j |\sigma_N(B_j)| : \Pi = \{B_j\} \in \mathcal{P}^* \right\}, \quad (3)$$

где $\mathcal{P}^*$ – совокупность всех “специальных допустимых разбиений” $\{B_j\}$ бруса B , порожденных N -мерными сетками вида $S = \{x_{k_1 \dots k_N} : k_1 = 1, \dots, K_1, \dots, k_N = 1, \dots, K_N\}$, с узлами $x_{k_1 \dots k_N} = (x_1^{(k_1)}, \dots, x_N^{(k_N)})$, $a_i = x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < \dots < x_i^{(K_i)} = b_i$, $i = \overline{1, N}$, в брус B .

Фиксируем далее число m ($1 \leq m \leq N - 1$) и рассмотрим m -мерную координатную грань $B_{i_1 \dots i_m}$ основного бруса, проходящую через точку $a \in B$ параллельно осям $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N$). Для всякой такой грани $B_{i_1 \dots i_m}$, как для бруса размерности m , можно, используя соотношения типа (1), (2), ввести понятие m -мерного квазиобъема σ_m и m -мерной вариации V_m функции z по $B_{i_1 \dots i_m}$. Иногда удобно при каждом m ($1 \leq m \leq N - 1$) занумеровать все m -мерные грани вида $B_{i_1 \dots i_m}$ индексом l ($1 \leq l \leq C_m^N = N_m$) и обозначить их как $B_l^{(m)}$, а их совокупность – как $\mathcal{B}_m$: $\mathcal{B}_m = \{B_l^{(m)}\}_{l=1}^{N_m}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полной вариацией функции z в брус B назовем величину

$$V(z, B) = \sum_{m=1}^{N-1} \left\{ \sum_{l=1}^{N_m} V_m(z, B_l^{(m)}) \right\} + V_N(z, B). \quad (4)$$

Множество $\mathcal{V} = \mathcal{V}(B)$ всех функций $z(x)$, определенных в B и имеющих там конечную полную вариацию (4), будем называть *пространством функций N переменных с ограниченной полной вариацией*.

Если, используя введенные обозначения, считать, что $B_{12 \dots N} = B$, то выражение (4) можно записать в виде следующей суммы $2^N - 1$ слагаемых:

$$\begin{aligned} V(z, B) &= \sum_{m=1}^N \left\{ \sum_{\substack{i_1=1 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N}}^m \dots \sum_{i_m=1}^m V_m(z, B_{i_1 \dots i_m}) \right\} \\ &= \sum_{m=1}^N \left\{ \sum_{i_1=1}^{N-m+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{N-m+2} \dots \sum_{i_m=i_{m-1}+1}^N V_m(z, B_{i_1 \dots i_m}) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

В качестве примера приведем выражение полной вариации для $N = 2$

$$V(z, B) = V_1(z, B_1^{(1)}) + V_1(z, B_2^{(1)}) + V_2(z, B),$$

где $V_1(z, \cdot)$ – обычная (одномерная) вариация функции $z(x_1, x_2)$ по граням $B_1^{(1)} = \{a_1 \leq x_1 \leq b_1, x_2 = a_2\}$, $B_2^{(1)} = \{x_1 = a_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$ бруса $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.

Полную вариацию можно записать и в другой форме. Для этого зададим в брус B сетку S , как это делалось выше. Она порождает для B специальное разбиение $\{B^{k_1 \dots k_N} : k_i = 1, \dots, K_i - 1, i = \overline{1, N}\}$ на подбрусы $B^{k_1 \dots k_N} = \{(x_1, \dots, x_N) : x_i^{(k_i)} < x_i \leq x_i^{(k_i+1)}, i = \overline{1, N}\}$. Кроме того, она порождает специальные разбиения $\{B^{k_{i_1} \dots k_{i_m}}\}$ каждой m -мерной грани $B_{i_1 \dots i_m} \in \mathcal{B}_m$ ($m = \overline{1, N-1}$) бруса B на подбрусы $B^{k_{i_1} \dots k_{i_m}} = \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) : x_{i_p}^{(k_{i_p})} < x_{i_p} \leq x_{i_p}^{(k_{i_p}+1)}, p = \overline{1, m}\}$. Все эти разбиения можно единообразно описать, приняв следующее соглашение. Будем формально считать, что при $k_i = 0$ неравенство $x_i^{(0)} < x_i \leq x_i^{(1)}$ в определении подбруса $B^{k_1 \dots k_N}$ означает, что

$x_i = x_i^{(1)} = a_i$. Тогда m -мерные подбрусы $B^{k_{i_1} \dots k_{i_m}}$ формально представляют собой подбрусы вида $B^{k_1 \dots k_N}$, у которых в наборе $(k_1, \dots, k_N)$ индексы $k_{i_1}, \dots, k_{i_m}$ отличны от 0, а остальные – равны 0. Приняв это соглашение, будем иногда в дальнейшем обозначать квазиобъемы различных размерностей m $\sigma_m(B^{k_{i_1} \dots k_{i_m}})$ как $\sigma(B^{k_1 \dots k_N})$.

Введем для сетки S величину

$$\begin{aligned} \omega(z, S) &= \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+\dots+k_N>0}}^{K_1-1} \dots \sum_{k_N=0}^{K_N-1} |\sigma(B^{k_1 \dots k_N})| \\ &= \sum_{m=1}^N \left\{ \sum_{\substack{i_1=1 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N}}^m \dots \sum_{i_m=1}^m \left[\sum_{k_{i_1}=1}^{K_{i_1}-1} \dots \sum_{k_{i_m}=1}^{K_{i_m}-1} |\sigma_m(B^{k_{i_1} \dots k_{i_m}})| \right] \right\} \\ &= \sum_{m=1}^N \left\{ \sum_{i_1=1}^{N-m+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{N-m+2} \dots \sum_{i_m=i_{m-1}+1}^N \left[\sum_{k_{i_1}=1}^{K_{i_1}-1} \dots \sum_{k_{i_m}=1}^{K_{i_m}-1} |\sigma_m(B^{k_{i_1} \dots k_{i_m}})| \right] \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

В частности, при $N = 2$ для сетки $S = \{x_{kl} : k = 1, \dots, K, \dots, l = 1, \dots, L\}$ в брус $B \subset \mathbb{R}^2$ выражение (6) записывается в виде

$$\begin{aligned} \omega(z, S) &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} |\sigma(B^{kl})| = \sum_{k=1}^{K-1} |\sigma(B^{k0})| + \sum_{l=1}^{L-1} |\sigma(B^{0l})| + \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l=1}^{L-1} |\sigma(B^{kl})| \\ &= \sum_{k=1}^{K-1} |z(x_{k+1,1}) - z(x_{k1})| + \sum_{l=1}^{L-1} |z(x_{1,l+1}) - z(x_{1l})| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l=1}^{L-1} |z(x_{k+1,l+1}) - z(x_{k+1,l}) - z(x_{k,l+1}) + z(x_{kl})|. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{S}$ – множество всевозможных сеток S в брус $B \subset \mathbb{R}^N$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Для всякой функции $z \in \mathcal{V}(B)$*

$$V(z, B) = \sup_S \{\omega(z, S) : S \in \mathcal{S}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Для него найдется столь “мелкое” разбиение $\{B^{k_1 \dots k_N}\} \in \mathcal{P}^*(B)$ бруса B , которое в силу равенства типа (3) для вариации $V_m(z, \cdot)$ обеспечивает на соответствующих разбиениях $\{B^{k_{i_1} \dots k_{i_m}}\}$ всех m -мерных граней $B_{i_1 \dots i_m} \in \mathcal{B}_m$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N$) произвольной размерности m ($1 \leq m \leq N$) выполнение неравенств

$$V_m(z, B_{i_1 \dots i_m}) - \frac{\varepsilon}{2^N - 1} \leq \sum_{k_{i_1}=1}^{K_{i_1}-1} \dots \sum_{k_{i_m}=1}^{K_{i_m}-1} |\sigma_m(B^{k_{i_1} \dots k_{i_m}})|.$$

Суммируя все такие неравенства по m и по $i_1, \dots, i_m$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N$), с учетом (5) и (6) получим $V(z, B) - \varepsilon \leq \omega(z, S) \leq V(z, B)$, что и доказывает теорему.

2. Некоторые свойства функций с ограниченной полной вариацией.

ТЕОРЕМА 2. Для всякой функции $z(x)$, определенной в N -мерном брус $B = B_a^b$, и для любого разбиения $\{B^{k_1 \dots k_N} : k_i = 0, \dots, K_i - 1, i = \overline{1, N}\}$ этого бруса справедливо равенство

$$\begin{aligned} z(b) - z(a) &= \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+\dots+k_N>0}}^{K_1-1} \dots \sum_{k_N=0}^{K_N-1} \sigma(B^{k_1 \dots k_N}) \\ &= \sum_{m=1}^N \left\{ \sum_{i_1=1}^{N-m+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{N-m+2} \dots \sum_{i_m=i_{m-1}+1}^N \left[\sum_{k_{i_1}=1}^{K_{i_1}-1} \dots \sum_{k_{i_m}=1}^{K_{i_m}-1} \sigma_m(B^{k_{i_1} \dots k_{i_m}}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие аддитивности квазиобъемов σ_m верна формула

$$\sigma_m(B_{i_1 \dots i_m}) = \sum_{k_{i_1}=1}^{K_{i_1}-1} \dots \sum_{k_{i_m}=1}^{K_{i_m}-1} \sigma_m(B^{k_{i_1} \dots k_{i_m}}).$$

Поэтому для доказательства равенства (7) достаточно убедиться в том, что

$$\Sigma \equiv \sum_{m=1}^N \left\{ \sum_{i_1=1}^{N-m+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{N-m+2} \dots \sum_{i_m=i_{m-1}+1}^N \sigma_m(B_{i_1 \dots i_m}) \right\} = z(b) - z(a). \quad (8)$$

Согласно формуле типа (1) величины $\sigma_m(B_{i_1 \dots i_m})$ линейно выражаются через значения функции $z(x)$ в вершинах бруса $B_{i_1 \dots i_m} \in \mathcal{B}_m$. Поэтому сумма Σ есть линейная комбинация всех значений $z(x)$ в вершинах основного бруса B_a^b . Если обозначить эти вершины как $\gamma_{i_1 \dots i_m} = (a_1, \dots, a_{i_1-1}, b_{i_1}, a_{i_1+1}, \dots, a_{i_m-1}, b_{i_m}, a_{i_m+1}, \dots, a_N)$, $m = \overline{1, N}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N$, то

$$\begin{aligned} \Sigma &= A_0 z(a) + \sum_{i_1=1}^N A_{i_1} z(\gamma_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{N-1} \sum_{i_2=i_1+1}^N A_{i_1 i_2} z(\gamma_{i_1 i_2}) + \dots \\ &+ \sum_{i_1=1}^{N-m+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{N-m+2} \dots \sum_{i_m=i_{m-1}+1}^N A_{i_1 \dots i_m} z(\gamma_{i_1 \dots i_m}) + \dots + A_{12 \dots N} z(b). \end{aligned} \quad (9)$$

Так как точка a принадлежит всем граням из множества $\{\mathcal{B}_m\}_{m=1}^N$, учитывая, что число граней, содержащихся в $\mathcal{B}_m$, равно C_N^m и что величина $z(a)$ входит в выражение для σ_m со знаком $(-1)^m$, получим

$$A_0 = (-1)^1 C_N^1 + (-1)^2 C_N^2 + \dots + (-1)^N C_N^N = (1-1)^N - 1 = -1.$$

Точка b принадлежит единственной “грани” вида $B_{i_1 \dots i_m}$, а именно основному брусу $B = B_{12 \dots N}$, а число $z(b)$ входит в формулу (1) для $\sigma_N(B)$ со знаком “+”. Поэтому $A_{12 \dots N} = 1$. Принимая во внимание, что число всех возможных r -мерных граней из множества $\mathcal{B}_r$ ($m \leq r \leq N$), содержащих фиксированную вершину $\gamma_{i_1 \dots i_m}$, равно C_{N-m}^{r-m} , и учитывая знак $(-1)^{r-m}$ при $z(\gamma_{i_1 \dots i_m})$ в формуле (1) для квазиобъемов этих граней, найдем также

$$A_{i_1 \dots i_m} = (-1)^0 C_{N-m}^0 + (-1)^1 C_{N-m}^1 + \dots + (-1)^{N-m} C_{N-m}^{N-m} = (1-1)^{N-m} = 0. \quad (10)$$

Таким образом, из (9), (10) следует, что $\Sigma = z(b) - z(a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы, аналогичные (7), (8), верны и в случае $a \leq b$. Например, если $b = (a_1, \dots, a_m, b_{m+1}, \dots, b_N)$, то

$$z(b) - z(a) = \sum_{k=1}^{N-m} \left\{ \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \sigma_k(B_{i_1 \dots i_k}) \right\}. \quad (11)$$

$m+1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$

Доказательство этой формулы сходно с приведенным выше.

В частном случае $N = 2$ формула (7) имеет вид

$$\begin{aligned} z(b_1, b_2) - z(a_1, a_2) &= \sum_{k=1}^{K-1} [z(x_{k+1,1}) - z(x_{k1})] \\ &+ \sum_{l=1}^{L-1} [z(x_{1,l+1}) - z(x_{1l})] + \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l=1}^{L-1} [z(x_{k+1,l+1}) - z(x_{k+1,l}) - z(x_{k,l+1}) + z(x_{kl})]. \end{aligned}$$

Из теоремы 1, формулы (6) и равенств вида (7), (8), (11), доказанных в теореме 2, вытекает ряд следствий, выражающих свойства функций класса $\mathcal{V}(B)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой функции $z(x) \in \mathcal{V}(B)$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |z(x) - z(a)| &\leq V(z, B_a^x) \quad \forall x \in B, \quad x \geq a, \\ |z(x)| &\leq |z(a)| + V(z, B_a^x) \leq |z(a)| + V(z, B) \quad \forall x \in B. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогичные неравенства при $N = 1$ хорошо известны [5, с. 203].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пространство $\mathcal{V}(B)$ можно нормировать, полагая $\|z\|_V = |z(a)| + V(z, B)$. Полученное нормированное пространство будет банаховым.

Доказательство этого утверждения проводится почти дословно, как в одномерном случае. При этом существенно используется неравенство (12) и выражение для полной вариации из теоремы 1 (ср. [13, с. 159]).

Отметим, что как следует из (4), эквивалентная норма в $\mathcal{V}(B)$ может быть задана равенством

$$\|z\| = |z(a)| + \max_{1 \leq m \leq N} \left\{ \max_{B_l^{(m)} \in \mathcal{B}_m} V_m(z, B_l^{(m)}) \right\}.$$

3. Полностью монотонные функции и некоторые их свойства. Рассмотрим специальный класс $\mathcal{M}(B)$ функций, определенных в B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем считать, что $z(x) \in \mathcal{M}(B)$, если для любого бруса B_x^y , $B_x^y \subset B$, $x \leq y$, произвольной размерности m ($1 \leq m \leq N$) квазиобъем $\sigma_m(B_x^y)$, порожденный функцией z , неотрицателен.

Из равенства вида (8), записанного для бруса B_x^y вместо B_a^b , ясно, что всякая функция $z(x) \in \mathcal{M}(B)$ монотонна (не убывает) относительно конуса $\bar{K}^+$: $z(y) \geq z(x)$ для любых $x, y \in B$, $y \geq x$. Из (6), (7) и теоремы 1 следует равенство $V(z, B) = z(b) - z(a)$, и поэтому $\mathcal{M}(B) \subset \mathcal{V}(B)$. При $N = 2$ включение $z(x) \in \mathcal{M}(B)$ означает, что

$$\begin{aligned} z(y_1, x_2) - z(x_1, x_2) &\geq 0, \quad z(x_1, y_2) - z(x_1, x_2) \geq 0, \\ z(y_1, y_2) - z(x_1, y_2) - z(y_1, x_2) + z(x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

для любых $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B$, $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$ (см. [6]).

Функции класса $\mathcal{M}(B)$ рассматривались в [2], [14] под названием “квазимонотонные”, или “полностью монотонные”. Одно из свойств этих функций дает установленная в [14]

ЛЕММА 1. Полностью монотонные функции непрерывны в B всюду кроме, быть может, точек разрыва, которые лежат на не более чем счетном, множестве координатных гиперплоскостей размерности $N - 1$.

Полностью монотонные функции играют в теории функций N переменных с ограниченной полной вариацией ту же роль, что и монотонные функции для функций одной переменной с ограниченной вариацией. Это, в частности, подтверждается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3. Если $z(x) \in \mathcal{V}(B)$, то функции $\pi(x) = V(z, B_a^x)$, $\mu(x) = \pi(x) - z(x)$ полностью монотонные в B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный брус $B_x^y \subset B$ размерности m ($1 \leq m \leq N$) и установим, что его квазиобъем $\sigma_m(\pi, B_x^y)$, порождаемый функцией π , неотрицателен. Для определенности будем считать, сначала, что брус имеет вид $B_x^y = B_{x'x''}^{y'y'}$, где $x' = (x_1, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_N)$, $y' = (y_1, \dots, y_m)$ и $y' > x' > a' = (a_1, \dots, a_m)$, $x'' > a'' = (a_{m+1}, \dots, a_N)$. Тогда из формулы (1) для квазиобъемов и формулы (5) для полной вариации функции z по N -мерному брусу следует равенство

$$\begin{aligned} \sigma_m(\pi, B_{x'x''}^{y'y'}) &= \sum_{\nu_1=0}^1 \cdots \sum_{\nu_m=0}^1 (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_m} \pi[y' + \nu(x' - y'), x''] \\ &= \sum_{\nu_1=0}^1 \cdots \sum_{\nu_m=0}^1 (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_m} V(z, B_{a'a''}^{d(\nu)x''}) \\ &= \sum_{\nu_1=0}^1 \cdots \sum_{\nu_m=0}^1 (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_m} \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} V_k[z, (B_{a'a''}^{d(\nu)x''})_{i_1 \dots i_k}] \right\} \\ &\quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} \left\{ \sum_{\nu_1=0}^1 \cdots \sum_{\nu_m=0}^1 (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_m} V_k[z, (B_a^{d(\nu)x''})_{i_1 \dots i_k}] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $d(\nu) = y' + \nu(x' - y') = (y_1 + \nu_1(x_1 - y_1), \dots, y_m + \nu_m(x_m - y_m))$, а $(B_a^{d(\nu)x''})_{i_1 \dots i_k}$ — k -мерная грань N -мерного бруса $B_a^{d(\nu)x''}$, проходящая через точку a параллельно осям с номерами $i_1, \dots, i_k$. Обозначим для краткости

$$S_{i_1 \dots i_k} \equiv \sum_{\nu_1=0}^1 \cdots \sum_{\nu_m=0}^1 (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_m} V_k[z, (B_a^{d(\nu)x''})_{i_1 \dots i_k}].$$

Вычислим величины $S_{i_1 \dots i_k}$ при $k < m$. В этом случае для точек бруса $(B_a^{d(\nu)x''})_{i_1 \dots i_k}$ хотя бы одна из первых m координат постоянна и совпадает с соответствующей координатой точки a . Пусть эта координата имеет номер j ($1 \leq j \leq m$). Тогда она не зависит от ν_j , и поэтому

$$\begin{aligned} S_{i_1 \dots i_k} &= \sum_{\nu_1=0}^1 \cdots \sum_{\nu_{j-1}=0}^1 \sum_{\nu_{j+1}=0}^1 \cdots \sum_{\nu_m=0}^1 (-1)^{\nu_1+\dots+\nu_{j-1}+\nu_{j+1}+\dots+\nu_m} \\ &\quad \times V_k[z, (B_a^{d(\nu)x''})_{i_1 \dots i_k}] \sum_{\nu_j=0}^1 (-1)^{\nu_j} = 0 \quad \forall i_1, \dots, i_k : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N. \end{aligned}$$

Вследствие этого сумма (13) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 \sigma_m(\pi, B_{x'x''}^{y'x''}) &= \sum_{k=m}^N \left(\sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} S_{i_1 \dots i_k} \right) \\
 &= \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_m} S_{i_1 \dots i_m} + \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_m} \sum_{i_{m+1}} S_{i_1 \dots i_m i_{m+1}} + \cdots + S_{12 \dots N} \\
 &\equiv \Sigma_m + \Sigma_{m+1} + \cdots + \Sigma_N.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Вычислим сумму Σ_m . Если рассмотреть ее слагаемое $S_{12 \dots m}$, т.е. положить $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_m = m$, то $(B_a^{d(\nu)x''})_{i_1 \dots i_m} = B_{a'a''}^{d(\nu)a''}$. Введем оператор Δ_i ($1 \leq i \leq m$), преобразующий брусы $B_{ca''}^{da''}$, у которых $c = (c_1, \dots, c_m) < d = (d_1, \dots, d_m)$, по правилу

$$\Delta_i B_{ca''}^{da''} = B_{c_1 \dots c_{i-1} y_i d_{i+1} \dots d_m a''}^{d_1 \dots d_{i-1} y_i d_{i+1} \dots d_m a''} = B_{ca''}^{d_1 \dots d_{i-1} y_i d_{i+1} \dots d_m a''} \setminus B_{ca''}^{d_1 \dots d_{i-1} x_i d_{i+1} \dots d_m a''}.$$

Тогда из представления $B_{x'a''}^{y'a''} = \Delta_1(\Delta_2(\dots(\Delta_m B_{a'a''}^{d(\nu)a''}) \dots))$ и из аддитивности вариации V_m функции z по грани $B_{a'a''}^{y'a''}$ получим

$$\begin{aligned}
 S_{i_1 \dots i_m} &= S_{12 \dots m} = \sum_{\nu_1=0}^1 \cdots \sum_{\nu_m=0}^1 (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_m} V_m[z, B_{a'a''}^{d(\nu)a''}] \\
 &= V_m[z, \Delta_1(\Delta_2(\dots(\Delta_m B_{a'a''}^{d(\nu)a''}) \dots))] = V_m(z, B_{x'a''}^{y'a''}).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Для других слагаемых $S_{i_1 \dots i_m}$ суммы Σ_m мультииндекс $(i_1, \dots, i_m)$ не совпадает с $(1, 2, \dots, m)$. Поэтому хотя бы одна из первых m координат точек соответствующего бруса $(B_{a'a''}^{d(\nu)x''})_{i_1 \dots i_m}$ не зависит от ν и равна соответствующей координате точки a . Это дает возможность рассуждать, как в рассмотренном выше случае $k < m$, и получить $S_{i_1 \dots i_m} = 0$. Из сказанного ясно, что

$$\Sigma_m = S_{12 \dots m} = V_m(z, B_{x'a''}^{y'a''}).$$

Аналогично вычисляются и суммы $\Sigma_{m+1}, \dots, \Sigma_N$. Имеющиеся отличия укажем на примере суммы Σ_{m+1} . При этом удобно кратко обозначать k -мерные брусы вида $(B_a^{d(\nu)x''})_{i_1 \dots i_k}$ ($k > m$) с фиксированными индексами $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_m = m$ как

$$(B_a^{d(\nu)x''})_{12 \dots m i_{m+1} \dots i_k} \equiv (B_a^{d(\nu)x''})_{i_{m+1} \dots i_k}^*.$$

Тогда для соответствующих слагаемых суммы Σ_{m+1} получим по аналогии с (15):

$$\begin{aligned}
 S_{12 \dots m i_{m+1}} &= \sum_{\nu_1=0}^1 \cdots \sum_{\nu_m=0}^1 (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_m} V_{m+1}[z, (B_{a'a''}^{d(\nu)x''})_{i_{m+1}}^*] \\
 &= V_{m+1}[z, (B_{x'a''}^{y'a''})_{i_{m+1}}^*].
 \end{aligned}$$

Если учесть, что для остальных индексов слагаемые $S_{i_1 \dots i_m i_{m+1}}$ суммы Σ_{m+1} равны 0, как и в случае суммы Σ_m , то

$$\Sigma_{m+1} = \sum_{i_{m+1}=m+1}^N S_{12 \dots m i_{m+1}} = \sum_{i_{m+1}=m+1}^N V_{m+1}[z, (B_{x' a''}^{y' x''})_{i_{m+1}}^*].$$

Продолжая такие же вычисления, можно найти выражения для всех сумм, входящих в (14). В итоге

$$\begin{aligned} \sigma_m(\pi, B_{x' x''}^{y' x''}) &= V_m(z, B_{x' a''}^{y' a''}) + \sum_{i_{m+1}=m+1}^N V_{m+1}[z, (B_{x' a''}^{y' x''})_{i_{m+1}}^*] \\ &+ \sum_{i_{m+1}=m+1}^{N-1} \sum_{i_{m+2}=i_{m+1}+1}^N V_{m+2}[z, (B_{x' a''}^{y' x''})_{i_{m+1} i_{m+2}}^*] + \dots + V_N(z, B_{x' a''}^{y' x''}) \\ &= V_m(z, B_{x' a''}^{y' a''}) + \sum_{k=1}^{N-m} \sum_{\substack{i_{m+1} \\ m+1 \leq i_{m+1} < \dots < i_{m+k} \leq N}} \dots \sum_{i_{m+k}} V_{m+k}[z, (B_{x' a''}^{y' x''})_{i_{m+1} \dots i_{m+k}}^*]. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда ясно, что $\sigma_m(\pi, B_{x' x''}^{y' x''}) \geq 0$. Отметим также, что для бруса вида $B_x^y = B_{x' a''}^{y' a''}$ равенство (16) имеет вид

$$\sigma_m(\pi, B_x^y) = V_m(z, B_x^y).$$

Продолжая доказательство, рассмотрим квазиобъем $\sigma_m(z, B_{x' x''}^{y' x''})$. Согласно (1) и по теореме 2 (см. (8)) получим

$$\begin{aligned} \sigma_m(z, B_{x' x''}^{y' x''}) &= \sum_{\nu_1=0}^1 \dots \sum_{\nu_m=0}^1 (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_m} z[y' + \nu(x' - y'), x''] \\ &= \sum_{\nu_1=0}^1 \dots \sum_{\nu_m=0}^1 (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_m} \{z[y' + \nu(x' - y'), x''] - z(a', a'')\} \\ &= \sum_{\nu_1=0}^1 \dots \sum_{\nu_m=0}^1 (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_m} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{i_1 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N}} \dots \sum_{i_k} \sigma_k[z, (B_{a' a''}^{d(\nu) x''})_{i_1 \dots i_k}]. \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования, проводимые как и при вычислении квазиобъема $\sigma_m(\pi, B_{x' x''}^{y' x''})$ с формальной заменой в (13)–(16) вариаций $V_k(z, \cdot)$ на квазиобъемы $\sigma_k(z, \cdot)$, дают

$$\begin{aligned} \sigma_m(z, B_{x' x''}^{y' x''}) &= \sigma_m(z, B_{x' a''}^{y' a''}) \\ &+ \sum_{k=1}^{N-m} \sum_{\substack{i_{m+1} \\ m+1 \leq i_{m+1} < \dots < i_{m+k} \leq N}} \dots \sum_{i_{m+k}} \sigma_{m+k}[z, (B_{x' a''}^{y' x''})_{i_{m+1} \dots i_{m+k}}^*]. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая равенство $\mu(x) = \pi(x) - z(x)$ и линейность квазиобъема по производящей функции (см. (1)), из формул (16), (17) получим

$$\begin{aligned} \sigma_m(\mu, B_{x'x''}^{y'x''}) &= \sigma_m(\pi, B_{x'x''}^{y'x''}) - \sigma_m(z, B_{x'x''}^{y'x''}) = [V_m(z, B_{x'a''}^{y'a''}) - \sigma_m(z, B_{x'a''}^{y'a''})] \\ &+ \sum_{k=1}^{N-m} \sum_{\substack{i_{m+1} \\ m+1 \leq i_{m+1} < \dots < i_{m+k} \leq N}} \dots \sum_{i_{m+k}} \{V_{m+k}[z, (B_{x'a''}^{y'x''})_{i_{m+1} \dots i_{m+k}}^*] \\ &- \sigma_{m+k}[z, (B_{x'a''}^{y'x''})_{i_{m+1} \dots i_{m+k}}^*]\} \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из определения вариаций $V_m, \dots, V_N$.

Аналогичные выкладки и рассуждения можно провести и для других m -мерных брусов $B_x^y \subset B_a^b$. Таким образом, квазиобъемы $\sigma_m(\pi, B_x^y)$ и $\sigma_m(\mu, B_x^y)$, порождаемые функциями π и μ , неотрицательны для любых m -мерных брусов B_x^y , причем это верно для каждого m , $1 \leq m \leq N$. Поэтому согласно определению 2 $\pi(x), \mu(x) \in \mathcal{M}(B)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для того чтобы функция $z(x)$ имела конечную полную вариацию в B , необходимо и достаточно ее представление в виде $z(x) = \tilde{\pi}(x) - \tilde{\mu}(x)$, где $\tilde{\pi}(x), \tilde{\mu}(x) \in \mathcal{M}(B)$.*

В работах [1]–[3], [6], [15] изучался класс Харди $\mathcal{V}_H(B)$ функций с ограниченными вариациями. Он состоит из функций $z(x)$, заданных в $B \subset \mathbb{R}^N$, для которых при любом m ($1 \leq m \leq N$) m -мерные вариации функции z по произвольному m -мерному координатному сечению бруса B конечны. В [6], [15] указано, что необходимым и достаточным условием принадлежности $z(x) \in \mathcal{V}_H(B)$ является представимость функции в виде $z(x) = \tilde{\pi}(x) - \tilde{\mu}(x)$, где $\tilde{\pi}(x), \tilde{\mu}(x)$ – полностью монотонные функции. Поэтому из следствия 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. *Классы $\mathcal{V}(B)$ и $\mathcal{V}_H(B)$ совпадают.*

Отсюда и из следствия 1 получается

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если $z \in \mathcal{V}(B)$, то для любых $x, y \in B$, $x \leq y$, полная вариация $V(z, B_x^y)$ конечна и $|z(x) - z(y)| \leq V(z, B_x^y)$.*

4. Принцип выбора Хелли в N -мерном случае. Функции класса Харди $\mathcal{V}_H(B)$ достаточно хорошо изучены, и их свойства, дополненные результатами следствий 1, 2, 5 и теоремы 3, в основном аналогичны свойствам функций одной переменной с ограниченной вариацией. Исключение составляет принцип выбора Хелли. В литературе известен следующий вариант этого принципа при $N > 1$ (см. [7, с. 331], [8, с. 311]).

ЛЕММА 2. *Если $\{z_n(x)\} \subset \mathcal{M}(B)$ и $|z_n(x)| \leq K = \text{const}$ для любого $x \in B$, то найдутся подпоследовательность $\{z_{n_k}(x)\} \subset \{z_n(x)\}$ и функция $z(x) \in \mathcal{M}(B)$ такие, что $z_{n_k}(x)$ сходится к $z(x)$ для всех x – точек непрерывности функции $z(x)$ (т.е. “сходится в существенном”, см. [7, с. 330]).*

Таким образом, вариант принципа выбора Хелли при $N > 1$ соответствует не выбору поточечно сходящейся подпоследовательности, а выбору подпоследовательности, сходящейся “в существенном”. Тем не менее, как будет показано ниже, принцип выбора Хелли при $N > 1$ справедлив и для поточечной сходимости в классе функций $\mathcal{V}(B)$.

ЛЕММА 3. Пусть $\{z(x)\}$ – семейство, содержащее бесконечное число функций $z(x) \in \mathcal{M}(B)$, ограниченных в $B \subset \mathbb{R}^N$ одной и той же константой: $|z(x)| \leq K$. Тогда из $\{z(x)\}$ можно выбрать последовательность $\{z_n(x)\}$, поточечно сходящуюся в B к функции из класса $\mathcal{M}(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по методу математической индукции. При $N = 1$ лемма содержит известное утверждение теории монотонных функций (см. [5, с. 208]). Пусть лемма верна для функций $(N - 1)$ -й переменной. Установим ее справедливость для функций N переменных.

По лемме 2 из семейства $\{z(x)\}$ можно выбрать последовательность $\{z_n(x)\} \subset \mathcal{M}(B)$, сходящуюся к некоторой функции $z_0(x) \in \mathcal{M}(B)$ в ее точках непрерывности. При этом по лемме 1 $z_0(x)$ непрерывна в B всюду за исключением, быть может, точек, лежащих на не более чем счетном множестве координатных гиперплоскостей размерности $N - 1$. Обозначим эти гиперплоскости через Q_j ($j = 1, 2, \dots$), а их объединение – через Q . Тогда $z_n(x) \rightarrow z_0(x)$ при любом $x \in B \setminus Q$.

Введем для каждого j последовательность функций $(N - 1)$ -й переменной: $z_n^{(j)}(x) = \{z_n(x) : x \in B \cap Q_j\}$ ($n = 1, 2, \dots$). При фиксированном j каждая из функций $z_n^{(j)}(x)$ принадлежит классу $\mathcal{M}(B \cap Q_j)$. Все эти функции ограничены константой K . Поэтому согласно индукционному предположению из $\{z_n^{(1)}(x)\}$ можно извлечь поточечно сходящуюся на $B \cap Q_1$ подпоследовательность $\{z_{p_1}^{(1)}(x)\}$. Здесь $\{p_1\}$ – возрастающая бесконечная подпоследовательность индексов: $\{p_1\} \subset \{n\}$. Соответствующая подпоследовательность функций N переменных $\{z_{p_1}(x)\}$, $\{z_{p_1}(x)\} \subset \{z_n(x)\}$, будет сходитьсся не только на $B \setminus Q$, но и на $B \cap Q_1$. Аналогично, из подпоследовательности $\{z_{p_1}^{(2)}(x)\}$, $\{z_{p_1}^{(2)}(x)\} \subset \{z_n^{(2)}(x)\}$, функций $(N - 1)$ -го переменного можно выбрать сходящуюся на $B \cap Q_2$ подпоследовательность $\{z_{p_2}^{(2)}(x)\}$, $\{p_2\} \subset \{p_1\}$. Тогда подпоследовательность $\{z_{p_2}(x)\}$, $\{z_{p_2}(x)\} \subset \{z_{p_1}(x)\} \subset \{z_n(x)\}$, функций N переменных будет сходитьсся на $B \setminus Q$, $B \cap Q_1$ и $B \cap Q_2$. Продолжая этот процесс, получим цепочку подпоследовательностей функций N переменных: $\dots \subset \{z_{p_{j+1}}(x)\} \subset \{z_{p_j}(x)\} \subset \dots \subset \{z_{p_1}(x)\} \subset \{z_n(x)\}$, $j = 1, 2, \dots$, причем $\{z_{p_j}(x)\}$ сходитсся на $B \setminus Q$, $B \cap Q_1, \dots, B \cap Q_j$. Построим теперь “диагональную” подпоследовательность $\{z_i(x)\}_{i=1}^\infty$, $\{z_i(x)\} \subset \{z_n(x)\}$, в которой $z_i(x)$ есть i -й член подпоследовательности $\{z_{p_i}(x)\}$. Она сходитсся на $B \setminus Q$ и на любом множестве $B \cap Q_j$. Действительно, для каждого фиксированного j последовательность $\{z_i(x)\}_{i=1}^\infty$ при $i \geq j$ есть подпоследовательность, выбранная из $\{z_{p_j}(x)\}$, и поэтому она сходитсся на $B \cap Q_j$. Таким образом, $\{z_i(x)\}$ сходитсся всюду на B .

Обозначим предельную функцию для $\{z_i(x)\}$ как $z^*(x)$. Докажем, что $z^*(x) \in \mathcal{M}(B)$. Для этого возьмем произвольный брус B_x^y , $B_x^y \subset B$, $x \leq y$, любой размерности m , $1 \leq m \leq N$, и вычислим по формуле типа (1) квазиобъемы $\sigma_m(z_i, B_x^y)$, $\sigma_m(z^*, B_x^y)$, которые порождаются функциями $z_i(x)$ и $z^*(x)$ соответственно. Так как величины этих квазиобъемов выражаются в виде линейной комбинации значений производящей функции в вершинах бруса, то из установленной поточечной сходимости $z_i(x) \rightarrow z^*(x)$ ($i \rightarrow \infty$) в B следует, что $\sigma_m(z_i, B_x^y) \rightarrow \sigma_m(z^*, B_x^y)$. Это вместе с неотрицательностью величин $\sigma_m(z_i, B_x^y)$ для функций $z_i(x) \in \mathcal{M}(B)$ доказывает, что $\sigma_m(z^*, B_x^y) \geq 0$. Тогда по определению 2 $z^*(x) \in \mathcal{M}(B)$. Лемма доказана.

Из леммы 3, используя разложение функций $z(x) \in \mathcal{V}(B)$, данное в теореме 3, формулу (12) и рассуждая дословно так же, как и в случае $N = 1$ (см. [5, с. 209]), можно

получить аналог принципа выбора Хелли для функций N переменных с ограниченной полной вариацией.

ТЕОРЕМА 4. *Если для семейства функций $\{z(x)\} \subset \mathcal{V}(B)$, содержащего бесконечное число элементов, выполнено условие $\|z\|_V \leq K = \text{const}$, то найдется последовательность функций, принадлежащих этому семейству, которая сходится поточечно в B к функции из $\mathcal{V}(B)$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hahn H. Theorie der reellen Funktionen. I. Berlin: Springer, 1921.
- [2] Hobson E. W. The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. 3rd ed. V. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927.
- [3] Clarkson J. A., Adams C. R. On the definition of bounded variation for functions of two variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. V. 35. № 4. P. 824–854.
- [4] Витушкин А. Г. О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955.
- [5] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
- [6] Hardy G. H. On double Fourier series, and especially those which represent the double zeta-functions with real and incommensurable parameters // Quart. J. Math. Oxford. 1905. V. 37. P. 53–79.
- [7] Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье (с добавлением автора о монотонных функциях, интегралах Стильеса и гармоническом анализе). М.: Физматгиз, 1962.
- [8] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [9] Иванов Л. Д. Вариации множеств и функций. М.: Наука, 1975.
- [10] Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
- [11] Камке Э. Интеграл Лебега–Стилтьеса. М.: Физматгиз, 1959.
- [12] Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера, производная. М.: Наука, 1967.
- [13] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
- [14] Young W. H., Young G. C. On the discontinuities of monotone functions of several variables // Proc. London Math. Soc. (2). 1924. V. 22. P. 124–142.
- [15] Adams C. R., Clarkson J. A. Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. № 4. P. 711–730.

Московский инженерно-физический институт

Поступило
22.04.96