Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Замкнутые идеалы голоморфных функций с двумя порождающими, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 604–609

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:58:06

УДК 517.53+517.98

ЗАМКНУТЫЕ ИДЕАЛЫ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ДВУМЯ ПОРОЖДАЮЩИМИ

Б. Н. Хабибуллин

Для широкого класса алгебр $\mathcal{P}$ голоморфных функций в области из $\mathbb{C}$ получены достаточные условия, при которых замкнутый идеал $I \subset \mathcal{P}$ является 2-порожденным. Библиография: 10 названий.

Пусть Ω – область комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $H(\Omega)$ – пространство всех голоморфных в Ω функций. Всюду ниже $\mathcal{P} \subset H(\Omega)$ – некоторая отделимая локально выпуклая алгебра над полем $\mathbb{C}$, содержащая кольцо полиномов $\mathbb{C}[z]$, с обычными поточечными сложением и умножением и с топологией, мажорирующей топологию поточечной сходимости на Ω . Для краткости называем $\mathcal{P}$ просто *алгеброй*. В частности, алгебра $\mathcal{P}$ – топологический модуль над $\mathbb{C}[z]$, и каждый идеал в $\mathcal{P}$ – одновременно подмодуль над $\mathbb{C}[z]$ в $\mathcal{P}$.

Замкнутый идеал I в $\mathcal{P}$ *k-порожденный* (в топологическом смысле), если для некоторого набора k элементов $g_1, \dots, g_k \in I$ он совпадает с замыканием в $\mathcal{P}$ множества элементов вида $p_1 g_1 + \dots + p_k g_k$, где $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$. Идеал *главный*, если он 1-порожденный. На основе программных исследований Красичкова-Терновского [1], [2] в данной заметке предъясняются признаки того, что *замкнутый идеал I алгебры $\mathcal{P}$ является 2-порожденным*. Терминология взята из [1], [2].

По данной тематике для $\Omega = \mathbb{D}$ можно обратиться к библиографии в обзоре Никольского [3], а по поводу весовых алгебр, в которых все замкнутые идеалы главные, – к работе Шамояна [4]. В весовых алгебрах целых функций, определяемых радиальной мажорантой медленного роста, каждый замкнутый идеал является 2-порожденным [5, § 5] не только в топологическом, но и в алгебраическом смысле [6] (ср. с примером 1 в конце заметки). При этом не каждый замкнутый идеал главный, например, в алгебрах функций конечного типа при целом порядке. Связь рассматриваемого вопроса с теоремами о короне здесь не обсуждается.

Всюду в работе под последовательностью в Ω понимается пустая, конечная или бесконечная последовательность вида

$$\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \Omega, \quad \text{где } n = 1, 2, \dots,$$

не имеющая предельных точек в Ω , с возможно повторяющимися точками. Функция, равная в каждой точке $\lambda \in \Omega$ числу повторений этой точки в последовательности Λ , –

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-01-00770 и, частично, № 02-01-00030.

дивизор последовательности Λ , за которым сохраняем то же обозначение Λ . Отношения и операции $=, \subset, \setminus, \cup, \cap$ для последовательностей определяются соответственно через поточечные отношения и операции $\equiv, \leq, -, +, \min$ для их дивизоров.

Для ненулевой функции $f \not\equiv 0$ из $H(\Omega)$ последовательность всех нулей функции f , перенумерованную с учетом кратности, обозначаем Z_f . Если, напротив, $f \equiv 0$, то по определению как множество $Z_f = \Omega$ и дивизор $Z_f(\lambda) \equiv \infty$.

Для идеала $I \subset \mathcal{P}$ полагаем

$$Z_I \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{f \in I} Z_f$$

– последовательность нулей идеала I и

$$I(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \cup \{f \in \mathcal{P} : \Lambda \subset Z_f\}$$

для последовательности $\Lambda \subset \Omega$. Очевидно, $I(\Lambda)$ – идеал.

Алгебра $\mathcal{P}$ называется *устойчивой* (относительно деления на двучлены $z - \lambda$), если для любых функции $f \in \mathcal{P}$ и точки $\lambda \in \mathbb{C}$ из условия $f(z)/(z - \lambda) \in H(\Omega)$ следует $f(z)/(z - \lambda) \in \mathcal{P}$.

Идеал $I \subset \mathcal{P}$ допускает локальное описание, или является обильным¹ [1], [2], если $I = I(Z_I)$. Если алгебра $\mathcal{P}$ устойчива, то по построению идеал вида $I(\Lambda)$ обильный.

Идеал $I \subset \mathcal{P}$ устойчив [1]–[3], если для любой функции $f \in I$ выполнено $f(z)/(z - \lambda) \in I$ в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ и во всех точках $\lambda \in \Omega$, для которых $Z_f(\lambda) > Z_I(\lambda)$.

Алгебра $\mathcal{P}$ называется *равномерно устойчивой* [1], [2], если для любой окрестности нуля $V \subset \mathcal{P}$ найдется окрестность нуля $U \subset \mathcal{P}$ такая, что множество

$$\left\{ \frac{f(z)}{z - \lambda} \in H(\Omega) : f \in U, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

содержится в V .

Алгебра $\mathcal{P}$ *b-устойчива* [1], [2] (в [3], наоборот, равномерно устойчива), если для каждого ограниченного множества $B \subset \mathcal{P}$ множество

$$\left\{ \frac{f(z)}{z - \lambda} \in H(\Omega) : f \in B, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

содержится в $\mathcal{P}$ и ограничено в нем.

Очевидно, как равномерно устойчивая, так и *b-устойчивая* алгебра $\mathcal{P}$ устойчива. Алгебра $\mathcal{P}$ *аналитически уплотненная* [2, § 5], если для любой конечной системы $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{P}$ множество

$$\{f \in H(\Omega) : |f(z)| \leq |f_1(z)| + \dots + |f_k(z)|, z \in \Omega\}$$

содержится в $\mathcal{P}$ и ограничено в нем.

Основной результат нашей заметки, анонсированный в [7, теорема А] следующий.

¹Такой идеал разные авторы еще называют *дивизориальным*, *локальным* [3], *насыщенным*, *определяемым* (представляемым) нулями и пр.

ТЕОРЕМА. Пусть аналитически уплотненная алгебра $\mathcal{P} \subset H(\Omega)$

[us] равномерно устойчива или

[bs] b -устойчива и является борнологическим пространством.

Если замкнутый идеал I содержит функцию $\ell \neq 0$, порождающую обильный главный идеал I_ℓ в $\mathcal{P}$, то он 2-порожденный и обильный. Точнее, в I найдется функция $g \neq 0$, которая в паре именно с ℓ порождает I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение функции g имеет определенное сходство с конструкцией при доказательстве одного результата в [8, теорема 2].

Не умаляя общности, всегда можем считать, что $0 \in \Omega$ и $0 \notin Z_\ell$, т.е. $\ell(0) \neq 0$. Пусть

$$\Lambda = Z_\ell \setminus Z_I = \{\lambda_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Далее $D(\lambda, \beta)$ – открытый круг с центром в λ радиуса β .

Для построения второй функции g подберем последовательность чисел $\{\beta_n\}$ такую, что

$$0 < \beta_n < \min \left\{ \frac{|\lambda_n|}{2}, \text{dist}(\lambda_n, \partial\Omega) \right\},$$

где $\text{dist}(\lambda, \partial\Omega)$ – расстояние от точки λ до границы $\partial\Omega$ области Ω , и выполнено

$$\sup_{z \in D(\lambda_n, \beta_n)} |\ell(z)| \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а пересечения $D(\lambda_n, \beta_n) \cap D(\lambda_k, \beta_k)$ пусты при всех $\lambda_n \neq \lambda_k$.

Положим

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \geq 1} D(\lambda_n, \beta_n).$$

В частности, $|\ell(z)| \leq 1$ при $z \in E$.

Затем выберем последовательность $\{\alpha_n\}$ так, что

$$0 < \alpha_n \leq \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} < \infty.$$

Построим последовательность $\Gamma = \{\gamma_n\} \subset \Omega$ так, что пересечение $\Lambda \cap \Gamma$ пусто и $\gamma_n \in D(\lambda_n, \alpha_n)$, $n = 1, 2, \dots$. В частности, для всех n выполнено

$$|\gamma_n| \geq |\lambda_n| - \alpha_n \geq |\lambda_n| - \beta_n \geq \frac{|\lambda_n|}{2} \geq \beta_n.$$

С учетом этой оценки, условия $\gamma_n \in D(\lambda_n, \alpha_n)$ и сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} < \infty$$

имеем равномерную по $m \leq \infty$ и $z \notin E$ оценку

$$\begin{aligned} \left| \prod_{n=1}^m \frac{1 - z/\gamma_n}{1 - z/\lambda_n} \right| &= \prod_{n=1}^m \left| \frac{\lambda_n}{\gamma_n} \right| \cdot \left| \frac{z - \gamma_n}{z - \lambda_n} \right| \leq \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{|\lambda_n - \gamma_n|}{|\gamma_n|} \right) \cdot \left(1 + \frac{|\lambda_n - \gamma_n|}{|z - \lambda_n|} \right) \\ &\leq \prod_{z \notin E} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{|\lambda_n - \gamma_n|}{\beta_n} \right)^2 \leq \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)^2 \\ &\leq \exp \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right) = M < \infty, \quad z \notin E. \end{aligned}$$

Отсюда для функций

$$\ell_m(z) = \prod_{n=1}^m \left(1 - \frac{z}{\gamma_n} \right) \frac{\ell(z)}{1 - z/\lambda_n} \in H(\Omega)$$

получаем оценку

$$|\ell_m(z)| \leq M \cdot |\ell(z)|, \quad z \notin E, \quad m = 1, 2, \dots$$

Из этой оценки и из оценки $|\ell(z)| \leq 1$, справедливой по построению при $z \in E$, применяя к голоморфной функции ℓ_m принцип максимума в каждом круге $D(\lambda_n, \beta_n)$ при $n \leq m$, имеем $|\ell_m(z)| \leq M$ при всех $z \in E$. Таким образом, $|\ell_m(z)| \leq |M\ell(z)| + M$ для всех $z \in \Omega$. При этом по построению $\ell_m(0) = \ell(0) \neq 0$. По теореме Монтеля некоторая подпоследовательность последовательности $\{\ell_m\}$ сходится равномерно на компактах в Ω к некоторой функции $g \in H(\Omega)$, $g(0) = \ell(0) \neq 0$. Равномерная сходимость последовательности $\{\ell_m\}$ на компактах в Ω влечет такую же сходимость при каждом $k = 1, 2, \dots$ последовательности производных $\{\ell_m^{(k)}\}$ порядка k . Следовательно,

$$Z_g = (Z_\ell \setminus \Lambda) \cup \Gamma = Z_I \cup \Gamma.$$

При этом $|g(z)| \leq |M\ell(z)| + M$, $z \in \Omega$. Ввиду аналитической уплотненности $\mathcal{P}$ функция $g \not\equiv 0$ принадлежит $\mathcal{P}$.

В устойчивой алгебре, содержащей константу, всякий идеал устойчив [2, предложение 4.11], [3, 8.1.1.]. Значит, как идеал I , так и идеал $I_{\ell, g}$, порожденный парой функций ℓ, g , устойчивы. Из условий на алгебру $\mathcal{P}$ также следует, что всякий замкнутый устойчивый идеал I , содержащий обильный идеал, обильный [2, предложение 6.4]². Следовательно, как идеал I , так и идеал $I_{\ell, g}$ обильные, как содержащие обильный идеал I_ℓ . По построению пересечение $\Lambda \cap \Gamma$ пусто, стало быть, последовательность нулей идеала $I_{\ell, g}$ есть последовательность $Z_\ell \cap Z_g = Z_I$. Два обильных идеала с одинаковыми последовательностями нулей совпадают, т.е. $I_{\ell, g} = I(Z_I) = I$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в алгебре $\mathcal{P}$ из теоремы все главные идеалы обильны или она замкнута относительно деления:

$$\left(f, g \in \mathcal{P}, \frac{f}{g} \in H(\Omega) \right) \implies \frac{f}{g} \in \mathcal{P}.$$

Тогда каждый замкнутый идеал в $\mathcal{P}$ 2-порожденный.

²В [2] этот результат сформулирован для подмодулей над $\mathbb{C}[z]$ локального ранга 1, но в нашем случае все справедливо и для идеалов (см. первый абзац статьи), поскольку любое подмножество в $H(\Omega)$, отличное от $\{0\}$, имеет локальный ранг 1 (см. [1, § 1, п. 3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях следствия в алгебре $\mathcal{P}$, замкнутой относительно деления, все замкнутые идеалы (в частности, главные) обильны [2, предложение 6.11].

Укажем некоторые общие типы пространств $\mathcal{P}$, находящиеся в рамках действия теоремы или следствия. Конкретные примеры, являющиеся новыми результатами, даны в конце статьи (см. примеры 1–3) только для алгебр целых функций.

Пусть $\mathcal{M} = \{m\}$ – некоторое семейство функций в области Ω , $m \geq 1$ на Ω . Введем (см., например, [3, п. 8]) пространства

$$H_m = \left\{ f \in H(\Omega) : \|f\|_m \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left(\frac{|f|}{m} \right) < +\infty \right\}$$

с нормой $\|f\|_m$ (до конца заметки рассматривается поточечный $\sup$ по всем точкам z из Ω) и положим

$$H_{\mathcal{M}}^{\text{ind}} = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} H_m, \quad H_{\text{proj}}^{\mathcal{M}} = \bigcap_{m \in \mathcal{M}} H_m.$$

Введем функцию

$$d(z) = \max \left\{ \frac{1}{\text{dist}(z, \partial\Omega)}, (1 + |z|) \right\}, \quad z \in \Omega.$$

В случае $H_{\mathcal{M}}^{\text{ind}}$ (соответственно $H_{\text{proj}}^{\mathcal{M}}$) наложим на систему весов $\mathcal{M}$ ограничение

[а] для любых $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ (соответственно любого $m \in \mathcal{M}$) найдется $m \in \mathcal{M}$ (соответственно найдутся $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$) со свойством $\sup(dm_1 m_2 / m) < \infty$.

Снабдив систему $\mathcal{M}$ отношением частичного порядка “поточечно $\leq$ на Ω ”, можно ввести топологию индуктивного (соответственно проективного) предела на $H_{\mathcal{M}}^{\text{ind}}$ (соответственно $H_{\text{proj}}^{\mathcal{M}}$). При условии [а] эти пространства – топологические алгебры, содержащие многочлены и, как нетрудно показать [9, теорема 2], удовлетворяющие условиям устойчивости теоремы – [bs] или [us] для случаев соответственно ind или proj . Следовательно, теорема и следствие применимы к таким алгебрам.

Ниже $\Omega = \mathbb{C}$ и применяется только следствие. Ссылки в примерах 1–3 – источник сведений об обильности всех замкнутых (примеры 1, 3) или главных (пример 2) идеалов в рассматриваемых алгебрах.

ПРИМЕР 1. Пусть выполнено условие [а]. При радиальных $m(z) = m(|z|)$, $m \in \mathcal{M}$, $z \in \mathbb{C}$, все замкнутые идеалы в $H_{\mathcal{M}}^{\text{ind}}$ и $H_{\text{proj}}^{\mathcal{M}}$ 2-порожденные (см. [3, 8.3.8]).

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathcal{M}_p = \{\exp(\alpha p(z))\}$, $\alpha > 0$. Для $p(z) = |\text{Im } z|^p + |\text{Re } z|^q$ с $\rho, q > 0$, в алгебрах $H_{\mathcal{M}_p}^{\text{ind}}$ при $\rho \geq 1$ и в алгебрах $H_{\text{proj}}^{\mathcal{M}_p}$ при $\rho > 1$ все замкнутые идеалы 2-порожденные (см. [10, теоремы 2.1, 2.2]).

ПРИМЕР 3. Пусть $p(z) = \varphi(|\text{Im } z|) + a(z)$, где $\varphi \geq 0$ – возрастающая выпуклая функция медленного роста, т.е. $\varphi(2x) \leq O(\varphi(x))$, $x \geq 0$, и $a \geq 0$ – субгармоническая функция, $a(z) \leq O(\varphi(|z|))$, или $p(z) = \varphi(|\text{Im } z|) + \psi(|\text{Re } z|)$, где $\varphi, \psi \geq 0$ – возрастающие выпуклые функции медленного роста. Тогда в алгебре $H_{\mathcal{M}_p}^{\text{ind}}$ все замкнутые идеалы 2-порожденные (см. [5, теоремы 6.13, 6.14]).

Особо отметим, что пример 3 (первый вариант выбора p) охватывает и классическую (см. [8]) алгебру Л. Шварца $H_{\mathcal{M}_p}^{\text{ind}}$ с весом $p(z) = |\text{Im } z| + \ln(1 + |z|^2)$.

Теорема и следствие применимы и ко многим весовым алгебрам голоморфных функций с интегральными весами. Применения полученных результатов к задаче спектрального синтеза и к уравнениям свертки и распространение их на замкнутые подмодули над $\mathbb{C}[z]$ будут рассмотрены в ином месте.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Красичков-Терновский И. Ф. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 44–66.
- [2] Красичков-Терновский И. Ф. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 309–341.
- [3] Никольский Н. К. Элементарное описание методов локализации идеалов // Записки науч. семин. ЛОМИ. 1989. Т. 170. С. 207–232.
- [4] Шамоян Ф. А. Теоремы деления и замкнутые идеалы в алгебрах аналитических функций с мажорантой конечного роста // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1980. Т. 15. № 4. С. 323–331.
- [5] Kelleher J. J., Taylor B. A. Closed ideals in locally convex algebras of analytic functions // J. Reine Angew. Math. 1972. V. 255. P. 190–209.
- [6] Braun R. W. Weighted algebras of entire functions in which each closed ideal admits two algebraic generators // Mich. Math. J. 1987. V. 34. № 3. P. 441–450.
- [7] Хабибуллин Б. Н. Замкнутые идеалы и подмодули голоморфных функций с двумя порождающими // Геометрическая теория функций и краевые задачи. Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 13. Казань, 2002. С. 158–163.
- [8] Squires W. A. Necessary conditions for universal interpolation in $\widehat{\mathcal{E}}'$ // Canad. J. Math. 1981. V. 33. № 6. P. 1356–1364.
- [9] Хабибуллин Б. Н. Замкнутые подмодули голоморфных функций, порожденные подмодулями, допускающими локальное описание // Геометрическая теория функций и краевые задачи. Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 14. Казань, 2002. С. 280–298.
- [10] Metzger J. J. Principal local ideals in weighted spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 165. P. 149–158.

Башкирский государственный университет
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Поступило
28.01.2003