Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Э. Михайловский, Мозаичные аппроксимации дискретных аналогов операторов Кальдерона–Зигмунда, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 81–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 10:14:20

УДК 517

МОЗАИЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ ОПЕРАТОРОВ КАЛЬДЕРОНА–ЗИГМУНДА

Н. Э. Михайловский

Получены асимптотические оценки вида $\text{tr} A = O(\ln N \cdot \ln^d \varepsilon^{-1})$, где d – размерность исходного пространства, мозаичных рангов дискретных аналогов операторов Кальдерона–Зигмунда для различных мозаичных покрытий.

Библиография: 18 названий.

Введение. В последнее время там, где от вычислителя требуется конкретный результат, все чаще используются постановки задач математической физики в виде интегральных уравнений. Формально такие постановки после аппроксимаций типа Галёркина–Петрова в конечноэлементных базисах приводят к плотным матрицам. Это означает, что нужно хранить N^2 элементов матрицы, а это при характерных для наиболее сложных задач порядках ($N \approx 10\,000$) недопустимо много. Кроме того, решение систем с такими матрицами требует гигантских затрат машинного времени. Прямолинейное использование традиционных прямых методов дает асимптотику $O(N^3)$, и даже если надеяться, что какой-то итерационный метод сойдется за $O(1)$ итераций, то все равно сложность решения останется $O(N^2)$ (а ведь нам неизвестны оценки скорости сходимости в наиболее интересных случаях).

С другой стороны, есть все основания полагать, что $O(N^2)$ элементов плотной матрицы являются не очень сложными функциями значительно меньшего числа параметров. Эти параметры, описывающие геометрию рассматриваемого тела или области, даже в наиболее сложных инженерных задачах исчисляются всего лишь сотнями. К сожалению, существующие методы аппроксимации для сложных векторных трехмерных задач имеют невысокий порядок и, как следствие, требуют вычисления $O(10^9)$ матричных элементов. К счастью, при невысоком порядке аппроксимации среди них все равно не слишком много (порядка $O(N \ln^7 N)$) действительно независимых.

Наиболее ранние подходы, основанные на такой уверенности, использовали точную алгебраическую структуру матриц, возникающих при аппроксимации интегральных уравнений в областях специального вида. Алгебраическая структура заключалась, как правило, в блочной и (или) многократной теплицевости – такие подходы хорошо описаны в [1]–[3]. К сожалению, при аппроксимации интегральных уравнений в достаточно сложных областях на такую структуру рассчитывать не приходится.

Следующий (по времени) подход – мультипольный метод, впервые предложенный В. Рохлиным [4] и разрабатывавшийся в [5]–[8]. В нем область определения интегрального уравнения разбивается на иерархию подобластей; для каждой подобласти выделяются ближняя и дальняя зоны и производится рекурсивная процедура разложения

поля в соответствующих окрестностях нуля и бесконечности. “Быстрый” вариант метода имеет асимптотику $O(N \ln N \cdot \ln^4 \varepsilon^{-1})$ действий, “медленные” – $O(N^\gamma \ln^4 \varepsilon^{-1})$, $\gamma \in (1, 2)$. Присутствующий в этой оценке множитель $\ln^4 \varepsilon^{-1}$ может быть достаточно большим.

Почти одновременно возник метод регулярной сетки, предложенный впервые, видимо, Ю. М. Нечепуренко [9] и независимо развивавшийся А. Брандтом и др. (см., например, [10]). В нем дискретизированная задача поднимается в дискретное пространство большей размерности, но соответствующее регулярной сетке в области регулярной структуры.

В работах [11], [12] было предложено использование разреженной сетки для вычисления действия каждой из неизвестных на остальные. Сетки выбирались для каждой из неизвестных индивидуально, но из заданного набора. Сложность при этом оценивалась как $N \ln^2 N \cdot \ln^d \varepsilon^{-1}$, где d – размерность пространства, в котором задано исходное уравнение. Этот метод непосредственно примыкает к более позднему методу скелетов [13], который мы и развиваем в данной статье.

Заслуживает отдельного упоминания и ставшие популярными в последнее время методы, основанные на использовании локальных волн (*wavelets*). Это направление, по-видимому, было заложено в [14].

Следует отметить, что все упомянутые методы могут рассматриваться и как операторные методы (т.е. методы аппроксимации исходного операторного уравнения), и как методы матричные (т.е. аппроксимирующие уже дискретные аналоги операторов). В качестве недостатка последних часто отмечают необходимость вычислять $O(N^2)$ элементов исходной аппроксимации. Этот недостаток, по-видимому, можно обойти с помощью псевдоскелетных разложений [15]. Неоспоримым же преимуществом матричных методов является возможность использовать готовые методы аппроксимации исходного интегрального уравнения, а в некоторых задачах с не вполне ясной теорией работающий метод аппроксимации можно подобрать лишь экспериментально, что является трудоемкой и нетривиальной задачей.

В данной статье мы стараемся с единой точки зрения проанализировать различные мозаичные аппроксимации дискретных аналогов операторов Кальдерона–Зигмунда. Наряду с уже упомянутыми методами из [4], [11], для которых мы улучшаем оценки на мозаичные ранги, полученные ранее в [13], мы предлагаем и новые мозаичные покрытия. При этом асимптотическая сложность умножения на дискретные аналоги одномерных операторов Кальдерона–Зигмунда оказывается равной $O(N \ln N \cdot \ln \varepsilon)$, что улучшает оценки [12] и обобщает оценки [4], [5]. Таким образом мы показываем, что метод скелетов является одним из наиболее мощных средств аппроксимации дискретных аналогов операторов Кальдерона–Зигмунда.

Дальнейшее изложение построено следующим образом: в п. 1 мы вводим понятия мозаичных рангов, матриц и аппроксимаций, в п. 2 приводим асимптотические оценки на мозаичные ранги дискретных аналогов одномерных операторов Кальдерона–Зигмунда; п. 3 содержит обобщения теорем из предыдущего раздела на многомерный случай.

1. Мозаичные ранги и матрицы. Изложим в соответствии с [13] *теорию мозаичных разбиений и рангов*. Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ имеет ранг r . Используя ее скелетное разложение

$$A = \sum_{i=1}^r u_i v_i^T,$$

мы можем эффективно вычислять матрично-векторное произведение $y = Ax$:

- 1) вычислить скаляры $\alpha_i = v_i^T x$;
- 2) вычислить вектор $y = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i$.

Вместо обычных mn сложений-умножений такой алгоритм требует только $r(m+n)$ операций; точно так же сокращаются требования к необходимой памяти:

$$\text{ПАМЯТЬ} = \text{РАНГ} \cdot (m+n).$$

К сожалению, невырожденную матрицу “сжать” таким образом невозможно. Попробуем ввести *мозаичный ранг* (который будет мал и для многих невырожденных матриц) так, чтобы формула

$$\text{ПАМЯТЬ} = \text{МОЗАИЧНЫЙ РАНГ} \cdot (m+n)$$

осталась верной.

Пусть B – некоторая подматрица матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Можно, вообще говоря, не требовать ее прямоугольности. Символом $\Gamma(B)$ будем обозначать матрицу $m \times n$, совпадающую с A в позициях, определяемых подматрицей B , и имеющую нули в остальных позициях.

Набор блоков A_i назовем *покрытием* A , если $A = \sum_i \Gamma(A_i)$, и *мозаичным разбиением* A , если $\Gamma(A_i)$ не имеют общих ненулевых элементов. Соответственно матрицу A в обоих случаях будем называть *мозаичной*.

Будем называть блочное разбиение матрицы *стандартным*, если оно получается путем рассечения матрицы вертикальными и горизонтальными линиями. Если каждый блок мозаичного разбиения входит в стандартное разбиение некоторого другого блока (или всей матрицы), мозаичное разбиение будем называть *регулярным*.

Мозаичный ранг A относительно некоторого фиксированного покрытия определяется следующим образом:

$$\text{mr } A = \frac{\sum_i \text{mem } A_i}{m+n}, \quad \text{где } \text{mem } A_i = \min\{m_i n_i, \text{rank } A_i(m+n)\}.$$

2. Оценки мозаичных рангов дискретных аналогов одномерных операторов Кальдерона–Зигмунда. В этом пункте мы получим асимптотические оценки на мозаичные ранги дискретизаций типа Галёркина–Петрова для одномерных операторов Кальдерона–Зигмунда. Точнее, мы получим для двух мозаичных разбиений и одного покрытия формулы вида

$$\text{mr } A_M = f(\varepsilon, N), \quad \|R\|_F = \|A - A_M\|_F \leq \varepsilon,$$

где $\|\cdot\|_F$ – фробениусова норма, A – матрица дискретизации, а A_M – ее мозаичная аппроксимация, верные при достаточно больших N и не учитывающие зависящие лишь от оператора и способа дискретизации факторы. Мы также получим формулы вида

$$\text{mr } A_M = f(N), \quad \|R\|_F = \|A - A_M\|_F = O(N^{-p}),$$

соответствующие предположению о p -м порядке аппроксимации типа Галёркина–Петрова и согласовании ошибок дискретизации и мозаичной аппроксимации.

Все аппроксимации будем считать принадлежащими одному семейству, параметризованному размером N .

Пусть системы функций $\Phi(x), \Psi(x)$ из N элементов каждая задают метод типа Галёркина–Петрова [16], [17] для оператора $\mathbf{A}$ с ядром K . Мы будем рассматривать матрицу A , аппроксимирующую оператор $\mathbf{A}$ методом типа Галёркина–Петрова с базисными функциями $\Phi(x)$ и тестовыми функциями $\Psi(x)$. Будем считать, что подмножества $\tilde{\Phi}(x) \subset \Phi(x)$, $\tilde{\Psi}(x) \subset \Psi(x)$ таковы, что их носители не пересекаются ($\text{supp } \tilde{\Phi}(x) \cap \text{supp } \tilde{\Psi}(y) = \emptyset$) и соответствующая этим подмножествам матрица $\tilde{A}$ есть внедиагональная подматрица матрицы A .

Предположим дополнительно, что все базисные функции интегрируемы в обобщенном смысле, т.е.

$$\left\| \int \tilde{\Psi}(x) dx \right\| \leq C |\text{supp } \tilde{\Psi}(x)|, \quad (1)$$

где $\|\cdot\|$ – векторная норма в соответствующем многомерном пространстве и $|\text{supp } \cdot|$ – мера носителя системы функций. Это предположение выполняется для популярных аппроксимаций типа Бубнова–Галёркина в конечноэлементных базисах и коллокации.

Пусть $K(x, y)$ есть ядро оператора Кальдерона–Зигмунда, т.е. (см. [18])

$$|K(x, y)| \leq \frac{1}{|x - y|}, \quad (2)$$

$$|\partial_x^M K(x, y)| + |\partial_y^M K(x, y)| \leq \frac{C_0}{|x - y|^{1+M}} \quad (3)$$

для некоторого $M \geq 1$. Это означает, в частности, что $\exists \zeta, \eta(x) \in \text{supp } \tilde{\Psi}(y)$ такие, что на прямоугольнике $\text{supp } \tilde{\Phi}(x) \times \text{supp } \tilde{\Psi}(y)$

$$K(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(y - \zeta)^i}{i!} \frac{\partial^i K(x, y)}{\partial y^i} \Big|_{y=\zeta} + \frac{(y - \eta(x))^M}{M!} \frac{\partial^M K(x, y)}{\partial y^M} \Big|_{y=\eta(x)}. \quad (4)$$

Для подматрицы $\tilde{A}$ из этого разложения Тейлора следует возможность малоранговой аппроксимации

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \tilde{\Psi}(y) \tilde{\Phi}^T(x) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(y - \zeta)^i}{i!} \frac{\partial^i K(x, y)}{\partial y^i} \Big|_{y=\zeta} \\ &\quad + \frac{(y - \eta(x))^M}{M!} \frac{\partial^M K(x, y)}{\partial y^M} \Big|_{y=\eta(x)} \tilde{\Psi}(y) \tilde{\Phi}^T(x) dx dy \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{i!} \left(\int_0^1 (y - \zeta)^i \tilde{\Psi}(y) dy \right) \left(\int_0^1 \frac{\partial^i K(x, y)}{\partial y^i} \Big|_{y=\zeta} \tilde{\Phi}(x) dx \right)^T \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \frac{(y - \eta(x))^M}{M!} \frac{\partial^M K(x, y)}{\partial y^M} \Big|_{y=\eta(x)} \tilde{\Psi}(y) \tilde{\Phi}^T(x) dx dy \\ &= \tilde{A}_L + \tilde{R}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tilde{A}_L$ – малоранговая аппроксимация $\tilde{A}$, а $\tilde{R}$ – ошибка аппроксимации.

Из (3) и (5) следует

ЛЕММА 2.1. При предположениях (1)–(4) ошибка

$$\|\tilde{R}\|_F \leq C_0 \frac{|\supp \tilde{\Psi}(y)|^M \|\int_0^1 \tilde{\Psi}(y) dy\| \cdot \|\int_0^1 \tilde{\Phi}(y) dy\|}{M! \operatorname{dist}(\supp \tilde{\Phi}(x), \supp \tilde{\Psi}(x))^{M+1}}, \quad (6)$$

где $\operatorname{dist}(\cdot, \cdot)$ – расстояние между двумя отрезками на прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для элемента $\tilde{r}_{ij}$ матрицы невязки $\tilde{R}$ имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{r}_{ij}| &= \left| \int_0^1 \int_0^1 \frac{(y - \eta(x))^M}{M!} \frac{\partial^M}{\partial y^M} K(x, y) \Big|_{y=\eta(x)} \tilde{\psi}_i(y) \tilde{\varphi}_j(x) dx dy \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\supp \tilde{\psi}_i(y)|^M}{M!} \frac{C_0}{|x - y|^{M+1}} \tilde{\psi}_i(y) \tilde{\varphi}_j(x) dx dy \right| \\ &\leq \frac{|\supp \tilde{\Psi}(y)|^M}{M!} \frac{C_0}{\operatorname{dist}(\supp \tilde{\Phi}(x), \supp \tilde{\Psi}(x))^{M+1}} \left| \int_0^1 \tilde{\psi}_i(y) dy \right| \cdot \left| \int_0^1 \tilde{\varphi}_j(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Поэтому для матрицы невязки $\tilde{R}$ получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}\|_F &= \sqrt{\sum_{i,j} r_{ij}^2} \\ &= \left(\sum_{i,j} \left(\frac{C_0 |\supp \tilde{\Psi}(y)|^M}{M! \operatorname{dist}(\supp \tilde{\Phi}(x), \supp \tilde{\Psi}(x))^{M+1}} \left| \int_0^1 \tilde{\psi}_i(y) dy \right| \cdot \left| \int_0^1 \tilde{\varphi}_j(x) dx \right| \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C_0 |\supp \tilde{\Psi}(y)|^M}{M! \operatorname{dist}(\supp \tilde{\Phi}(x), \supp \tilde{\Psi}(x))^{M+1}} \left(\sum_{i,j} \left| \int_0^1 \tilde{\psi}_i(y) dy \right|^2 \left| \int_0^1 \tilde{\varphi}_j(x) dx \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_0 \frac{|\supp \tilde{\Psi}(y)|^M \|\int_0^1 \tilde{\Psi}(y) dy\| \cdot \|\int_0^1 \tilde{\Phi}(y) dy\|}{M! \operatorname{dist}(\supp \tilde{\Phi}(x), \supp \tilde{\Psi}(x))^{M+1}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь несколько мозаичных покрытий матрицы A с мозаичным рангом $o(N)$.

2.1. *Регулярное мозаичное разбиение.* Рассмотрим сначала следующее регулярное мозаичное разбиение 1.

Шаг 0. Выберем натуральные числа $p, q, p > 1$. Будем считать, что N делится на p^k .

Шаг 1. Разобьем матрицу A на p^2 одинаковых квадратных блоков.

Шаг k . Все блоки, полученные на уровне $k - 1$, для которых не выполнено

$$\frac{\operatorname{dist}(\supp \tilde{\Phi}(x), \supp \tilde{\Psi}(y))}{|\supp \tilde{\Psi}(y)|} \geq q, \quad (7)$$

разобьем на p^2 одинаковых квадратных блоков.

ЛЕММА 2.2. После k шагов разбиения 1 остается $p^k(2q + 1) - 2$ блоков, для которых не выполняется (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После k шагов разбиения 1 получившееся блочное разбиение вкладывается в стандартное блочное разбиение с размером блока N/p^k . В нем условие (7) не выполняется для полосы полушириной q , что и дает результат данной леммы.

ЛЕММА 2.3. Пусть разбиение 1 применяется к матрице A k шагов, и все блоки, для соответствующих которым функций выполняется (7), аппроксимируются матрицами ранга M , а остальные используются в точном представлении. Тогда ошибка получающейся мозаичной аппроксимации

$$\|R\|_F \leq \frac{Ck}{M!q^M}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l – такое число, при котором впервые выполнится $p^l \geq 2q + 1$. Применяя к каждому блоку лемму 2.1, получим для ошибки

$$\begin{aligned} & \frac{C_0}{M!} \sum_{A_i} \frac{|\operatorname{supp} \tilde{\Psi}_i(y)|^M \left\| \int_0^1 \tilde{\Phi}(y) dy \right\| \cdot \left\| \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(y) dy \right\|}{\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \tilde{\Phi}_i(x), \operatorname{supp} \tilde{\Psi}_i(x))^{M+1}} \\ &= \frac{C_0}{M!} \sum_{j=q}^{p^{l/2+2}} \frac{1}{j^{M+1}} \left(\frac{p^l}{2} - j - 1 \right) \sum_{s=1}^{k-l} (p^s - 1) \left\| \int_0^1 \tilde{\Phi}_{sj}(y) dy \right\| \leq \frac{Ck}{M!q^M}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.4. Пусть разбиение 1 применяется к матрице A k шагов, и все блоки, для соответствующих которым функций выполняется (7), аппроксимируются матрицами ранга M , а остальные используются в точном представлении. Тогда

$$\operatorname{mr} A_M \leq C_1(2q + 1)p^{-k}N + C_2kM. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с леммой 2.2 затраты на хранение неаппроксимированной (диагональной) части матрицы A составляют

$$\left(\frac{N}{p^k} \right)^2 (p^k(2q + 1) - 2) = C_1(2q + 1)p^{-k}N^2.$$

На хранение аппроксимаций на каждом шаге разбиения 1 требуется не более $4MN$ единиц памяти, откуда и следует утверждение данной леммы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathbf{A}$ – оператор, для которого при некотором M выполняется условие (3), и пусть A – матрица аппроксимации типа Галёркина–Петрова оператора $\mathbf{A}$ с базисными функциями $\Phi(x)$ и тестовыми функциями $\Psi(x)$ такими, что для них выполняется условие (1). Тогда по заданному ε можно выбрать параметры k, p, q разбиения 1 так, что для получающейся мозаичной матрицы A_M , в которой все блоки, для соответствующих которым функций выполняется (7), аппроксимируются матрицами ранга M , а остальные используются в точном представлении

$$\|A - A_M\|_F \leq \varepsilon, \quad \operatorname{mr} A_M = O(\ln N \cdot \varepsilon^{-1/(M+1)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданным N, ε, M выберем $k = O(\ln N \cdot \varepsilon^{-1/(M+1)})$, $q = (Ck/\varepsilon)^{1/(M+1)}$. Тогда в соответствии с (8) имеем $\|A - A_M\|_F \leq \varepsilon$ и в силу (9)

$$\operatorname{mr} A_M = \operatorname{const} + CM \ln N \cdot \varepsilon^{-1/(M+1)} = O(\ln N \cdot \varepsilon^{-1/(M+1)}).$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\mathbf{A}$ – оператор, для которого при каждом M выполняется условие (3), и пусть A – матрица аппроксимации типа Галёркина–Петрова оператора $\mathbf{A}$ с базисными функциями $\Phi(x)$ и тестовыми функциями $\Psi(x)$ такими, что для них выполняется условие (1). Тогда по заданному ε можно выбрать параметры k, p, q разбиения 1 и M так, что для получающейся мозаичной матрицы A_M , в которой все блоки, для соответствующих которым функций выполняется (7), аппроксимируются матрицами ранга M , а остальные используются в точном представлении

$$\|A - A_M\|_F \leq \varepsilon, \quad \operatorname{mr} A_M = O(\ln N \cdot \ln \varepsilon^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданным N, ε выберем $M = O(\ln \varepsilon^{-1})$, $p, q = O(1)$. В силу (8) это обеспечивает $\|A - A_M\| \leq \varepsilon$. Выбрав $k = O(\ln N)$, добиваемся $\operatorname{mr} A_M = O(\ln N \cdot \ln \varepsilon^{-1})$.

2.2. Нерегулярное мозаичное разбиение. Рассмотрим разбиение 2.

Шаг 0. Выберем число $\alpha > 0$.

Шаг 1. В верхнем правом и нижнем левом углах A выделим квадратные блоки уровня 1 такие, что для соответствующих $\tilde{\Phi}(x), \tilde{\Psi}(x)$ выполняется

$$\frac{\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \tilde{\Phi}(x), \operatorname{supp} \tilde{\Psi}(y))}{|\operatorname{supp} \tilde{\Psi}(y)|} = \alpha. \quad (10)$$

Шаг k . Во всех верхних правых и нижних левых углах, образовавшихся после $k - 1$ шага, выделим квадратные блоки уровня k так, чтобы выполнялось (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Блоки при построении описанного выше разбиения могут начать перекрываться. В таких случаях следует в месте перекрывания блоков использовать лишь один из них (второй при этом станет непрямоугольным). В результате разбиение становится весьма нерегулярным; не является оно регулярным и в смысле определения в п. 1. При многих значениях α граница диагональной части A приобретает фрактальный характер.

ЛЕММА 2.5. k шагов разбиения 2 оставляют незатронутыми не более

$$\left(\frac{1 + \alpha}{2 + \alpha}\right)^{k-1} N^2$$

прилегающих к диагонали элементов матрицы A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нерегулярность разбиения не проявляется вблизи краев матрицы. На уровне k сумма расстояний любого угла от краев не меньше, чем для угла, образованного краем матрицы и прилегающим к нему (“крайним”) блоком. Размер “крайнего” блока уровня k есть

$$\frac{1}{2+\alpha} \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right)^{k-1} N,$$

а расстояние от получившегося угла до левого верхнего угла матрицы

$$\left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right)^k N.$$

Сумма этих величин, умноженная на N , и есть необходимая оценка сверху.

ЛЕММА 2.6. Пусть разбиение 2 применяется к матрице A k шагов, и все блоки, для соответствующих которым функций выполняется (10), аппроксимируются матрицами ранга M , а остальные используются в точном представлении. Тогда ошибка получающейся мозаичной аппроксимации

$$\|R\|_F \leq \frac{2C_0 k}{M! \alpha^{M+1}}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к каждому блоку лемму 2.1; для ошибки получим

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{M!} \sum_{A_i} \frac{|\text{supp } \tilde{\Psi}_i(y)|^M \left\| \int_0^1 \tilde{\Phi}(y) dy \right\| \cdot \left\| \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(y) dy \right\|}{\text{dist}(\text{supp } \tilde{\Phi}_i(x), \text{supp } \tilde{\Psi}_i(x))^{M+1}} &= \frac{C_0}{M! \alpha^{M+1}} \sum_{A_i} \left\| \int_0^1 \tilde{\Phi}(y) dy \right\| \\ &\leq \frac{2C_0 k}{M! \alpha^{M+1}} \left\| \int_0^1 \Phi(y) dy \right\|. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.7. Пусть разбиение 2 применяется к матрице A k шагов, и все блоки, для соответствующих которым функций выполняется (10), аппроксимируются матрицами ранга M , а остальные используются в точном представлении. Тогда

$$\text{mr } A_M \leq C_1 \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right)^{k-1} N + C_2 k M. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.5 вклад диагональной части в мозаичный ранг составляет

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right)^{k-1} N.$$

На l -м шаге разбиения 2 возникает не более 2^l блоков размером не более

$$\frac{1}{2+\alpha} \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right)^{l-1} N,$$

сумма размеров которых не превышает $2N$. Поэтому затраты памяти на хранение этой части матрицы

$$\text{mem} \leq \sum_{l=1}^k \min \left\{ \frac{2^l}{2+\alpha} \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right)^{l-1}, 2N \right\} \cdot 2M \leq 4kNM.$$

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mathbf{A}$ – оператор, для которого при некотором M выполняется условие (3), и пусть A – матрица аппроксимации типа Галёркина–Петрова оператора $\mathbf{A}$ с базисными функциями $\Phi(x)$ и тестовыми функциями $\Psi(x)$ такими, что для них выполняется условие (1). Тогда по заданному ε можно выбрать параметры k, α разбиения 2 так, что для получающейся мозаичной матрицы A_M , в которой все блоки, для соответствующих которым функций выполняется (10), аппроксимируются матрицами ранга M , а остальные используются в точном представлении

$$\|A - A_M\|_F \leq \varepsilon, \quad \text{mr } A_M = O(\ln N \cdot \varepsilon^{-1/(M+1)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданным N, ε, M выберем $k = O(\ln N \cdot \varepsilon^{-1/(M+1)})$, $\alpha = (2Ck/\varepsilon)^{1/(M+1)}$. Тогда в соответствии с (11) $\|A - A_M\|_F \leq \varepsilon$ и в силу (12)

$$\text{mr } A_M = \text{const} + CM \ln N \cdot \varepsilon^{-1/(M+1)} = O(\ln N \cdot \varepsilon^{-1/(M+1)}).$$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $\mathbf{A}$ – оператор, для которого при каждом M выполняется условие (3), и пусть A – матрица аппроксимации типа Галёркина–Петрова оператора $\mathbf{A}$ с базисными функциями $\Phi(x)$ и тестовыми функциями $\Psi(x)$ такими, что для них выполняется условие (1). Тогда по заданному ε можно выбрать параметры k, α разбиения 2 и M так, что для получающейся мозаичной матрицы A_M , в которой все блоки, для соответствующих которым функций выполняется (10), аппроксимируются матрицами ранга M , а остальные используются в точном представлении

$$\|A - A_M\|_F \leq \varepsilon, \quad \text{mr } A_M = O(\ln N \cdot \ln \varepsilon^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданным N, ε выберем $M = O(\ln \varepsilon^{-1})$, $\alpha = O(1)$. В силу (11) это обеспечивает $\|A - A_M\| \leq \varepsilon$. Выбрав $k = O(\ln N)$, добиваемся $\text{mr } A_M = O(\ln N \cdot \ln \varepsilon^{-1})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Обыкновенно выдвигается требование о p -м порядке аппроксимации типа Галёркина–Петрова и согласовании ошибок дискретизации и мозаичной аппроксимации. В этом случае теоремы 2.2 и 2.4 дают оценку $\text{mr } A_M = O(\ln^2 N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Как видно из доказательств теорем 2.1–2.4, они в действительности верны и при более широких предположениях. В частности, условие (3) может нарушаться в конечном числе точек разрыва.

2.3. Мозаичное покрытие. Мозаичные разбиения, описанные в предыдущих подпунктах, для поддержания качества аппроксимации мельчат блочное разбиение вблизи сингулярности. Качество аппроксимации можно поддержать и иным образом: вычитая из ядра его быстро меняющуюся часть так, чтобы оставалась гладкая функция, которая хорошо аппроксимируется, например, рядом Тейлора. Заметим, в частности, что определяющий член знаменателя (6) вычисляется по формуле $\max |\partial_y^M K(x, y)|$ на прямоугольнике $\tilde{\Phi}(x) \times \tilde{\Psi}(y)$. Обозначим $\text{supp } \tilde{\Phi}(x) = [c, d]$, $\text{supp } \tilde{\Psi}(y) = [a, b]$. Постараемся уменьшить $\max |\partial_y^M K(x, y)|$ на $[a, b] \times [c, d]$, вычитая из $K(x, y)$ подходящую функцию малого ранга, заданную на $[a, b_1] \times [c_1, d]$.

ЛЕММА 2.8. Пусть

$$\exists C_0 : \forall k \quad \frac{\partial^k}{\partial y^M} K(x, y) \leq \frac{C_0}{|x - y|^{k+1}}. \quad (13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \min_{b_1, c_1} \max_{[a, b] \times [c, d]} \left| \frac{\partial^M}{\partial y^M} \left[K(x, y) - \sum_{i=0}^{M-1} \chi_i(x) \xi_i(y) \theta_y(a, b_1) \theta_x(c_1, d) \right] \right| \\ & \leq C_0 \left(\frac{2}{(\sqrt{4M+1} - 1)|a - d|} \right)^{M+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В квадратных скобках (14) должна стоять M раз дифференцируемая по y функция. Значит,

$$\xi(y) = \frac{1}{M!} (y - b_1)^M \tilde{\xi}_i(y).$$

Теперь

$$\begin{aligned} & \max_{[a, b] \times [c, d]} \left| \frac{\partial^M}{\partial y^M} \left[K(x, y) - \sum_{i=0}^{M-1} \chi_i(x) \xi_i(y) \theta_y(a, b_1) \theta_x(c_1, d) \right] \right| \\ & = \max_{[a, b] \times [c, d]} \left| \frac{\partial^M}{\partial y^M} K(x, y) - \sum_{i=0}^{M-1} \chi_i(x) \tilde{\xi}_i(y) \theta_y(a, b_1) \theta_x(c_1, d) \right| \\ & = \max \left\{ \max_{[a, b] \times [c, d] \setminus [a, b_1] \times [c, d_1]} \left| \frac{\partial^M K(x, y)}{\partial y^M} \right|, \right. \\ & \quad \left. \max_{[a, b_1] \times [c, d_1]} \left| \frac{\partial^M}{\partial y^M} K(x, y) - \sum_{i=0}^{M-1} \chi_i(x) \tilde{\xi}_i(y) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\min_{b_1, c_1} \max_{[a, b] \times [c, d]} \left| \frac{\partial^M}{\partial y^M} \left[K(x, y) - \sum_{i=0}^{M-1} \chi_i(x) \xi_i(y) \theta_y(a, b_1) \theta_x(c_1, d) \right] \right|$$

достигается при $d - b_1 = c_1 - a$ и

$$\begin{aligned} & \max_{[a, b] \times [c, d] \setminus [a, b_1] \times [c_1, d]} \left| \frac{\partial^M}{\partial y^M} K(x, y) \right| = \max_{[a, b_1] \times [c_1, d]} \left| \frac{\partial^M}{\partial y^M} K(x, y) - \sum_{i=0}^{M-1} \chi_i(x) \tilde{\xi}_i(y) \right| \\ & \iff \frac{C_0}{(d - b_1)^M} = \frac{C_0}{(d - a)^{2M}} \frac{(a - b_1)^M}{M!}. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Стирлинга, пренебрегая членами меньшего порядка и логарифмируя, получаем

$$\frac{d - a}{a - b_1} \frac{M}{e} = \frac{d - b_1}{d - a},$$

откуда

$$a - b_1 = (d - a) \frac{\sqrt{4M/e + 1} - 1}{2}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Существует мозаичная аппроксимация $\tilde{A}_M$ матрицы $\tilde{A}$ такая, что

$$\text{mr } \tilde{A}_M = M \left(1 + \frac{d-a}{a-b} \frac{\sqrt{4M/e+1}-1}{2} \right) + \mu,$$

где μ – небольшое число, не зависящее ни от чего, кроме вида функции $\Phi(x)$, и

$$\|\tilde{A} - \tilde{A}_M\| \leq C_0 \frac{|a-b|^M \|\int_0^1 \tilde{\Psi}(y) dy\| \cdot \|\int_0^1 \tilde{\Phi}(y) dy\|}{M!((d-a)(\sqrt{4M/e+1}-1)/2)^{M+1}}.$$

Рекурсивный вариант этого приема дает покрытие 1.

Шаг 0. Выберем $k, M > 1$.

Шаг 1. В левом нижнем углу матрицы $\tilde{A}_M$ вычтем матрицу размера $M_1 = 2^k M$ такую, чтобы в соответствии с леммой 2.8 уменьшить

$$\max \left| \frac{\partial_y^{M_1}}{\partial y^{M_1}} K(x, y) \right|.$$

Шаг i . Из матрицы, получившейся в левом нижнем углу на предыдущем шаге, вычтем матрицу размера $(a-b_j)/h$ и ранга $M_i = 2^{k-i+1}M$ такую, чтобы в соответствии с леммой 2.8 уменьшить

$$\max \left| \frac{\partial_y^{M_i}}{\partial y^{M_i}} K(x, y) \right|.$$

ЛЕММА 2.9. При условии (13) существуют число k и последовательности точек $\{b_j\}_1^k$ и $\{c_j\}_1^k$, а также функций $\{\{\chi_{ij}\}_{i=0}^{M_j}\}_{j=0}^k$ и $\{\{\xi_{ij}\}_{i=0}^{M_j}\}_{j=0}^k$ такие, что

$$\begin{aligned} & \max_{[a,b] \times [c,d]} \left| \frac{\partial^M}{\partial y^M} \left[K(x, y) - \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{M_j-1} \chi_{ij}(x) \xi_{ij}(y) \theta_y(a, b_j) \theta_x(c_j, d) \right] \right| \\ & \leq \max_{[a,b] \times [c,d] \setminus [a,b_1] \times [c_1,d]} \left| \frac{\partial^M}{\partial y^M} K(x, y) \right|, \end{aligned}$$

причем

$$|a-b_1| > \frac{1}{2}|a-b|. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем последовательности точек $\{b_j\}_1^k$ и $\{c_j\}_1^k$ такие, что $d-b_j = c_j-a$ и $(c_i, b_i) \subset (c_{i-1}, b_{i-1})$.

Желание рекурсивно применять лемму 2.8 диктует выбор $M_0 = M$, $M_j = 2^j M$ при $j \geq 1$. Тогда согласно этой лемме выбор

$$a-b_j = (a-b_{j-1})\sqrt{jM} \quad (16)$$

обеспечивает $\max |\partial_y^M K(x, y)| \leq C_0/|a-b_1|^M$.

Из (16) следует $|a-b_1| \approx k!M^k|a-d| = O((kM)^k|a-d|)$. Если считать $|a-d| = O(N^{-1})$, то выбор $k = O(\ln(N(a-b)))$ обеспечивает (15).

СЛЕДСТВИЕ. При $M > 4e$ существует мозаичная аппроксимация $\tilde{A}_M$ матрицы $\tilde{A}$ такая, что $\text{mr } \tilde{A}_M \leq 2(M + \mu)$ и

$$\|\tilde{A} - \tilde{A}_M\| \leq C \frac{\|\int_0^1 \tilde{\Phi}(y) dy\|}{(M/(2e))^M}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \text{mem } \tilde{A}_M &= \sum_{j=0}^k (2^j M + \mu) N (a - b_j) = \sum_{j=0}^k (2^j M + \mu) N \frac{a - b}{\sqrt{(M/e)^j j!}} \\ &\leq (M + \mu) N \sum_{j=0}^k \left(\frac{2e}{Mj} \right)^j \leq 2(M + \mu) N. \end{aligned}$$

Вместе с тем

$$\begin{aligned} \|\tilde{A} - \tilde{A}_M\| &\leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{(y - \eta(x))^M}{M!} \frac{\partial^M}{\partial y^M} K(x, y) \Big|_{y=\eta(x)} \tilde{\Psi}(y) \tilde{\Phi}^T(x) dx dy \\ &\leq C_0 \frac{|\text{supp } \tilde{\Psi}(y)|^M \|\int_0^1 \tilde{\Psi}(y) dy\| \cdot \|\int_0^1 \tilde{\Phi}(y) dy\|}{M! |a - b_1|^{M+1}} \\ &\leq C_0 \frac{2^{M+1} \|\int_0^1 \tilde{\Phi}(y) dy\|}{(M/e)^M} = C \frac{\|\int_0^1 \tilde{\Phi}(y) dy\|}{(M/(2e))^M}. \end{aligned}$$

Рекурсивное применение вышеописанного приема ведет к следующему мозаичному покрытию 2.

Шаг 1. Разобьем матрицу A на четыре равных блока. Применим ко внедиагональным блокам покрытие 1.

Шаг l . Разобьем каждый из полученных на шаге $l-1$ диагональных блоков на четыре равных блока. Применим к полученным внедиагональным блокам покрытие 1.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $\mathbf{A}$ – оператор, для которого выполняется условие (13), и пусть A – матрица аппроксимации типа Галёркина–Петрова оператора $\mathbf{A}$ с базисными функциями $\Phi(x)$ и тестовыми функциями $\Psi(x)$ такими, что для них выполняется условие (1). Тогда по заданному ε можно выбрать параметры k, l, M покрытия 2 так, что для получающейся мозаичной матрицы A_M

$$\|A - A_M\|_F \leq \varepsilon, \quad \text{mr } A_M = O(\ln N \cdot \ln \varepsilon^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После l шагов покрытия 2 останутся не аппроксимированными диагональные блоки общей площадью $2^{-l} N^2$. Память, необходимая для хранения аппроксимаций, полученных покрытием 1, не превышает $2lMN$. Ошибка же аппроксимации не превышает

$$C_0 \sum_{i=0}^l \left(\frac{2e}{M} \right)^M \left\| \int_0^1 \tilde{\Phi}_i(y) dy \right\| \leq Cl \left(\frac{2e}{M} \right)^M.$$

Очевидно, выбор $l = O(\ln N)$, $M = O(\ln \varepsilon^{-1})$ приводит к требуемым оценкам.

3. Оценки мозаичных рангов многомерных операторов Кальдерона–Зигмунда. Обобщим теоремы 2.1–2.5 на случай многомерных операторов Кальдерона–Зигмунда. Без ограничения общности можно считать, что оператор задан в единичном кубе $Q \subset \mathbb{R}^d$. При условии (1) разложение (4) остается в силе, поэтому лемма 2.1 верна в многомерном случае дословно. Соответственно не изменяются и оценки лемм 2.3, 2.6 и следствия из лемм 2.8 и 2.9. Очевидно, не изменяются и оценки лемм 2.8, 2.9, 2.2 и 2.5. Однако, разложение Тейлора M -го порядка для d -мерной функции содержит M^d членов. Соответственно в оценках на мозаичные ранги лемм 2.4, 2.7 M заменится на M^d . Так же изменятся и оценки теорем 2.1, 2.3 и 2.5, а вот на оценки теорем 2.1 и 2.3 это не повлияет. Приведем без доказательств многомерные аналоги теорем 2.2, 2.4 и 2.5.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathbf{A}$ – d -мерный оператор, для которого при каждом M выполняется условие (3), и пусть A – матрица аппроксимации типа Галёркина–Петрова оператора $\mathbf{A}$ с базисными функциями $\Phi(x)$ и тестовыми функциями $\Psi(x)$ такими, что для них выполняется условие (1). Тогда по заданному ε можно выбрать параметры k, p, q разбиения 1 и M так, что для получающейся мозаичной матрицы A_M , в которой все блоки аппроксимируются матрицами ранга M ,

$$\|A - A_M\|_F \leq \varepsilon, \quad \text{mr } A_M = O(\ln N \cdot \ln^d \varepsilon^{-1}).$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mathbf{A}$ – d -мерный оператор, для которого при каждом M выполняется условие (3), и пусть A – матрица аппроксимации типа Галёркина–Петрова оператора $\mathbf{A}$ с базисными функциями $\Phi(x)$ и тестовыми функциями $\Psi(x)$ такими, что для них выполняется условие (1). Тогда по заданному ε можно выбрать параметры k, α разбиения 2 и M так, что для получающейся мозаичной матрицы A_M , в которой все блоки аппроксимируются матрицами ранга M ,

$$\|A - A_M\|_F \leq \varepsilon, \quad \text{mr } A_M = O(\ln N \cdot \ln^d \varepsilon^{-1}).$$

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\mathbf{A}$ – d -мерный оператор, для которого выполняется условие (13), и пусть A – матрица аппроксимации типа Галёркина–Петрова оператора $\mathbf{A}$ с базисными функциями $\Phi(x)$ и тестовыми функциями $\Psi(x)$ такими, что для них выполняется условие (1). Тогда по заданному ε можно выбрать параметры k, l, M покрытия 2 так, что для получающейся мозаичной матрицы A_M

$$\|A - A_M\|_F \leq \varepsilon, \quad \text{mr } A_M = O(\ln N \cdot \ln^d \varepsilon^{-1}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Следует особо отметить, что в определении мозаичных рангов мы не требовали связности малоранговых блоков. Это очень важно в многомерном случае, так как естественная по каким-либо соображениям нумерация переменных может нарушить связность малоранговых блоков (в одномерном случае естественная последовательная нумерация, при которой малоранговые блоки связны).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1988.
- [2] Лифанов И. К., Тыртышников Е. Е. Теплицевы матрицы и сингулярные интегральные уравнения // Вычислительные процессы и системы № 7 / ред. Г. И. Марчук. М.: Наука, 1989.

- [3] Тыртышников Е. Е. Теплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения. М.: ОВМ АН СССР, 1989.
- [4] Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory // J. Comput. Phys. 1985. V. 60. P. 187–207.
- [5] Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions // J. Comput. Phys. 1990. V. 86. P. 414–439.
- [6] Carrier J., Greengard L., Rokhlin V. A fast adaptive multipole algorithm for particle simulations // SIAM J. Sci. Comput. 1988. V. 9. P. 669–686.
- [7] Engheta N., Murphy W. D., Rokhlin V., Vassiliou M. S. The fast multipole method (FMM) for electromagnetic scattering problems // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1992. V. 40. № 6. P. 634–641.
- [8] Greengard L., Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations // J. Comput. Phys. 1990. V. 73. P. 325–348.
- [9] Нечепуренко Ю. М. Быстрые численно устойчивые алгоритмы для широкого класса линейных дискретных преобразований. Препринт № 92. М.: ОВМ АН СССР, 1985.
- [10] Brandt A., Lubrecht A. A. Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations // J. Comput. Phys. 1990. V. 90. P. 348–370.
- [11] Новак З. П., Хакбуш У. О сложности метода панелей // Вычислительные процессы и системы № 6 / ред. Г. И. Марчук. М.: Наука, 1988.
- [12] Hackbush W., Nowak Z. P. On the Fast Matrix Multiplication in the Boundary Element Method by Panel Clustering // Numer. Math. 1989. V. 59. P. 463–491.
- [13] Tyrtshnikov E. E. Mosaic ranks and skeletons // Lecture Notes in Comput. Sci. 1997. V. 1196. P. 505–516.
- [14] Beylkin G., Coifman R., Rokhlin V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. I // Comm. Pure Appl. Math. 1991. V. 44. P. 141–183.
- [15] Goreinov S. A., Tyrtshnikov E. E., Zamarashkin N. L. Pseudo-skeleton approximations // Linear Algebra Appl. (to appear).
- [16] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
- [17] Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
- [18] Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: Наука, 1984.

Институт вычислительной математики РАН
Московский физико-технический институт
E-mail: nickm@inm.ras.ru

Поступило
14.03.96
Исправленный вариант
17.04.97