Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Нгуен Минь Чи, Об уравнении Грушина, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 95–105

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:14:03

УДК 517

ОБ УРАВНЕНИИ ГРУШИНА

Нгуен Минь Чи

В статье рассмотрена нелинейная задача для уравнения типа Грушина. Используя тождество Похожаева, докажем для таких уравнений некоторые результаты об отсутствии нетривиальных решений. Остальная часть связана с гладкостью собственных функций вблизи границы. Для получения некоторых результатов используется явное выражение фундаментального решения и преобразования Кельвина

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В этой статье мы рассматриваем вырождающиеся эллиптические уравнения

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varphi^2(x_1) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

в $\mathbb{R}^2$. Если $\varphi^2(x_1) = x_1^{2k}$, k – целое число, два векторных поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = x_1^k \frac{\partial}{\partial x_2}$$

удовлетворяют условию Хёрмандера, то L является гипоэллиптическим оператором. В предельном случае вырожденности: $\varphi(x_1) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\varphi(x_1) \neq 0$, если $x_1 \neq 0$, $\varphi(x_1)$ принимает действительные значения,

$$\frac{d^n \varphi(0)}{dx_1^n} = 0$$

для любого n ; оператор L также является гипоэллиптическим оператором (хотя условие Хёрмандера не выполнено, см. [1]). Подробное исследование гладкости решений этих уравнений вблизи границы было изложено в [2]. В [3] было замечено, что значение $(\alpha + 2)/\alpha$ ведет себя как критический показатель Соболева для оператора

$$G_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + |x_1|^{2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \alpha > 0.$$

Аналогичные результаты были получены в [4] в связи с изучением нелинейных задач для $\square_b$ на группе Гейзенберга. Коротко напомним главные результаты из [3].

ТЕОРЕМА 1. Пусть Ω является G_α -звездной по отношению к точке $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Тогда следующая граничная задача:

$$\begin{aligned} G_\alpha u + \lambda u + |u|^\gamma u &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

где $\lambda \leq 0$, $\gamma > 4/\alpha$, не имеет нетривиальных решений в $H^2(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Через $S_{\alpha}^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, мы обозначим множество всех функций $u \in L^p(\Omega)$ таких, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\Omega), |x_1|^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_2} \in L^p(\Omega).$$

Мы определим норму в этом пространстве следующим образом:

$$\|u\|_{S_{\alpha}^{1,p}(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \left(|u|^p + \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^p + \left| |x_1|^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^p \right) dx_1 dx_2 \right\}^{1/p}.$$

Если $p = 2$, мы можем определить скалярное произведение в $S_{\alpha}^{1,2}(\Omega)$ как

$$(u, v)_{S_{\alpha}^{1,2}(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_{L^2(\Omega)} + \left(|x_1|^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_2}, |x_1|^{\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Легко показать, что $S_{\alpha}^{1,p}(\Omega)$ является банаховым пространством и $S_{\alpha}^{1,2}(\Omega)$ – гильбертовым пространством. Пространство $S_{\alpha,0}^{1,p}(\Omega)$ определяется как замыкание $C_0^1(\Omega)$ в пространстве $S_{\alpha}^{1,p}(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 2. 1) Если $1 \leq p < \alpha + 2$, то $S_{\alpha,0}^{1,p}(\Omega) \subset L^{((\alpha+2)p)/(\alpha+2-p)-\tau}(\Omega)$ для любого положительного достаточно малого τ , и это вложение вполне непрерывно.

2) Если $p > \alpha + 2$, то $S_{\alpha,0}^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$.

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что $f(u)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f \in C_{\text{loc}}^{0,\beta}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$;
- 2) $|f(u)| \leq C(1 + |u|^m)$ с $1 < m < (\alpha + 4)/k$;
- 3) $f(u) = o(u)$, когда $u \rightarrow 0$;
- 4) существует число A такое, что $|u| \geq A$,

$$\int_0^u f(s) ds \leq \mu f(u)u,$$

где $\mu \in [0, 1/2)$.

Тогда граничная задача

$$\begin{aligned} G_{\alpha}u + f(u) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

всегда имеет нетривиальное решение в $S_{\alpha,0}^{1,p}(\Omega)$.

2. Нелинейные уравнения для оператора Грушина. Заметим, что $(\alpha+2)/\alpha \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$. Этот факт характеризует известную ситуацию: предельный случай (оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$) не имеет критического показателя (см. [5]). Когда $\alpha \rightarrow \infty$, имеем $(\alpha+2)/\alpha \rightarrow 1$. Приведем некоторые результаты, которые характеризуют сказанное выше.

Рассмотрим задачу

$$Lu + f(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \varphi^2(x_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(u) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2)$$

где $f(0) = 0$, $f(u) \in C(\mathbb{R})$ и Ω – ограниченная область, содержащая начало координат, с гладкой границей в $\mathbb{R}^2$. Положим

$$F(u) = \int_0^u f(s) ds,$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Через C обозначим общие константы, которые не зависят от функций, но могут менять их значения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Область Ω называется $L_{\varphi, \beta}$ -звездной по отношению к точке $(0, 0)$, если неравенство $(\nu_1^2 + \varphi^2(x_1) \cdot \nu_2^2)(x_1 \cdot \nu_1 + (\beta + 1)x_2 \cdot \nu_2) > 0$ выполняется почти всюду на $\partial\Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Область Ω называется $L_{\varphi, \infty}$ -звездной по отношению к точке $(0, 0)$, если Ω является $L_{\varphi, \beta}$ -звездной для любого $\beta > 0$.

ПРИМЕР 1. Единичный шар $B_r = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$ представляет собой $L_{\varphi, \infty}$ -звездную область.

ЛЕММА (тождество Похожаева). Пусть $u(x)$ – решение задачи (1), (2), которое принадлежит $H^2(\Omega)$. Тогда $u(x)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ (\beta + 1)F(u) - \frac{\beta - 1}{2} f(u)u \right\} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (\nu_1^2 + \varphi^2(x_1) \cdot \nu_2^2) \{x_1 \cdot \nu_1 + \beta x_2 \cdot \nu_2\} ds \\ &+ \int_{\Omega} (x_1 \varphi'(x_1) \varphi(x_1) - \beta \varphi^2(x_1)) \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

для любого $\beta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме вложения Соболева для ограниченных областей с гладкой границей имеем $H^2(\Omega) \subset C^{0, \alpha}(\bar{\Omega})$, где $0 < \alpha < 1$. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 F(u)) = F(u) + x_1 f(u) \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 F(u)) = F(u) + x_2 f(u) \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Из формулы Гаусса–Остроградского выводим

$$\int_{\Omega} F(u) dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} x_1 f(u) \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 dx_2,$$

откуда

$$\beta \int_{\Omega} F(u) dx_1 dx_2 = -\beta \int_{\Omega} x_2 f(u) \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 dx_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (1 + \beta) \int_{\Omega} F(u) dx_1 dx_2 &= - \int_{\Omega} \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) f(u) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\Omega} \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \varphi^2(x_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Снова применяя формулу Гаусса–Остроградского, получаем (подробное вычисление можно найти в [6])

$$\begin{aligned}
 (1 + \beta) \int_{\Omega} F(u) dx_1 dx_2 &= - \int_{\Omega} \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) f(u) dx_1 dx_2 \\
 &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (2x_1 \varphi'(x_1) \varphi(x_1) + \varphi^2(x_1)) \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 dx_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (x_1 \cdot \nu_1) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 ds - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (x_1 \cdot \varphi^2(x_1) \cdot \nu_1) \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 ds \\
 &\quad - \int_{\partial \Omega} (x_1 \cdot \varphi^2(x_1) \cdot \nu_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} ds - \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} \varphi^2(x_1) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 dx_2 \\
 &\quad + \frac{\beta}{2} \int_{\partial \Omega} (x_2 \cdot \varphi^2(x_1) \cdot \nu_2) \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 ds + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dx_2 \\
 &\quad - \frac{\beta}{2} \int_{\partial \Omega} (x_2 \cdot \nu_2) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 ds + \beta \int_{\partial \Omega} (x_2 \cdot \nu_1) \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} ds.
 \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \nu_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \nu_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \nu},$$

поэтому имеем

$$\begin{aligned}
 (1 + \beta) \int_{\Omega} F(u) dx_1 dx_2 &= \frac{\beta - 1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dx_2 \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left\{ x_1 \varphi'(x_1) \varphi(x_1) + \left(\frac{1 - \beta}{2} \right) \varphi^2(x_1) \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 dx_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (\nu_1^2 + \varphi^2(x_1) \cdot \nu_2^2) \{x_1 \cdot \nu_1 + \beta x_2 \cdot \nu_2\} ds.
 \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \left\{ (\beta + 1) F(u) - \frac{\beta - 1}{2} f(u) u \right\} dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (\nu_1^2 + \varphi^2(x_1) \cdot \nu_2^2) \{x_1 \cdot \nu_1 + \beta x_2 \cdot \nu_2\} ds \\
 &\quad + \int_{\Omega} (x_1 \varphi'(x_1) \varphi(x_1) - \beta \varphi^2(x_1)) \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 dx_2.
 \end{aligned}$$

Следующие две теоремы очевидным образом следуют из доказанной леммы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Ω — L_β -звездная по отношению к точке $(0, 0)$ и

- 1) $(\beta + 2)F(u) - \frac{\beta}{2}f(u) < 0$, когда $u \neq 0$;
- 2) $x_1 \cdot \varphi'(x_1) \geq (\beta + 1)\varphi(x_1)$ в Ω .

Тогда не существует нетривиального решения $u \in H^2(\Omega)$ для задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\Omega - L_\beta$ -звездная по отношению к точке $(0, 0)$ и

- 1) $(\beta + 2)F(u) - \frac{\beta}{2}f(u) < 0$, когда $u > 0$;
- 2) $x_1 \cdot \varphi'(x_1) \geq (\beta + 1)\varphi(x_1)$ в Ω .

Тогда не существует нетривиальное положительное решение $u \in H^2(\Omega)$ для задачи (1), (2).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим случаи, когда $\varphi(x_1) = e^{-|x_1|^{-\delta}}$ ($\delta > 0$) и $f(u) = \lambda u + |u|^\gamma u$, где $\lambda \leq 0$, $\gamma > 0$. Покажем, что для любого $\gamma > 0$ найдется $r(\gamma, \delta)$ такое, что задача (1), (2) не имеет нетривиальных решений $u \in H^2(\Omega)$, где $\Omega = B_{r(\gamma, \delta)} = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2(\gamma, \delta)\}$. Действительно, имеем $\varphi'(x_1) = \text{sign}(x_1)|x_1|^{-\delta-1}\delta e^{-|x_1|^{-\delta}}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x_1 \varphi'(x_1) \geq (\beta + 1)\varphi(x_1) &\iff \delta|x_1|^{-\delta}e^{-|x_1|^{-\delta}} \geq (\beta + 1)e^{-|x_1|^{-\delta}} \\ &\iff \delta|x_1|^{-\delta} \geq (\beta + 1) \iff |x_1| \leq \left(\frac{\delta}{\beta + 1}\right)^{1/\delta}. \end{aligned}$$

Если выберем $r(\gamma, \delta) = (\delta\gamma/(4 + \gamma))^{1/\delta}$, то $x_1 \varphi'(x_1) \geq ((4 + \gamma)/\gamma)\varphi(x_1)$ в $B_{r(\gamma, \delta)}$. Положив

$$F(u) = \frac{\lambda u^2}{2} + \frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma + 2}$$

и $f(u)$ в условии 3) теоремы 3 с $\beta = (4 + \gamma)/\gamma$, получим

$$\begin{aligned} &\int_{x_1^2 + x_2^2 \leq r^2(\gamma, \delta)} \left\{ \left(\frac{4 + 2\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{\lambda u^2}{2} + \frac{|u|^{\gamma+2}}{\gamma + 2} \right) - \frac{2}{\gamma}(\lambda u^2 + |u|^{\gamma+2}) \right\} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_1^2 + x_2^2 = r^2(\gamma, \delta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (\nu_1^2 + x_1^{8/\gamma} \cdot \nu_2^2) \left\{ x_1 \cdot \nu_1 + \left(\frac{4 + \gamma}{\gamma} \right) x_2 \cdot \nu_2 \right\} ds \\ &\quad + \int_{x_1^2 + x_2^2 \leq r^2(\gamma, \delta)} \left\{ x_1 \varphi'(x_1) \varphi(x_1) - \left(\frac{4 + \gamma}{\gamma} \right) \varphi^2(x_1) \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Так как $x_1 \varphi'(x_1) \varphi(x_1) \geq ((4 + \gamma)/\gamma)\varphi^2(x_1)$ в $B_{r(\gamma, \delta)}$, то

$$\begin{aligned} &\lambda \int_{x_1^2 + x_2^2 \leq r^2(\gamma, \delta)} u^2 dx_1 dx_2 \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{x_1^2 + x_2^2 = r^2(\gamma, \delta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (x_1^2 + x_1^{8/\gamma} \cdot x_2^2) \left\{ x_1^2 + \left(\frac{4 + \gamma}{\gamma} \right) x_2^2 \right\} ds. \end{aligned}$$

При $\lambda < 0$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &> \lambda \int_{x_1^2 + x_2^2 \leq r^2(\gamma, \delta)} u^2 dx_1 dx_2 \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{x_1^2 + x_2^2 = r^2(\gamma, \delta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (x_1^2 + x_1^{8/\gamma} \cdot x_2^2) \left\{ x_1^2 + \left(\frac{4 + \gamma}{\gamma} \right) x_2^2 \right\} ds \geq 0, \end{aligned}$$

которое ведет к противоречию. Если $\lambda = 0$, выводим, что

$$\frac{1}{2} \int_{x_1^2 + x_2^2 = r^2(\gamma, \delta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (x_1^2 + x_1^{8/\gamma} \cdot x_2^2) \left\{ x_1^2 + \left(\frac{4+\gamma}{\gamma} \right) x_2^2 \right\} ds = 0.$$

Следовательно,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{x_1^2 + x_2^2 = r^2(\gamma, \delta)} \equiv 0.$$

Из теоремы о единственности следует, что $u \equiv 0$.

Теперь вернемся к случаю $\varphi^2(x_1) = x_1^{2k}$.

3. Фундаментальное решение и преобразование Кельвина. Определим полярные координаты следующим образом:

$$x_1 = \rho \operatorname{sign}(\sin \theta) |\sin \theta|^{1/(k+1)}, \quad x_2 = \frac{\rho^{k+1}}{k+1} \cos \theta,$$

$$dx_1 dx_2 = \frac{\rho^{k+1}}{k+1} |\sin \theta|^{-k/(k+1)} d\rho d\theta.$$

Мы также используем следующие координаты:

$$\rho(x_1, x_2) = (x_1^{2k+2} + (k+1)^2 x_2^2)^{1/(2k+2)},$$

$$\omega = |\sin \theta|^{1/(k+1)} \operatorname{sign}(\sin \theta) = \frac{x_1}{(x_1^{2k+2} + (k+1)^2 x_2^2)^{1/(2k+2)}},$$

$$G_k = \omega^{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{k+1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left\{ (1 - \omega^{2k+2}) \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} - (k+1) \omega^{2k+1} \frac{\partial}{\partial \omega} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $E_k(x_1, x_2) = \rho^{-k}$, тогда

$$G_k E_k(x_1, x_2) = -\frac{2k}{k+1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((k+1)/(2k))}{\Gamma((2k+1)/(2k))} \delta(x_1, x_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $E_k(x_1, x_2) \in L_{\text{loc}}^{(k+2)/k - \tau}(\mathbb{R}^2)$ для любого достаточно малого положительного τ . Так как $E_k(x_1, x_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, достаточно доказать, что $E_k(x_1, x_2) \in L^{(k+2)/k - \tau}(B_\rho)$, где $B_\rho = \{(x_1, x_2) \mid \rho(x_1, x_2) < \rho\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} \{E_k(x_1, x_2)\}^{(k+2)/k - \tau} dx_1 dx_2 &= \int_0^{2\pi} \frac{|\sin \theta|^{-k/(k+1)}}{k+1} d\theta \int_0^\rho s^{k+1} (s^{-k})^{(k+2)/k - \tau} ds \\ &\leq C \int_0^\rho s^{-1+\tau k} ds < \infty. \end{aligned}$$

Заметим также, что $E_k(x_1, x_2) \notin L_{\text{loc}}^{(k+2)/k}(\mathbb{R}^2)$. Легко видеть, что $G_k E_k(x_1, x_2) = 0$, если $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Обозначим $\Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon\}$. В силу формулы Грина

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon} E_k(x_1, x_2) G_k v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} G_k E_k(x_1, x_2) v(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &+ \int_{\rho=\varepsilon} \left\{ v(x_1, x_2) \cdot \nu_1 \cdot \frac{\partial E_k(x_1, x_2)}{\partial x_1} + v(x_1, x_2) \cdot \nu_2 \cdot x_1^{2k} \cdot \frac{\partial E_k(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right\} ds \\ &- \int_{\rho=\varepsilon} \left\{ E_k(x_1, x_2) \cdot \nu_1 \cdot \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1} + E_k(x_1, x_2) \cdot \nu_2 \cdot x_1^{2k} \cdot \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right\} ds \quad (3) \end{aligned}$$

для любого $v \in C_0^1(\Omega)$.

Поскольку

$$ds = \frac{1}{k+1} (\rho^2 |\sin \theta|^{-2k/(k+1)} \cos^2 \theta + \rho^{2k+2} \sin^2 \theta)^{1/2}$$

и

$$\nu = (\nu_1, \nu_2) = \left(\frac{x_1^{2k+1}}{(x_1^{4k+2} + (k+1)^2 x_2^2)^{1/2}}, \frac{(k+1)x_2}{(x_1^{4k+2} + (k+1)^2 x_2^2)^{1/2}} \right),$$

имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ \nu_1 \cdot \frac{\partial E_k(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \nu_2 \cdot x_1^{2k} \cdot \frac{\partial E_k(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right\} \Big|_{\rho=\varepsilon} \\ &= k x_1^{2k} \varepsilon^{-k} (x_1^{4k+2} + (k+1)^2 x_2^2)^{-1/2} \\ &= -k \varepsilon^k |\sin \theta|^{2k/(k+1)} (\varepsilon^{4k+2} |\sin \theta|^{(4k+2)/(k+1)} + \varepsilon^{2k+2} \cos^2 \theta)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{\rho=\varepsilon} \left\{ \nu_1 \cdot \frac{\partial E_k(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \nu_2 \cdot x_1^{2k} \cdot \frac{\partial E_k(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right\} v(x_1, x_2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} v(\varepsilon, \theta) \left(-\frac{k}{k+1} \right) \varepsilon^k |\sin \theta|^{2k/(k+1)} \\ & \quad \times \left(\frac{\varepsilon^2 |\sin \theta|^{-2k/(k+1)} \cos^2 \theta + \varepsilon^{2k+2} \sin^2 \theta}{\varepsilon^{4k+2} |\sin \theta|^{(4k+2)/(k+1)} + \varepsilon^{2k+2} \cos^2 \theta} \right)^{1/2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} v(\varepsilon, \theta) \left(-\frac{k}{k+1} \right) |\sin \theta|^{k/(k+1)} d\theta. \end{aligned}$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $v(\varepsilon, \theta) = V(\varepsilon, \theta) + v(0, 0)$, где $V(\varepsilon, \theta) \rightarrow 0$ равномерно по θ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что

$$\begin{aligned} & -\frac{k}{k+1} \int_0^{2\pi} v(\varepsilon, \theta) |\sin \theta|^{k/(k+1)} d\theta \rightarrow -\frac{k}{k+1} v(0, 0) \int_0^{2\pi} |\sin \theta|^{k/(k+1)} d\theta \\ &= -\frac{2k}{k+1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((k+1)/(2k))}{\Gamma((2k+1)/(2k))} v(0, 0) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Оценим теперь выражение

$$-\int_{\rho=\varepsilon} \left\{ E_k(x_1, x_2) \cdot \nu_1 \cdot \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1} + E_k(x_1, x_2) \cdot \nu_2 \cdot x_1^{2k} \cdot \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right\} ds.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left| -\int_{\rho=\varepsilon} \left\{ E_k(x_1, x_2) \cdot \nu_1 \cdot \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1} + E_k(x_1, x_2) \cdot \nu_2 \cdot x_1^{2k} \cdot \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right\} ds \right| \\ & \leq C \int_{\rho=\varepsilon} |E_k(x_1, x_2)| \cdot (|\nu_1| + |\nu_2 \cdot x_1^{2k}|) ds = \int_{\rho=\varepsilon} \varepsilon^{-k} \frac{|x_1|^{2k+1} + (k+1)x_1^{2k}|x_2|}{(x_1^{4k+2} + (k+1)^2 x_2^2)^{1/2}} ds \\ &= \frac{1}{k+1} \int_0^{2\pi} \varepsilon^k |\sin \theta|^{2k/(k+1)} (\varepsilon |\sin \theta|^{1/(k+1)} + \varepsilon^{k+1} |\cos \theta|) \varepsilon^{-k} |\sin \theta|^{-k/(k+1)} d\theta \\ &= \frac{1}{k+1} \int_0^{2\pi} |\sin \theta|^{k/(k+1)} (\varepsilon |\sin \theta|^{1/(k+1)} + \varepsilon^{k+1} |\cos \theta|) d\theta \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу (3)–(5) заключаем, что

$$\begin{aligned} (G_k E_k(x_1, x_2), v(x_1, x_2)) &= (E_k(x_1, x_2), G_k v(x_1, x_2)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho \geq \varepsilon} E_k(x_1, x_2) G_k v(x_1, x_2) \\ &= -\frac{2k}{k+1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((k+1)/(2k))}{\Gamma((2k+1)/(2k))} v(0, 0). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку G_k инвариантно относительно преобразования $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 + c)$, мы также имеем

$$G_k E_k(x_1, x_2 + c) = -\frac{2k}{k+1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((k+1)/(2k))}{\Gamma((2k+1)/(2k))} \delta(0, -c).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $x_1 \neq 0$, ядро ведет себя как $\log$, однако оно имеет скачок при приближении к отрезку $x_1 = 0$.

Введем преобразование Кельвина

$$x_1 = \frac{y_1}{\{y_1^{2k+2} + (k+1)^2 y_2^2\}^{1/(k+1)}}, \quad x_2 = \frac{y_2}{\{y_1^{2k+2} + (k+1)^2 y_2^2\}}.$$

Легко видеть, что

$$y_1 = \frac{x_1}{\{x_1^{2k+2} + (k+1)^2 x_2^2\}^{1/(k+1)}}, \quad y_2 = \frac{x_2}{\{x_1^{2k+2} + (k+1)^2 x_2^2\}}$$

и

$$\{x_1^{2k+2} + (k+1)^2 x_2^2\} = \frac{1}{\{y_1^{2k+2} + (k+1)^2 y_2^2\}}.$$

При преобразовании Кельвина кривая $\{y_1^{2k+2} + (k+1)^2 (y_2 - 1)^2\} \leq (k+1)^2$ переходит в $x_2 \geq 1/(2k+2)$. Действительно,

$$\begin{aligned} x_2 \geq \frac{1}{2k+2} &\iff \frac{y_2}{\{y_1^{2k+2} + (k+1)^2 y_2^2\}} \geq \frac{1}{2k+2} \\ &\iff \{y_1^{2k+2} + (k+1)^2 y_2^2\} \leq 2(k+1)y_2. \end{aligned}$$

Это означает, что $\{y_1^{2k+2} + (k+1)^2 (y_2 - 1)^2\} \leq (k+1)^2$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} G_k(u \cdot v) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(uv) + x_1^{2k} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(uv) \\ &= v \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1^{2k} \left\{ v \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\} \\ &= v G_k u + u G_k v + 2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1^{2k} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $v(y) = \rho^k(x(y))u(x(y))$ и через $G_k^{(y)}$, $G_k^{(x)}$ обозначим оператор Грушина, действующий по переменным y и x . Подробное вычисление показывает (см. [6]), что

$$G_k^{(y)} v(y) = \rho^{k+4}(x) G_k^{(x)} u(x).$$

4. Задача на собственное значение. Рассмотрим задачу

$$G_k u + \lambda u + f(x) = 0, \quad (6)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in L^2(\Omega)$ и $u \in S_{0,k}^{1,2}(\Omega)$. Сформулируем классические теоремы Гильберта–Шмидта, Ентча и Фредгольма для G_k .

ТЕОРЕМА 7. 1) Множество собственных значений $\{\lambda_j\}$ непусто, расположено на вещественной оси $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек. Каждое характеристическое число имеет конечную кратность, система собственных функций $\{\psi_j\}$ может быть выбрана ортонормированной в $L^2(\Omega)$, и она ортогональна и полна в $L^2(\Omega)$ и $S_{0,k}^{1,2}(\Omega)$.

2) $\psi_1(x_1, x_2)$ не меняет знак в Ω (напомним, что Ω связно) и λ_1 положительно и просто.

3) Если $\lambda \neq \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots$, то уравнение (6) однозначно разрешимо при любом свободном члене $f \in L^2(\Omega)$. Если $\lambda = \lambda_j$, то для разрешимости (6) необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, \psi_{j+i})_{L^2(\Omega)} = 0, \quad i = 0, \dots, r_j - 1,$$

где $\psi_j, \psi_{j+1}, \dots, \psi_{j+r_j-1}$ – собственные функции, соответствующие собственному значению λ_j , и r_j – кратность λ_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опускаем детали.

Теперь нас интересует гладкость собственных функций. Из гипоеллиптичности G_k выводим, что $u \in C^\infty(\Omega)$. Во всех точках $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, $x_1 \neq 0$, выполнено $u \in C^\infty(O(x_1, x_2) \cap \Omega)$, так как G_k эллиптичен в них. Здесь через $O(x_1, x_2)$ обозначена некоторая окрестность (x_1, x_2) . Более того, если $(0, x_2) \in \partial\Omega$ и $\nu(0, x_2) \sim (0, 1)$, то из результата Кона–Ниренберга [7] вытекает, что $u \in C^\infty(O(x_1, x_2) \cap \Omega)$ (по крайней мере для $k = 1$). Мы покажем некоторые результаты о гладкости собственных функций для $(0, x_2)$ и $\nu(0, x_2) \sim (0, 1)$.

ТЕОРЕМА 8. А) Предположим, что

- 1) $G_k u + \lambda a(x_1, x_2)u = 0$ в Ω , где $a(x_1, x_2) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и $u \in S_{0,k}^{1,2}(\Omega)$;
- 2) если $(0, \tilde{x}_2) \in \partial\Omega$, то существует некоторая окрестность $O(0, \tilde{x}_2)$ такая, что $O(0, \tilde{x}_2) \cap \partial\Omega = \text{линия}(x_1, \tilde{x}_2)$, где $-c_1 < x_1 < c_1$.

Тогда $u \in C^\infty(\overline{O(0, \tilde{x}_2) \cap \Omega})$.

Б) Предположим, что

- 1) $G_k u + \lambda u = 0$ в Ω , где $a(x_1, x_2) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и $u \in S_{0,k}^{1,2}(\Omega)$;
- 2) если $(0, \tilde{x}_2) \in \partial\Omega$, то существует некоторая окрестность $O(0, \tilde{x}_2)$ такая, что $O(0, \tilde{x}_2) \cap \partial\Omega = \{(k+1)^2(x_2 - \tilde{x}_2)^2 + x_1^{2k+2} = (k+1)^2\} \cap \partial\Omega$.

Тогда $u \in C^\infty(\overline{O(0, \tilde{x}_2) \cap \Omega})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) Поскольку G_k инвариантно относительно преобразования $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 + c)$, можно считать, что $(0, \tilde{x}_2) = (0, 0)$ и $\Omega \subset \{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0\}$. Продолжим $a(x_1, x_2)$, $u(x_1, x_2)$ из Ω в $\bar{\Omega} = \Omega \cap \Omega_1$, где $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, -x_2) \in \Omega\}$ определяется как

$$\tilde{a}(x_1, x_2) = \begin{cases} a(x_1, x_2), & \text{если } (x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}, \\ a(x_1, -x_2), & \text{если } (x_1, x_2) \in \Omega_1, \end{cases}$$

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \begin{cases} u(x_1, x_2), & \text{если } (x_1, x_2) \in \Omega, \\ -u(x_1, -x_2), & \text{если } (x_1, x_2) \in \Omega_1. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{u}(x_1, x_2) \in C^\infty(O(0, 0) \setminus (0, 0))$, $a(x_1, x_2) \in C(O(0, 0))$ и

$$G_k \tilde{u} + \lambda \tilde{a}(x_1, x_2) \tilde{u} = 0 \quad \text{в } O(0, 0) \setminus (0, 0).$$

Из теоремы Шварца вытекает, что

$$G_k \tilde{u} + \lambda \tilde{a}(x_1, x_2) \tilde{u} = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha \delta^\alpha(0, 0).$$

Заметим, что $\tilde{u} \in L^2(O(0, 0))$. Отсюда вытекает, что

$$G_k \tilde{u} + \lambda \tilde{a}(x_1, x_2) \tilde{u} \in H_{\text{loc}}^{-2}(O(0, 0)).$$

С другой стороны, $\delta^\alpha \notin H_{\text{loc}}^{-2}(O(0, 0))$, если $|\alpha| \geq 1$. Следовательно,

$$G_k \tilde{u} + \lambda \tilde{a}(x_1, x_2) \tilde{u} = C \delta(0, 0) = C G_k E_k(x_1, x_2).$$

Это означает, что $G_k(\tilde{u} - C E_k) = -\lambda \tilde{a} \tilde{u}$. Мы также имеем $\lambda \tilde{a}(x_1, x_2) \tilde{u} \in L^2(O(0, 0))$, поэтому в силу теоремы Хёрмандера [8] выводим, что $\tilde{u} - C E_k \in L_{\text{loc}}^2(O(0, 0))$. Следовательно, $E_k \in L_{\text{loc}}^2(O(0, 0))$, что приводит к противоречию, если $k \geq 2$, так как $E_k \notin L_{\text{loc}}^{(k+2)/k}(\Omega)$. Рассмотрим случай $k = 1$. В силу теоремы 2 имеем $\tilde{u} \in L_{\text{loc}}^5(O(0, 0))$. Из теоремы Ротшильда–Стейна [9] выводим, что $\tilde{u} - C E_k \in L_{\text{loc}}^5(O(0, 0))$. Следовательно, $E_k \in L_{\text{loc}}^5(O(0, 0))$, что также ведет к противоречию, так как $E_k \notin L_{\text{loc}}^3(O(0, 0))$.

Б) Как и ранее, поскольку G_k инвариантно относительно преобразования $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 + c)$, можно считать, что $(0, \tilde{x}_2) = (0, 0)$ и

$$O(0, 1) \cap \partial\Omega = \{(k+1)^2(x_2 - 1)^2 + x_1^{2k+2} = (k+1)^2\} \cap \partial\Omega.$$

Пусть $v(y) = \rho^k(x)u(x)$, где y_1, y_2 , как в преобразовании Кельвина. Тогда получим уравнение для $v(y)$

$$\rho^{k+4}(y) G_k^{(y)} v(y) + \lambda \rho^k(y) v(y) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $G_k v(y) + \lambda \rho^{-4} v(y) = 0$ в некоторой окрестности $O(0, 1/(2k+2)) \cap \{(y_1, y_2) \mid y_2 \geq 1/(2k+2)\}$. Из части А) заключаем, что

$$v(y) \in C^\infty \left(\overline{O\left(0, \frac{1}{2k+2}\right) \cap \left\{(y_1, y_2) \mid y_2 > \frac{1}{2k+2}\right\}} \right).$$

Следовательно, $u(x_1, x_2) = v(y) \rho^{-k}(x_1, x_2) \in C^\infty(\overline{O(0, 1) \cap \Omega})$.

ПРИМЕР 3. Здесь приведем некоторое явное вычисление для собственных значений в квадрате. Пусть $\Omega = (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2)$. Будем искать собственные функции в виде $u(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot g(x_2)$ с $f(-\pi/2) = f(\pi/2) = 0$ и $g(-\pi/2) = g(\pi/2) = 0$. Имеем

$$f''(x_1)g(x_2) + x_1^{2k}f(x_1)g''(x_2) + \lambda f(x_1)g(x_2) = 0$$

или

$$g(x_2)\{f''(x_1) + \lambda f(x_1)\} = -x_1^{2k}f(x_1)g''(x_2).$$

Следовательно,

$$\frac{f''(x_1) + \lambda f(x_1)}{x_1^{2k}f(x_1)} = -\frac{g''(x_2)}{g(x_2)} = C.$$

Таким образом, приходим к задачам на собственные значения для $f(x_1)$, $g(x_2)$

$$g''(x_2) + Cg(x_2) = 0, \quad g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (7)$$

$$f''(x_1) - Cx_1^{2k}f(x_1) + \lambda f(x_1) = 0, \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (8)$$

Из (7) заключаем, что $C = n^2$ и $g(x_2) = C \sin(x_2 - \pi/2)n$. Для каждого $C = n^2$ задача (8) имеет собственные значения λ_n^j с условием $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_n^j = \infty$, и каждое собственное значение имеет конечную кратность. Из свойства собственных значений для оператора Грушина также следует тот факт, что собственные значения для задачи

$$f''(x_1) - n^2 x_1^{2k} f(x_1) + \lambda f(x_1) = 0$$

никогда не совпадают бесконечное число раз. Легко видеть, что система $\sin(x_2 - \pi/2)n \times f_n^j(x_1)$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$, $j = 1, 2, \dots, \infty$) полна. Следовательно, всеми собственными значениями для G_k в квадрате служат только λ_n^j .

Автор выражает искреннюю благодарность Международному центру по теоретической физике за поддержку и гостеприимство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Федий В. С. Об одном условии гипоеллиптичности // Матем. сб. 1971. Т. 85. С. 18–48.
- [2] Jerison D. V. The Dirichlet problem for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group. II // J. Funct. Anal. 1981. V. 43. P. 224–257.
- [3] Tri N. M. Sobolev Imbedding Theorems for Degenerate Metric. Preprint ICTP. Teaneck, NJ: World Sci. Publ., 1995.
- [4] Garofalo N., Lanconelli E. Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group // Indiana Univ. Math. J. 1992. V. 41. P. 71–98.
- [5] Похожаев С. И. О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165. № 1. С. 36–39.
- [6] Tri N. M. Superlinear Equations for Degenerate Elliptic Operators. Preprint ICTP. Teaneck, NJ: World Sci. Publ., 1995.
- [7] Kohn J. J., Nirenberg L. Non-coercive boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. 1965. V. 18. P. 443–492.
- [8] Hörmander L. Hypoelliptic second-order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.
- [9] Rothschild L. P., Stein E. M. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137. P. 247–320.