Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Пугачев, Поверхностные меры в бесконечномерных пространствах, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 106–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:10:41

УДК 517

ПОВЕРХНОСТНЫЕ МЕРЫ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

О. В. Пугачёв

Работа посвящена построению поверхностных мер на поверхностях коразмерности $n \geq 1$ в банаховых пространствах и в широком классе локально выпуклых пространств. При этом от определяющей функции требуется непрерывность производной вдоль подпространства.

Библиография: 7 названий.

Введение. Поверхностные меры в бесконечномерных пространствах представляют значительный интерес как для самой аналитической (геометрической) теории меры, так и для ее приложений в нелинейном анализе и теории случайных процессов. Имеется несколько различных подходов к построению поверхностных мер, отвечающих достаточно гладким мерам на бесконечномерных пространствах. Первое общее построение было осуществлено А. В. Скороходом [1], конструкция которого была развита А. В. Углановым [2]. Совершенно другая идея была предложена П. Мальявеном и реализована в работе [3]. В. И. Богачёв [4] показал, что с помощью идей исчисления Мальявена можно строить и поверхностные меры, введенные в [1] и [2]. Настоящая работа посвящена развитию этого подхода. Основная идея, позволяющая обобщать конструкцию поверхностной меры, состоит в том, чтобы она зависела не от геометрии объемлющего пространства, а от геометрии вложенного гильбертова пространства. Благодаря этому поверхностные меры инвариантно строятся на поверхностях коразмерности $n \geq 1$, причем не только в банаховых, но и в широком классе локально выпуклых пространств. При этом от определяющей функции требуется непрерывность производной вдоль подпространства, из которой не вытекает непрерывность самой функции. Дальнейшее обобщение заключается в замене вложенного гильбертова пространства набором векторных полей.

Пусть X – локально выпуклое пространство с радоновой мерой μ . Введем обозначения: если X банахово, то $\|\cdot\|$ – норма в X , U_X – открытый единичный шар в X ; H – фиксированное гильбертово пространство, непрерывно вложенное в X , $\langle \cdot | \cdot \rangle$ – скалярное произведение в H . Через $[A]$ будем обозначать замыкание множества A , через $\text{l.h.}\{\cdot\}$ – линейную оболочку множества. Если $X = Y \times Z$, то P_Y^Z – проекция на Y вдоль Z .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мера μ дифференцируема в смысле Фомина вдоль вектора u , если существует такая конечная мера $d_y \mu$, что для любого борелевского B

$$d_t(\mu(B + ty)) \Big|_{t=0} = d_y \mu(B).$$

Через $D^m(\mu)$ будем обозначать пространство m -кратной дифференцируемости меры в смысле Фомина, $D(\mu) = D^1(\mu)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X – локально выпуклое пространство. Подмножество $S \subset X$ называется *поверхностью коразмерности n* , если существует измеримая определяющая функция $F = (F_1, \dots, F_n): X \rightarrow \mathbb{R}^n$ с $S = F^{-1}(0)$, где F_j имеют производные Гато (в случае вложенного H – градиенты по H), линейно независимые в окрестности S .

В случае вложенного H будем использовать следующие обозначения: $g_{ij}(x) = \langle \nabla F_i(x), \nabla F_j(x) \rangle$, $g^{ij}(x)$ – обратная матрица, $g(x) = \det(g_{ij}(x))$.

1. Поверхностные меры в сепарабельных банаховых пространствах. Угла-нов ввел поверхностную меру в сепарабельных банаховых пространствах на поверхностях коразмерности 1 в тех случаях, когда F' непрерывна (см. [2]). Поверхностная мера определялась как сильный предел мер на слоях уменьшающейся толщины. В работе В. Ю. Яхлакова [5] этот подход был обобщен для поверхностей коразмерности n .

В работе Богачёва [4] поверхностные меры были определены для более широкого класса поверхностей коразмерности 1. Основное отличие его подхода от подхода Угла-нова состоит в замене сильного предела слоевых мер на слабый.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть F – определяющая функция поверхности S коразмерности 1, $s \in [S]$. Мера μ_F называется *ненормированной локальной поверхностной мерой* в окрестности U точки s , если

- 1) μ_F сосредоточена на S ;
- 2) для всякой непрерывной ограниченной функции φ с носителем в $[U]$ имеет место соотношение

$$\int_U \varphi(x) \mu_F(dx) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{F^{-1}(-\delta, \delta) \cap U} \varphi(x) \mu(dx);$$

мера $\mu_\sigma(dx) = \|F'(x)\| \mu_F(dx)$ называется *локальной поверхностной мерой*.

Мера μ_F зависит от выбора F , а μ_σ не зависит. В [4] было доказано существование таких мер для некоторой окрестности U любой точки $s \in [S]$ при условиях: $D(\mu)$ плотно, F' локально ограничена, $d_x F$ непрерывна для всякого $x \in D(\mu)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Радонова мера μ_σ называется *поверхностной мерой на S* , если она сосредоточена на S и в некоторой окрестности любой точки $[S]$ является локальной поверхностной мерой. (Эта мера единственна в силу лиденёфовости X).

Покажем на примере, что, даже когда поверхностная мера конечна, ее нельзя глобально задать таким пределом, как в определении 3. Пусть X гильбертово, γ_0 – невырожденная центрированная радонова гауссова мера (см. [1]), e_k – ортонормированные собственные векторы оператора ковариации. Можно так подобрать $R > 0$, что $\gamma_0(RU_X/2) > 0$. Пусть мера γ – сжатие γ_0 в R раз; $\psi(x) = \max\{0, (1 - \|x\|^2)^2\}$; $\nu = \psi\gamma$. Мера ν радонова и дифференцируема вдоль e_k в смысле Фомина. Пусть A_m – аффинное преобразование, заданное формулой

$$A_m(te_m + y) = (1 + 2 \cdot 4^{-m})e_m + 4^{-m}te_m + 2^{-m}y,$$

где y ортогонально e_m . Пусть

$$\nu_m = 4^{-m}(\nu \cdot A_m^{-1}), \quad |\nu_m|(X) = 4^{-m}|\nu|(X), \quad |d_{e_m}\nu_m|(X) = |d_{e_m}\nu|(X),$$

при $k \neq m$ $|d_{e_k}\nu_m|(X) = 2^{-m}|d_{e_k}\nu|(X)$, $\text{supp}(\nu_m) \subset \{1 + 4^{-m} \leq \|x\| \leq 1 + 4^{-(m-1)}\}$. Пусть $\mu = \sum \nu_m$. Тогда $|\mu|(X) = |\nu|(X)/3$, $|d_{e_k}\mu|(X) < 2|d_{e_k}\nu|(X)$, следовательно,

l.h. $\{e_k\} \subset D(\mu)$, откуда $D(\mu)$ плотно в X . Мера μ радонова. Пусть $F(x) = \|x\| - 1$. При $x \neq 0$ F' непрерывна, $\|F'(x)\| = 1$. Все локальные поверхностные меры на $S = F^{-1}(0)$ равны 0, значит, $\int 1\mu_\sigma(dx) = 0$. В то же время при $\delta = 4^{-m}$

$$\frac{1}{2 \cdot 4^{-m}} \int_{F^{-1}(-4^{-m}, 4^{-m})} \|F'(x)\| 1\mu(dx) = \frac{4^m}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} 4^{-k} |\nu|(X) = \frac{|\nu|(X)}{6} > 0.$$

Определение 3 можно обобщить на случай поверхностей коразмерности n , если в пространстве X зафиксировать непрерывно вложенное гильбертово пространство H такое, что $D^n(\mu) \cap H$ плотно в H . Например, если мера γ гауссова, то в качестве H можно взять $H(\gamma)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть U – окрестность точки $s \in [S]$. Локальная поверхностная мера равна $\mu_\sigma(dx) = (g(x))^{1/2} \mu_F(dx)$, где

$$\int_U \varphi(x) \mu_F(dx) = \lim_{r(V) \rightarrow 0} \frac{1}{m(V)} \int_{F^{-1}(V) \cap U} \varphi(x) \mu(dx),$$

для всякого $\varphi \in \mathcal{C}_b$: $\text{supp}(\varphi) \subset [U]$; $V \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $r(V) = \sup\{\|x\| : x \in V\}$ – радиус V ; m – мера Лебега на $\mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 1. Пусть $F = (F_1, \dots, F_n)$ – определяющая функция S , имеющая непрерывные производные вдоль любого $h \in H$, ∇F_i локально ограничены. (Заметим, что из этого не вытекает непрерывность F). Тогда любая $s \in [S]$ есть окрестность, на которой существует конечная локальная поверхностная мера; если F и G – две определяющие функции и на окрестности U существуют локальные поверхностные меры для F и G , то эти меры совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно выбрать $\{a^1, \dots, a^n\} \subset D^n(\mu) \cap H$ так, что

$$\left| \frac{dF_j(s)}{da^i} - \delta_{ij} \right| < \frac{1}{6n}.$$

На некоторой окрестности $U = s + 3U_1$ (U_1 – выпуклая окрестность нуля)

$$\left| \frac{dF_j(x)}{da^i} - \delta_{ij} \right| < \frac{1}{3n}$$

и $g_{ij}(x)$ ограничены. Тогда

$$|\det(d_a^i F_j(x)) - 1| < \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1}{3n}\right)^k \leq \sum_{k=1}^n n^k \left(\frac{1}{3n}\right)^k < \frac{1}{2}.$$

Пусть $L = \text{l.h.}\{a^1, \dots, a^n\}$, E – линейное топологическое дополнение L . Построим n раз дифференцируемую меру ν с носителем на $s + 2U_1$, совпадающую с μ на $s + U_1$. На L индуцируем евклидову метрику из H . В силу непрерывной вложенности L в X для любого $x \in L \setminus U_1$ $|x|_L \geq c$. Следовательно, для любого $x \in U_1$ имеет место неравенство $\text{dist}_L((x+L) \cap U_1; (x+L) \setminus 2U_1) \geq c$. Существует функция $\chi: X \rightarrow [0, 1]$ со следующими свойствами:

- 1) $\chi(x) = 1$ на $s + [U_1]$;
- 2) $\chi(x) = 0$ вне $(s + U_1 + L) \cap (s + 2U_1)$;
- 3) χ n раз дифференцируема вдоль L , все производные по наборам векторов $\{a^i\}$ ограничены в совокупности.

Положим $\nu = \chi\mu$. Построим условную меру относительно σ -алгебры множеств вида $A + L$, $A \in \mathcal{B}(E)$. Пусть $\theta = |\nu| \cdot (P_E^L)^{-1}$. Для любых $A \in \mathcal{B}(E)$ и $B \in \mathcal{B}(X)$ справедливо равенство

$$\nu((A + L) \cap B) = \int_A \nu(B|y)\theta(dy),$$

где для θ -почти всех y $\nu(B|y)$ – мера на X с носителем в $L + y$. Для θ -почти всех y мера $\nu(\cdot|y)$ n раз дифференцируема вдоль L . Пусть $Q = P_E^L(S \cap U)$. Для $y \in Q$ обозначим $z(y) = (y + L) \cap S \cap U$. Эта точка единственна для всякого $y \in Q$. Действительно, пусть $x = y + \sum t_i a^i$, $z = y + \sum u_i a^i$. Пусть $u_k - t_k = \max\{|u_i - t_i| : i = 1, \dots, n\}$. Тогда

$$F_k(z) - F_k(x) \geq (u_k - t_k) \left(1 - \frac{1}{3n}\right) - \sum_{i \neq k} \frac{|u_i - t_i|}{3n} \geq (u_k - t_k) \left(1 - n \frac{1}{3n}\right) > 0.$$

Пусть проекция $P_L^S: Q + L \rightarrow L$ задана формулой $P_L^S(s + h) = h$, где $s \in S$, $h \in L$. Для любого $A \in \mathcal{B}(E)$, $A \subset Q$, имеем меру η^A на L :

$$\eta^A(B) = \nu((P_L^S)^{-1}(B) \cap (A + L)),$$

она n раз дифференцируема вдоль L . Известно, что из n -кратной дифференцируемости меры на $\mathbb{R}^n$ вытекает существование у нее непрерывной плотности относительно меры Лебега (см. [6]). Поэтому существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{r(W) \rightarrow 0} \frac{\eta^A(W)}{m_L(W)} &= \lim_{r(W) \rightarrow 0} \frac{1}{m_L(W)} \int_A \nu(S \cap U + W|y)\theta(dy) \\ &= d_{a^1} \cdots d_{a^n} \nu \left((A + L) \cap \left(S + \sum_{i=1}^n (-\infty, 0] a^i \right) \right) = \int_A \rho(y)\theta(dy). \end{aligned} \quad (1)$$

(Здесь m_L – мера Лебега на L , нормированная по базису $\{a^1, \dots, a^n\}$; $W \in \mathcal{B}(L)$; ρ – θ -интегрируемая функция, существующая по теореме Радона–Никодима). Для θ -почти всех $y \in E$ в силу n -кратной дифференцируемости условной меры существует предел

$$p(y) = \lim_{r(W) \rightarrow 0} \frac{1}{m_L(W)} \nu(S \cap U + W|y).$$

Легко показать, что $p(y) = \rho(y)$ θ -почти всюду. Выберем для $z \in U$ такие $b^i(z) \in L$, что $dF_i(z)/db^j = \delta_{ij}$. Тогда $b^i(z) = \sum_j \beta_j^i(z) a^j$ и $1/2 < |\det(\beta_j^i(z))| < 2$ при $z \in U$. Пусть φ ограничена и непрерывна. В силу непрерывной дифференцируемости и инъективности F на $y + L$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi \cdot m_L(F^{-1}(V) \cap (y + L)) &= \int_V (\varphi \cdot |\det(\beta_j^i)|) (F^{-1}(t) \cap (y + L)) m(dt), \\ \lim_{r(V) \rightarrow 0} \frac{\varphi \nu(F^{-1}(V)|y)}{m(V)} &= \begin{cases} 0, & y \notin Q, \\ p(y) \varphi(z(y)) |\det(\beta_j^i(z(y)))|, & y \in Q. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

В силу соотношения $(y + L) \cap F^{-1}(rU_{\mathbb{R}^n}) \subset (z(y) + 2rU_L)$ из (1) и (2) получаем

$$\begin{aligned} \int_U \varphi(x) \nu_F(dx) &= \lim_{r(V) \rightarrow 0} \frac{1}{m(V)} \int_E \varphi \nu(F^{-1}(V)|y)\theta(dy) \\ &= \int_Q p(y) \varphi(z(y)) |\det(\beta_j^i(z(y)))| \theta(dy). \end{aligned}$$

Известно, что на сепарабельном банаховом пространстве пространство радоновых мер полно относительно слабой сходимости последовательностей. Следовательно, полученный интеграл соответствует некоторой мере на X . Функция g борелевская и ограниченная на U , значит, существует мера $\nu_\sigma(dx) = (g(x))^{1/2} \nu_F(dx)$, т.е.

$$\int \varphi(x) \nu_\sigma(dx) = \int_Q (g(z(y)))^{1/2} p(y) \varphi(z(y)) |\det(\beta_j^i(z(y)))| \theta(dy). \quad (3)$$

Докажем независимость ν_σ от F . Пусть G – другая определяющая функция, и окрестность U выбрана для обеих функций. Тогда для всякого $x \in S$

$$\nabla G_i(x) = \sum c_i^j(x) \nabla F_j(x)$$

(то же верно для ∇_L),

$$|\det(c_i^j(x))| = \left(\frac{g^G(x)}{g^F(x)} \right)^{1/2}$$

ограничен сверху и снизу на U ,

$$\det(\beta^G(z(y))) = \frac{\det(\beta^F(z(y)))}{\det(c(z(y)))}.$$

Следовательно, интегралы (3) совпадают. Для φ с носителем на $s + [U_1]$ имеем

$$\int \varphi(x) \mu_\sigma(dx) = \int \varphi(x) \nu_\sigma(dx).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В доказательстве леммы использовалась непрерывность φ только вдоль H . Поэтому и в определении 5 можно заменить класс $\mathcal{C}_b(X)$ на класс ограниченных функций, непрерывных вдоль H .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если ∇F_i непрерывны, то локальную поверхностную меру можно определить более простой формулой за счет непрерывности g :

$$\int \varphi(x) \mu_\sigma(dx) = \lim_{r(V) \rightarrow 0} \frac{1}{m(V)} \int_{F^{-1}(V)} (g(x))^{1/2} \varphi(x) \mu(dx).$$

Теперь перейдем к построению поверхностной меры на всей поверхности S . На любом компакте $K \subset [S]$ она существует и конечна, так как K покрывается конечным числом окрестностей, на которых существует локальная поверхностная мера.

ЛЕММА 2. Если поверхностная мера существует, то она определяется формулой

$$\mu_\sigma(A) = \lim_K \mu_\sigma(A \cap K),$$

где предел берется по направленности возрастающих компактов в $[S]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \sup\{|\mu_\sigma|(K) : K \in [S]\}$.

- 1) $M = \infty \Rightarrow$ поверхностная мера не существует.
- 2) $M < \infty$.

Выберем K_n такие, что $|\mu_\sigma|(K_n) > M - 1/n$, $K_n \subset K_{n+1}$, и положим для каждого борелевского A : $\mu_\sigma(A) = \lim \mu_\sigma(A \cap K_n)$. Эта функция будет σ -аддитивной в силу равномерной сходимости предела. Пусть $K_n \subset K$. Тогда $|\mu_\sigma|(K \setminus K_n) < 1/n$. Следовательно, для любого $A \in \mathcal{B}(X)$ $|\mu_\sigma(A \cap K_n) - \mu_\sigma(A \cap K)| < 1/n$, откуда $|\mu_\sigma(A \cap K) - \mu_\sigma(A)| < 2/n$. Сходимость по направленности установлена. Если $\mu_\sigma|_U$ – локальная поверхностная мера, φ – ограниченная непрерывная функция, $\text{supp}(\varphi) \subset [U]$, то

$$\int \varphi(x) \mu_\sigma|_U(dx) = \lim_K \int_K \varphi(x) \mu_\sigma(dx)$$

в силу радоновости $\mu_\sigma|_U$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Между случаями $n = 1$ и $n > 1$ есть существенная разница: даже из бесконечной дифференцируемости меры не следует вторая дифференцируемость ее жордановых составляющих, что мешает обобщить некоторые результаты на знакопеременные меры путем жорданова разложения.

2. Обобщение на случай локально выпуклого пространства. Для приложений поверхностных интегралов представляет интерес и более широкий класс пространств. Построение локальной меры на графике [2] легко обобщается на произвольное линейное топологическое пространство, что и было сделано в работе Угланова [7] для следующего случая: μ радонова, $D(\mu)$ – непрерывно вложенное нормированное пространство, F непрерывна и имеет непрерывную в топологии X ненулевую производную по $D(\mu)$ (назовем это *гладкостью*). На гладкой поверхности S каждая точка имеет окрестность $G \subset S$ в виде гладкого графика, и для положительной μ поверхностная мера на S определяется формулой

$$\mu_\sigma(Q) = \sup_n \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_\sigma(Q \cap G_k) : \forall j, k, j \neq k \Rightarrow G_k \cap G_j = \emptyset \right\}.$$

Если эта мера конечна, то она радонова. В случае знакопеременной меры $\mu_\sigma = \mu_\sigma^+ - \mu_\sigma^-$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В том случае, когда в X непрерывно вложено гильбертово пространство H , $D^n(\mu) \cap H$ плотно в H , а пространство радоновых мер на X слабо секвенциально полно, можно строить локальную поверхностную меру способом, описанным в лемме 1, для поверхностей коразмерности $n \geq 1$ и с менее жесткими условиями гладкости (в частности, без требования непрерывности). Доказательство леммы 1 сохраняется дословно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если X наследственно линделёфово, то переходить к мере на всей поверхности можно методом, описанным в лемме 2. Его преимущество в том, что он не требует положительности меры, следовательно, обобщается на знакопеременные меры даже в случае поверхностей коразмерности $n > 1$.

3. Меры, дифференцируемые вдоль векторных полей. Для задач бесконечномерного анализа представляют интерес не только меры, дифференцируемые по направлениям, но и меры с более общими условиями гладкости. Для некоторых из них удастся обобщить конструкцию поверхностной меры. Пусть X – локально выпуклое пространство, H – непрерывно вложенное гильбертово пространство. Будем называть

векторным полем непрерывную функцию $v: X \rightarrow H$, задающую группу непрерывных преобразований X $G_v = \{g_v^t: -\infty < t < +\infty\}$ по формуле

$$g_v^t(x) = x + \int_0^t v(g_v^\tau(x)) d\tau.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Мера μ дифференцируема в смысле Фомина вдоль векторного поля v , если существует мера $d_v\mu$ такая, что для каждого борелевского B

$$d_t|_{t=0}\mu(g_v^t(B)) = d_v\mu(B).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть W – область в X , $v^1(x), \dots, v^m(x)$ – векторные поля, линейно независимые в каждой точке W , а область W инвариантна относительно $G_{v^1}, \dots, G_{v^m}$. Набор векторных полей

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^m c_i v^i(x) : -\infty < c_i < +\infty \right\}$$

называется m -мерным векторным полем на W .

Ограничимся рассмотрением коммутирующих векторных полей. В этом случае возникает группа преобразований $G_m = \{g_{v^1}^{t_1} \cdots g_{v^m}^{t_m} : -\infty < t_i < +\infty\}$. Пусть $Y_m = W/G_m$ с индуцированной топологией, P_m – проекция W на Y_m .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Метрические пространства M_α равностепенно непрерывно вложены в линейное топологическое пространство X , если для каждой преднормы $\|\cdot\|$ в X выполнено соотношение

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \alpha \quad \forall x, y \in M_\alpha : \quad \text{dist}_\alpha(x, y) < \delta \implies \|x - y\| < \varepsilon.$$

Введем в m -мерных слоях $W \cap G_m(y)$ евклидовы метрики: если зафиксированы базисные поля $e^1(x), \dots, e^m(x)$, то положим

$$\text{dist}_y(g_{e^1}^{t_1} \cdots g_{e^m}^{t_m}(y); g_{e^1}^{u_1} \cdots g_{e^m}^{u_m}(y)) = \left(\sum_{i=1}^m (t_i - u_i)^2 \right)^{1/2}.$$

В касательных пространствах соответственно введем скалярное произведение $[e^i(x); e^j(x)]_x = \delta_{ij}$. Метрические пространства $G_m(y)$ локально равностепенно непрерывно вложены в X в силу локальной ограниченности $e^i(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть

- 1) $S = F^{-1}(0)$, $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- 2) L – векторное поле, m -мерное в окрестности S , $m \geq n$;
- 3) в окрестности S $\text{rank}(dF_i/de^j) = n$;
- 4) μ – радонова мера, n раз дифференцируемая вдоль L .

Тогда локальная поверхностная мера на S определяется формулой

$$\mu_\sigma^L(dx) = (\det([\nabla_{L(x)} F_i(x); \nabla_{L(x)} F_j(x)]_x))^{1/2} \mu_F(dx),$$

где μ_F такая, как в определении 5.

ЛЕММА 3. Пусть пространство радоновых мер на X слабо секвенциально полно. Если F имеет непрерывные производные вдоль полей L , то в окрестности любой точки $s \in [S]$ существует локальная поверхностная мера, не зависящая от выбора F указанного класса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем на L базис $\{a^1(x), \dots, a^m(x)\}$ так, что $dF_i(s)/da^j = \delta_{ij}$. Обозначим через G_n подгруппу G_m , порожденную $a^1, \dots, a^n$; $Y_n = W/G_n$. Существует U – окрестность s такая, что

- 1) для любого $x \in U$ $|dF_i(x)/da^j - \delta_{ij}| < 1/(3n)$;
- 2) евклидовы метрики на $G_n(y) \cap U$ равностепенно непрерывно вложены в X ;
- 3) сечения $G_n(y) \cap U$ выпуклы в евклидовой геометрии $G_n(y)$.

Дальше повторяем доказательство леммы 1 со следующими заменами:

- 1) E на Y_n , P_E^L на P_n ;
- 2) $y + \sum t_i a^i$ на $g_{a^1}^{t_1} \cdots g_{a^n}^{t_n}(y)$;
- 3) $y + L$ на $G_n(y)$ с соответствующей метрикой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если F имеет локально ограниченные градиенты, то в окрестности любой $s \in [S]$ существует также поверхностная мера μ_σ , заданная формулой из определения 5.

4. Независимость от топологии X . В работе [3] при построении поверхностной меры на функцию F накладывались условия дифференцируемости лишь вдоль H . Заметим, что при доказательстве леммы 7 топология пространства X использовалась лишь для того, чтобы выбрать окрестность, на которой легко строится локальная поверхностная мера. Однако, если для локализации использовать “окрестности” более общего вида, это позволит отказаться от наложения на F каких-либо условий, связанных с топологией X .

Пусть $F = (F_1, \dots, F_n): X \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет градиенты вдоль H , непрерывные вдоль H и линейно независимые в любой $s \in S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Назовем борелевское множество A *псевдооткрытым для F* , если существует конечномерное подпространство $L \subset H$ такое, что на A $\nabla_L F_1, \dots, \nabla_L F_n$ линейно независимы, и каждое сечение $(y + L) \cap A$ открыто в метрике L .

Пусть $H^{(n)} = \{(a^1, \dots, a^n) \in H^n : a^1, \dots, a^n \text{ линейно независимы}\}$. Для каждого набора $(a^1, \dots, a^n) \in H^{(n)}$ возьмем область

$$U_{a^1, \dots, a^n} = \left\{ (h_1, \dots, h_n) : |\langle h_i | a^j \rangle - \delta_{ij}| < \frac{1}{3n} \right\}.$$

Из этих областей можно выбрать счетное покрытие $H^{(n)}: \{U_k\}_{k=1}^\infty$, где $U_k = U_{a_k^1, \dots, a_k^n}$. Пусть

$$\Omega_k = \{x \in X : (\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_n(x)) \in U_k\}, \quad S \subset \bigcup_k \Omega_k.$$

Пусть $L_k = \text{l.h.}\{a_k^1, \dots, a_k^n\}$, E_k – линейное топологическое дополнение L_k . Для каждого натурального k и $\rho > 0$ определим множество

$$\Omega_k^\rho = \cup \{s + \rho U_{L_k} : s \in S, s + \rho U_{L_k} \subset \Omega_k\}.$$

Это множество является борелевским в силу того, что функции $F_i, \nabla F_i, \text{dist}_{L_k}(x, A)$ ($A \in \mathcal{B}(X)$) борелевские. Каждое сечение $\Omega_k^\rho \cap (y + L_k) \cap S$ состоит из точек, отстоящих друг от друга в метрике L_k не менее, чем на 2ρ , поскольку в ρ -окрестностях этих

точек по любому направлению в L_k хотя бы одна из функций F_i строго монотонна (см. доказательство леммы 7). Пусть $\{z_j\}$ – счетная $\rho/4$ -сеть на L_k . Положим

$$\Omega_{k,j}^{\rho,\rho/2} = \Omega_k^\rho \cap \left(E + z_j + \frac{\rho}{2} U_{L_k} \right).$$

Эти множества являются борелевскими, и $\Omega_k^\rho \subset \bigcup_j \Omega_{k,j}^{\rho,\rho/2}$. В каждом сечении $\Omega_{k,j}^{\rho,\rho/2} \cap (y + L_k)$ содержится не более одной точки S . Функция F инъективна в каждом таком сечении. Существует борелевская функция $\chi_{k,j}^\rho: X \rightarrow [0, 1]$ со следующими свойствами:

- 1) если $\Omega_{k,j}^{\rho,\rho/2} \cap (y + L_k) \cap S = \emptyset$, то $\chi_{k,j}^\rho = 0$ на $y + L_k$;
- 2) если это сечение непусто (в этом случае $y + z_j + \frac{\rho}{2} U_{L_k} \subset \Omega_k^\rho$), то $\chi_{k,j}^\rho = 1$ на $y + z_j + \frac{\rho}{4} U_{L_k}$, $\chi_{k,j}^\rho = 0$ на $(y + L_k) \setminus (y + z_j + \frac{\rho}{2} U_{L_k})$;
- 3) $\chi_{k,j}^\rho$ n раз дифференцируема вдоль L_k и все ее производные ограничены.

Мера $\nu_{k,j}^\rho = \chi_{k,j}^\rho \cdot \mu$ n раз дифференцируема вдоль L_k в смысле Фомина. Повторив рассуждение из леммы 7, построим конечную меру $(\nu_{k,j}^\rho)_\sigma$ такую, что для ограниченных функций, непрерывных хотя бы вдоль L_k , выполнено соотношение

$$\int \varphi(x) (\nu_{k,j}^\rho)_\sigma(dx) = \lim_{r(V) \rightarrow 0} \frac{1}{m(V)} \int_{F^{-1}(V)} \varphi(x) (g(x))^{1/2} \nu_{k,j}^\rho(dx).$$

Заметим, что

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_{k,j}^{1/m, 1/(4m)}.$$

Это позволяет при помощи разбиения единицы построить поверхностную меру на всей поверхности S :

$$\mu_\sigma = \sum_{k,m,j=1}^{\infty} \psi_{k,j}^{1/m} \nu_{k,j}^{1/m},$$

$\psi_{k,j}^\rho = 0$ вне $\Omega_{k,j}^{\rho,\rho/4}$. Вопрос об инвариантности такой меры пока не решен.

Автор выражает благодарность В. И. Богачёву за постановку задачи и научное руководство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975.
- [2] Угланов А. В. Поверхностные меры в банаховом пространстве // Матем. сб. 1979. Т. 110. № 2. С. 189–217.
- [3] Airault H., Malliavin P. Intégration géométrique sur l'espace de Wiener // Bull. Sci. Math. (2). 1988. V. 112. P. 3–52.
- [4] Bogachev V. I. Smooth measures, the Malliavin calculus and approximations in infinite-dimensional spaces // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 1990. V. 31. № 2. P. 9–23.
- [5] Яхлаков В. Ю. Поверхностные меры на поверхностях конечной коразмерности в банаховом пространстве // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 4. С. 147–156.
- [6] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [7] Угланов А. В. Поверхностные интегралы в линейных топологических пространствах // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 4. С. 450–453.