Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Чебан, Асимптотика решений бесконечномерных однородных динамических систем, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 115–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 10:26:15

УДК 517.938+517.925.51

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д. Н. Чебан

В заметке изучается связь между равномерной асимптотической устойчивостью и степенной или экспоненциальной асимптотикой решений бесконечномерных систем (дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, функционально-дифференциальных уравнений, вполне разрешимых многомерных дифференциальных уравнений).

Библиография: 18 названий.

В работах Н. Н. Красовского [1], [2], В. И. Зубова [3] и К. Коулмена [4] показано, что для однородной автономной системы в конечномерном пространстве наличие степенной асимптотики эквивалентно асимптотической устойчивости. В работах А. Ф. Филиппова [5], [6] этот результат обобщен на однородные дифференциальные включения. Н. Н. Ладисом показано [7], что в общем случае аналогичный факт для периодических систем не имеет места. Для неавтономных однородных (порядка $k = 1$) систем равномерная асимптотическая устойчивость эквивалентна экспоненциальной устойчивости (см., например, [8]). М. В. Морозовым [9] получен аналогичный результат для периодических дифференциальных включений.

Целью настоящей заметки является изучение связи между равномерной асимптотической устойчивостью и степенной (экспоненциальной) асимптотикой решений бесконечномерных систем. Эта задача рассматривается и решается в рамках общих динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Полученные при этом общие результаты применяются к различным дифференциальным уравнениям с бесконечномерными фазовыми пространствами (обыкновенным дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах, функционально-дифференциальным уравнениям, некоторым типам эволюционных уравнений в частных производных, вполне разрешимым многомерным дифференциальным уравнениям).

1. Абстрактные динамические системы. Всюду ниже мы будем использовать обозначения и терминологию из [10], [11]. Напомним некоторые из них. Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство, $\mathbb{R}(\mathbb{Z})$ – группа действительных (целых) чисел, $S = \mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$ и $T = S_+ = \{s : s \in S, s \geq 0\}$. Через $\rho(x, A)$ обозначим расстояние от точки x до множества A , $C(X)$ – совокупность всех непустых компактов из X и 2^X – семейство всех ограниченных замкнутых подмножеств X , снабженное метрикой Хаусдорфа.

Дисперсной динамической системой на X называют тройку (X, T, f) , где f – отображение $T \times X$ в $C(X)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $f(x, 0) = x$ ($x \in X$);

$$2) f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2) \quad (x \in X, t_1, t_2 \in T);$$

$$3) \beta(f(x, t), f(x_0, t_0)) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ и } t \rightarrow t_0, \text{ где } \beta(A, B) = \sup\{\rho(a, B) : a \in A\}.$$

Непрерывное однозначное отображение $\varphi_x : T \rightarrow X$ называют *движением дисперсной динамической системы* (X, T, f) , *исходящим из точки* $x \in X$, если

$$\text{а) } \varphi_x(0) = x;$$

$$\text{б) } \varphi_x(t_2) \in f(\varphi_x(t_1), t_2 - t_1) \text{ для любых } t_1, t_2 \in T \text{ (} t_2 > t_1 \text{)}.$$

Множество всех движений, исходящих из точки $x \in X$, обозначают через Φ_x и $\Phi(f) = \bigcup\{\Phi_x : x \in X\}$.

Дисперсную динамическую систему (X, T, f) называют *системой с единственностью* (или *обыкновенной динамической системой*), если при всех $x \in X$ и $t \in T$ множество $f(x, t)$ является одноточечным, т.е. через каждую точку $x \in X$ проходит единственная траектория динамической системы (X, T, f) .

Неавтономной дисперсной динамической системой назовем тройку $\langle (X, T, f), (Y, T, \sigma), h \rangle$, где (X, T, f) – дисперсная динамическая система на X , (Y, T, σ) – обыкновенная динамическая система на Y и h – гомоморфизм (X, T, f) на (Y, T, σ) , т.е. непрерывное отображение X на Y , удовлетворяющее условию $h(f(x, t)) = \sigma(h(x), t)$ при всех $x \in X$ и $t \in T$.

Пусть (X, h, Y) – локально тривиальное векторное расслоение со слоем E . Автономную динамическую систему $(X, \mathbb{R}_+, f)$ назовем *однородной порядка* $k \in \mathbb{R}$, если для любых $x \in X$, $\lambda \geq 0$ и $\varphi_x \in \Phi_x$ функция $\psi : T \rightarrow X$, определенная равенством $\psi(t) = \lambda \varphi_x(\lambda^{k-1}t)$, является движением (X, T, f) , исходящим из точки $\lambda x \in X$, т.е. $\psi \in \Phi_{\lambda x}$.

Неавтономную динамическую систему $\langle (X, T, f), (Y, T, \sigma), h \rangle$ назовем *однородной порядка* $k = 1$, если автономная динамическая система (X, T, f) является однородной порядка $k = 1$.

Всюду ниже мы будем предполагать, что расслоение (X, h, Y) является нормированным. Положим $|A| = \sup\{|a| : a \in A\}$, если $A \subseteq X$ ограничено. Через X^s обозначим устойчивое многообразие однородной системы $\langle (X, T, f), (Y, T, \sigma), h \rangle$, т.е.

$$X^s = \left\{ x : x \in X, \lim_{t \rightarrow +\infty} |f(x, t)| = 0 \right\},$$

и $\Theta = \{\theta_y : y \in Y\}$, где θ_y – нулевой элемент X_y – нулевое сечение расслоения (X, h, Y) .

ЛЕММА 1.1. Пусть неавтономная система $\langle (X, T, f), (Y, T, \sigma), h \rangle$ является однородной порядка $k = 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) нулевое сечение Θ расслоения (X, h, Y) устойчиво, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|x| < \delta$ влечет $|f(x, t)| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$;
- б) существует положительное число N такое, что

$$|f(x, t)| \leq N|x| \tag{1}$$

при всех $x \in X$ и $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из а) следует б). Пусть $\varepsilon_0 = 1$ и $\delta_0 > 0$ таково, что $|x| \leq \delta_0$ влечет $|f(x, t)| \leq 1$ при всех $|x| \leq \delta_0$ и $t \geq 0$. Пусть теперь $x \in X$ и $\varphi_x \in \Phi_x$. Тогда в силу однородности системы (X, T, f) имеем $\delta_0|x|^{-1}\varphi_x \in \Phi_{\delta_0|x|^{-1}x}$, и так как $f(x, t) = \{\varphi_x(t) : \varphi_x \in \Phi_x\}$ (см., например, [10]), из (1) имеем $|f(x, t)| \leq \delta_0^{-1}|x|$ при всех $t \geq 0$ и $x \in X$. Обратная импликация очевидна. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.2. В условиях леммы 1.1 следующие условия эквивалентны:

- а) нулевое сечение $\langle X, h, Y \rangle$ равномерно асимптотически устойчиво, т.е. Θ устойчиво, и существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq \gamma} |f(x, t)| = 0; \quad (2)$$

- б) имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{|x| \leq 1} |f(x, t)| = 0 \quad (3)$$

и существует $N > 0$ такое, что

$$\sup_{|x| \leq 1} |f(x, t)| \leq N$$

при всех $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из а) следует б). Согласно лемме 1.1 для этого достаточно показать, что из (2) следует (3). Пусть $x \in X$ ($|x| \leq 1$) и $\varphi_x \in \Phi_x$; тогда в силу однородности (X, T, f) имеем $\gamma|x|^{-1}\varphi_x \in \Phi_{\gamma|x|^{-1}x}$, и так как $f(x, t) = \{\varphi_x(t) : \varphi_x \in \Phi_x\}$, из (2) имеем

$$\sup_{|x| \leq 1} |f(x, t)| \leq \gamma^{-1} \sup_{|y| \leq \gamma} |f(y, t)| \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow +\infty$. Аналогично устанавливается и обратная импликация. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Леммы 1.1 и 1.2 имеют место и для автономных однородных (порядка $k > 1$) систем.

ЛЕММА 1.3. Пусть $\mathfrak{M}$ – семейство функций $m: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям:

- а) существует $M > 0$ такое, что $0 < m(t) \leq M$ при всех $t \geq 0$ и $m \in \mathfrak{M}$;
 б) $m(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $m \in \mathfrak{M}$, т.е. для любых $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathfrak{M}$ существует $L(\varepsilon, m) > 0$ такое, что $m(t) < \varepsilon$ при всех $t \geq L(\varepsilon, m)$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) если $m(t + \tau) \leq m(t)m(\tau)$ при всех $t, \tau \geq 0$ и $m \in \mathfrak{M}$, то существуют положительные числа N и ν такие, что $m(t) \leq Ne^{-\nu t}$ при всех $t \geq 0$ и $m \in \mathfrak{M}$;
- 2) если $m(t + \tau) \leq m(t)m(\tau m^{\alpha-1}(t))$ ($\alpha > 1$) при всех $t, \tau \geq 0$ и $m \in \mathfrak{M}$, то существуют положительные числа a и b такие, что

$$m(t) \leq M(a + bt)^{-1/(\alpha-1)} \quad (4)$$

при всех $t \geq 0$ и $m \in \mathfrak{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы является незначительной модификацией одной леммы Массера и Шеффера [12, с. 167]. Докажем второе утверждение леммы. Пусть $\tau > 0$ таково, что $m(t) \leq 1/2$ при всех $t \geq \tau$ и $m \in \mathfrak{M}$. Так как $0 < m(t) \leq M$ и $m(t + \tau) \leq m(t)m(\tau m^{\alpha-1}(t))$ при всех $t, \tau \geq 0$ и $m \in \mathfrak{M}$, имеем

$$m(t) \leq M, \quad 0 \leq t \leq q\tau, \quad q = 2^{\alpha-1}, \quad (5)$$

и

$$m(t) \leq \frac{1}{2}, \quad q\tau \leq t < +\infty, \quad (6)$$

при всех $m \in \mathfrak{M}$. Положим $t_0 = 0$, $t_{i+1} = t_i + \tau q_i$ ($q_i = q^i$) и заметим, что

$$m(t_i) \leq \frac{1}{2^i}, \quad i \geq 1, \quad (7)$$

при всех $m \in \mathfrak{M}$. В самом деле, $m(t_1) \leq 2^{-1}$ согласно (6). Кроме того

$$m(t_{i+1}) = m(t_i + \tau q_i) \leq m(t_i)m(\tau q_i m^{\alpha-1}(t_i)) \quad (8)$$

при всех $m \in \mathfrak{M}$. Предположим, что (7) имеет место для всех $i \leq n$; тогда из (8) следует, что $m(t_{n+1}) \leq 1/2^{n+1}$, так как $\tau q_n m^{\alpha-1}(t_n) \geq \tau$ (для любого $m \in \mathfrak{M}$) в силу выбора q_n и индуктивного предположения (7). Таким образом, из (5) и (7) следует, что $m(t) \leq 1/2^n$ при всех $t \geq t_n$ и $n \geq 1$. Заметим, что $t_{n+1} = \tau(q^{n+1} - 1)(q - 1)^{-1}$ и, следовательно,

$$2^{-n} = 2 \left(\frac{2^{\alpha-1} - 1}{\tau} t_{n+1} + 1 \right)^{-1/(\alpha-1)}.$$

Пусть теперь $t \in [t_n, t_{n+1})$; тогда

$$2^{-n} < 2 \left(1 + \frac{2^{\alpha-1} - 1}{\tau} t \right)^{-1/(\alpha-1)}. \quad (9)$$

Из (5) и (9) следует, что

$$m(t) \leq M \left(2^{1-\alpha} + \frac{1 - 2^{1-\alpha}}{\tau} t \right)^{-1/(\alpha-1)}$$

при всех $t \geq 0$ и $m \in \mathfrak{M}$. Положив $a = 2^{1-\alpha}$ и $b = \tau^{-1}(1 - 2^{1-\alpha})$, получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть неавтономная дисперсная динамическая система $\langle (X, T, f), (Y, T, \sigma), h \rangle$ является однородной порядка $k = 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- нулевое сечение расслоения (X, h, Y) равномерно асимптотически устойчиво;
- существуют положительные числа N и ν такие, что $|f(x, t)| \leq N e^{-\nu t} |x|$ при всех $x \in X$ и $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы 1.1 достаточно показать, что имеет место импликация а) $\Rightarrow$ б), так как обратное утверждение очевидно. Положим

$$m(t) = \sup_{|x| \leq 1} |f(x, t)|. \quad (10)$$

Согласно лемме 1.2 равенством (10) корректно определено отображение $m: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, причем $0 < m(t) \leq M$ ($M \geq m(0) = 1$) и $m(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Далее заметим, что в силу однородности порядка $k = 1$ системы $\langle (X, T, f), (Y, T, \sigma), h \rangle$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{m(t + \tau)}{m(t)} &= \frac{1}{m(t)} \sup_{|x| \leq 1} |f(x, t + \tau)| = \frac{1}{m(t)} \sup_{|x| \leq 1} |f(f(x, t), \tau)| \\ &\leq \sup_{|x| \leq 1} \left| f\left(\frac{f(x, t)}{m(t)}, \tau\right) \right| \leq \sup_{|x| \leq 1} |f(x, \tau)| = m(\tau) \end{aligned}$$

при всех $t, \tau \geq 0$. Пусть теперь $x \in X$ ($|x| \neq 0$). Тогда в силу однородности системы $\langle (X, T, \pi), (Y, T, \sigma), h \rangle$

$$\left| \frac{1}{|x|} f(x, t) \right| \leq \sup_{|x| \leq 1} |f(x, t)| = m(t),$$

т.е. $|f(x, t)| \leq m(t)|x|$ при всех $t \geq 0$ и $x \in X$. Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно сослаться на лемму 1.3. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.2. Для автономной однородной (порядка $k > 1$) дисперсной динамической системы $(X, \mathbb{R}_+, f)$ эквивалентны следующие утверждения:

- 1) нулевое движение $(X, \mathbb{R}_+, f)$ равномерно асимптотически устойчиво;
- 2) существуют положительные числа α и β такие, что

$$|f(x, t)| \leq (\alpha|x|^{1-k} + \beta t)^{-1/(k-1)} \quad (11)$$

при всех $t \geq 0$ и $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в условиях теоремы 1.2 из 1) следует 2). Пусть $x \in X$ ($x \neq 0$). Тогда в силу однородности порядка $k > 1$ системы $(X, \mathbb{R}_+, f)$ имеем

$$\frac{1}{|x|} |f(x, t)| \leq \sup_{|y| \leq 1} |f(y, t|x|^{k-1})| = m(t|x|^{k-1})$$

и, следовательно,

$$|f(x, t)| \leq |x| m(t|x|^{k-1}) \quad (12)$$

при всех $x \in X$ и $t \geq 0$, где $m: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ определено равенством (10). Согласно леммам 1.1 и 1.2, а также замечанию 1.1 функция m удовлетворяет условиям леммы 1.3. Кроме того, заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{m(t + \tau)}{m(t)} &= \frac{1}{m(t)} \sup_{|x| \leq 1} |f(x, t + \tau)| = \frac{1}{m(t)} \sup_{|x| \leq 1} |f(f(x, t), \tau)| = \sup_{|x| \leq 1} \frac{1}{m(t)} |f(f(x, t), \tau)| \\ &\leq \sup_{|x| \leq 1} \left| f\left(\frac{f(x, t)}{m(t)}, \tau m^{k-1}(t)\right) \right| \leq m(\tau m^{k-1}(t)), \end{aligned}$$

т.е.

$$m(t + \tau) \leq m(t)m(\tau m^{k-1}(t))$$

при всех $t, \tau \geq 0$. Теперь для завершения доказательства требуемого утверждения заметим, что согласно лемме 1.3 существуют числа $a, b > 0$ такие, что имеет место неравенство (4), и из (12) и (4) вытекает (11), если положить $\alpha = M^{1-k}a$ и $\beta = M^{1-k}b$.

Покажем теперь, что из 2) следует 1). Для этого заметим, что функция $\omega: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, определенная равенством

$$\omega(r, t) = (\alpha r^{1-k} + \beta t)^{-1/(k-1)},$$

монотонно возрастает по r при каждом $t \geq 0$, и при фиксированном $r \geq 0$ имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(r, t) = 0.$$

Так как $|f(x, t)| \leq \omega(r, t)$ при всех $|x| \leq r$ и $t \geq 0$, то $m(t) = \sup\{|f(x, t)| : |x| \leq 1\} \leq \omega(1, t)$ и, следовательно, m ограничена и стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$. Согласно лемме 1.2 и замечанию 1.1 нулевое движение $(X, \mathbb{R}_+, f)$ равномерно асимптотически устойчиво. Теорема полностью доказана.

2. Динамические системы с многомерным временем. Напомним, что множество $G \subseteq E$ называется *конусом* в банаховом пространстве E , если $-t \notin G$ каково бы ни было $t \in G \setminus \{0\}$ и включение $t \in G$ влечет $\lambda t \in G$ при всех $\lambda \geq 0$.

Пусть G – замкнутый выпуклый конус в E . Полугрупповая динамическая система (X, G, π) называется *динамической системой с многомерным временем*.

Динамическую систему (X, G, π) с многомерным временем $G \subseteq E$ назовем *однородной порядка k* ($k \geq 1$), если $\pi(\lambda x, t) = \lambda \pi(x, \lambda^{k-1}t)$ при всех $\lambda \geq 0$, $x \in E$ и $t \in G$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $m: G \rightarrow \mathbb{R}_+$, $0 < m(t) \leq M$ ($M \geq 1$) и $m(t) \rightarrow 0$ при $\|t\| \rightarrow +\infty$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) если $m(t+\tau) \leq m(t)m(\tau)$ при всех $t, \tau \in G$, то существуют положительные числа N и ν такие, что

$$m(t) \leq Ne^{-\nu\|t\|} \quad (13)$$

при всех $t \in G$;

- 2) если $m(t+\tau) \leq m(\tau)m(\tau m^{\alpha-1}(t))$ ($\alpha > 1$) при всех $t, \tau \in G$, то существуют положительные числа a и b такие, что

$$m(t) \leq M(a + b\|t\|)^{-1/(\alpha-1)} \quad (14)$$

при всех $t \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $H = \{h : h \in G, \|h\| = 1\}$ и $m_h(\lambda) = m(\lambda h)$ при всех $h \in H$ и $\lambda \geq 0$. Тогда семейство функций $\mathfrak{M} = \{m_h : h \in H\}$ удовлетворяет условиям леммы 1.3, и следовательно, существуют положительные числа a и b такие, что

$$m_h(\lambda) \leq M(a + b\lambda)^{-1/(\alpha-1)}$$

при всех $h \in H$ и $\lambda \geq 0$. Пусть теперь $t \in G \setminus \{0\}$ и $h = t/\|t\|$. Тогда

$$m(t) = m(\|t\|h) = m_h(\|t\|) \leq M(a + b\|t\|)^{-1/(\alpha-1)}$$

при всех $t \in G$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X – банахово пространство и (X, G, π) – однородная (порядка $k \geq 1$) динамическая система с многомерным временем. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) нулевое движение (X, G, π) равномерно асимптотически устойчиво, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|x\| \leq \delta$ влечет $\|\pi(x, t)\| < \varepsilon$ при всех $t \in G$, и существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\lim_{\|t\| \rightarrow +\infty} \|\pi(x, t)\| = 0$$

равномерно по $\|x\| < \gamma$;

- 2а) если $k = 1$, то существуют положительные числа N и ν такие, что

$$\|\pi(x, t)\| \leq N e^{-\nu \|t\|} \|x\| \quad (15)$$

при всех $x \in X$ и $t \in G$;

- 2б) если $k > 1$, то существуют положительные числа α и β такие, что

$$\|\pi(x, t)\| \leq (\alpha \|x\|^{1-k} + \beta \|t\|)^{-1/(k-1)} \quad (16)$$

при всех $x \in X$ и $t \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в условиях теоремы 1.3 из 1) следует 2). Пусть $x \neq 0$. Тогда в силу однородности (X, G, π) порядка k ($k \geq 1$) имеем

$$\|\pi(x, t)\| = \|x\| \cdot \left\| \pi \left(\frac{x}{\|x\|}, t \|x\|^{k-1} \right) \right\| \leq \|x\| m(t \|x\|^{k-1}) \quad (17)$$

при всех $x \in X$ и $t \in G$, где

$$m(t) = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\pi(x, t)\|.$$

Заметим, что из равномерной асимптотической устойчивости нулевого движения динамической системы (X, G, π) следует, что функция $m: G \rightarrow \mathbb{R}_+$, определенная равенством (17), удовлетворяет условиям леммы 2.1, и следовательно, она удовлетворяет неравенству (13) при $k = 1$ и (14) при $k > 1$. Из неравенств (13), (14) и (17) вытекают неравенства (15) и (16).

Доказательство того, что из 2) следует 1), проводится по той же схеме, что и в теореме 1.2. Теорема полностью доказана.

Пусть (X, G, π) и (Y, G, σ) – две динамические системы с многомерным временем и $h: X \rightarrow Y$ – гомоморфизм (X, G, π) на (Y, G, σ) . Тогда тройка $\langle (X, G, \pi), (Y, G, \sigma), h \rangle$ называется *неавтономной динамической системой с многомерным временем*.

Неавтономную динамическую систему с многомерным временем $\langle (X, G, \pi), (Y, G, \sigma), h \rangle$ назовем *однородной порядка $k = 1$* , если тройка (X, h, Y) является векторным расслоением и автономная система (X, G, π) является однородной порядка $k = 1$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\langle (X, G, \pi), (Y, G, \sigma), h \rangle$ – неавтономная динамическая система с многомерным временем. Если $\langle (X, G, \pi), (Y, G, \sigma), h \rangle$ – однородная порядка $k = 1$, то следующие условия эквивалентны:

- а) нулевое сечение расслоения (X, h, Y) равномерно асимптотически устойчиво, т.е.
- а1) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|x| < \delta$ влечет $|\pi(x, t)| < \varepsilon$ при всех $t \in G$;
- а2) существует $\gamma > 0$ такое, что при $|x| < \gamma$

$$\lim_{\|t\| \rightarrow +\infty} |\pi(x, t)| = 0, \quad (18)$$

причем (18) имеет место равномерно по x ;

- б) существуют положительные числа N и ν такие, что $|\pi(x, t)| \leq N e^{-\nu \|t\|} |x|$ при всех $x \in X$ и $t \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что из б) следует а), поэтому для завершения доказательства теоремы 1.4 достаточно показать, что из а) следует б). Положим

$$m(t) = \sup_{|x| \leq 1} |\pi(x, t)|. \quad (19)$$

В силу равномерной асимптотической устойчивости нулевого сечения динамической системы $\langle (X, G, \pi), (Y, G, \sigma), h \rangle$ и ее однородности порядка $k = 1$ равенством (19) корректно определена функция $m: G \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям леммы 2.1. Кроме того, из однородности порядка $k = 1$ системы $\langle (X, G, \pi), (Y, G, \sigma), h \rangle$ следует, что $m(t + \tau) \leq m(t)m(\tau)$ и $|\pi(x, t)| \leq |x|m(t)$ при всех $t, \tau \in G$ и $x \in X$. Согласно первому утверждению леммы 2.1 для функции m имеет место неравенство (13) и, следовательно, $|\pi(x, t)| \leq |x|m(t) \leq N e^{-\nu \|t\|} |x|$ при всех $x \in X$ и $t \in G$. Теорема полностью доказана.

3. Обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Пусть E – вещественное или комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через $C(\mathbb{R} \times E, E)$ семейство всех непрерывных функций $F: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, наделенное открыто-компактной топологией. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = F(t, x), \quad (20)$$

где $F \in C(\mathbb{R} \times E, E)$. Наряду с уравнением (20) будем рассматривать и семейство уравнений

$$\dot{y} = G(t, y), \quad (21)$$

где $G \in H(F) = \overline{\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$, F_τ – сдвиг функции F по t на τ и чертой обозначено замыкание в $C(\mathbb{R} \times E, E)$.

Функцию $F \in C(\mathbb{R} \times E, E)$ называют *регулярной*, если выполнены следующие условия:

- а) каковы бы ни были $v \in E$ и $G \in H(F)$, уравнение (21) имеет единственное решение, определенное на $\mathbb{R}_+$, выходящее из точки v при $t = 0$, которое обозначим через $\varphi(t, v, G)$;
- б) отображение $\varphi: \mathbb{R}_+ \times E \times H(F) \rightarrow E$ непрерывно.

Отметим, что из условия а) вытекает, что имеет место также равенство

$$в) \varphi(t + \tau, v, G) = \varphi(t, \varphi(\tau, v, G), G_\tau) \text{ при всех } t, \tau \in \mathbb{R}_+, v \in E \text{ и } G \in H(F).$$

Известно (см., например, [13]–[15]), что уравнение (20) с регулярной правой частью порождает неавтономную динамическую систему $((X, T, f), (Y, T, \sigma), h)$, где $Y = H(F)$, и $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ – динамическая система сдвигов на $H(F)$, $X = E \times Y$, $f: \mathbb{R}_+ \times E \times Y \rightarrow E$ – отображение, определенное равенством $f(\tau, (v, G)) = \langle \varphi(\tau, v, G), G_\tau \rangle$ ($\tau \geq 0$, $v \in E$ и $G \in H(F)$), и $h = \text{pr}_2: X \rightarrow Y$. Применяя к построенной неавтономной динамической системе теоремы 1.1 и 1.2, получим соответствующие утверждения для уравнений вида (20).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $F \in C(\mathbb{R} \times E, E)$ и $F(t, \lambda x) = \lambda F(t, x)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in E$ и $\lambda \geq 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) нулевое решение уравнения (20) равномерно асимптотически устойчиво;
- б) существуют положительные числа N и ν такие, что

$$\|\varphi(t, v, G)\| \leq N e^{-\nu t} \|v\|$$

при всех $t \geq 0$, $v \in E$ и $G \in H(F)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть уравнение (20) автономно, т.е. правая часть F не зависит от $t \in \mathbb{R}$, и $F(\lambda x) = \lambda^k F(x)$ ($k > 1$) при всех $x \in E$ и $\lambda \geq 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) нулевое решение уравнения $\dot{x} = F(x)$ равномерно асимптотически устойчиво;
- б) существуют положительные числа α и β такие, что

$$\|\varphi(t, x)\| \leq (\alpha \|x\|^{1-k} + \beta t)^{-1/(k-1)}$$

при всех $t \geq 0$ и $x \in E$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. а) Теоремы 3.1 и 3.2 имеют место и для дифференциальных уравнений без единственности и дифференциальных включений, так как при определенных условиях регулярности правой части F дифференциальное включение $\dot{x} \in F(t, x)$ порождает неавтономную дисперсную динамическую систему (более детально об этом см. в [11]).

б) Теорема 3.1 для дифференциальных включений с периодической по t правой частью в конечномерном пространстве доказана в [9].

в) Теорема 3.2 для конечномерных дифференциальных уравнений доказана в [1]–[4], для дифференциальных включений в конечномерном пространстве доказана в [5], [6].

г) Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что имеют место аналоги теорем 3.1 и 3.2 и для вполне разрешимых дифференциальных уравнений в банаховых пространствах [16].

4. Функционально-дифференциальные уравнения. Пусть $r > 0$, $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ – банахово пространство всех непрерывных функций $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\sup$. Если $[a, b] = [-r, 0]$, то положим $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Пусть $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ и $u \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$. Для любого $t \in [\sigma, \sigma + A]$ определим $u_t \in C$ соотношением $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$. Обозначим через $C(\mathbb{R} \times C, \mathbb{R}^n)$ пространство всех непрерывных функций

$F: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$, наделенное открыто-компактной топологией. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = F(t, x_t), \quad (22)$$

где $F \in C(\mathbb{R} \times C, \mathbb{R}^n)$. Наряду с уравнением (22) рассмотрим семейство уравнений

$$\dot{y} = G(t, y_t), \quad (23)$$

где $G \in H(F) = \overline{\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$. Из общих свойств функционально-дифференциальных уравнений [17] следует, что уравнение (22) с регулярной правой частью F естественным образом порождает неавтономную динамическую систему (более подробно об этом см. [13]), которая строится следующим образом. Положим $Y = H(F)$. Через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на Y , $X = C \times Y$, и пусть $(X, \mathbb{R}_+, f)$ – динамическая система на X , где $f^\tau(x) = f^\tau(v, G) = \langle \varphi_\tau(\cdot, v, G), G_\tau \rangle$ при всех $\tau \geq 0$, $v \in C$ и $G \in H(F)$, где $\varphi(\cdot, v, G)$ – единственное решение уравнения (23) с условием $\varphi(0, v, G) = v$. Тогда $\langle (X, \mathbb{R}_+, f), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$ – неавтономная динамическая система, порожденная уравнением (22), где $h = \text{pr}_2: X \rightarrow Y$. Применяя к построенной таким образом неавтономной динамической системе теоремы 1.1 и 1.2, получим следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $F \in C(\mathbb{R} \times C, \mathbb{R}^n)$ регулярна и $F(t, \lambda x) = \lambda F(t, x)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in C$ и $\lambda \geq 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) нулевое решение уравнения (22) равномерно асимптотически устойчиво;
- б) существуют положительные числа N и ν такие, что

$$\|\varphi(t, v, G)\| \leq N e^{-\nu t} \|v\|$$

при всех $t \geq 0$, $v \in C$ и $G \in H(F)$.

ТЕОРЕМА 4.2. Для автономного функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{x} = F(x_t) \quad (24)$$

с регулярной правой частью F , удовлетворяющей условию $F(\lambda x) = \lambda^k F(x)$ ($k > 1$) при всех $x \in C$ и $\lambda \geq 0$, следующие утверждения эквивалентны:

- а) нулевое решение уравнения (24) равномерно асимптотически устойчиво;
- б) существуют положительные числа α и β такие, что

$$\|\varphi(t, v)\| \leq (\alpha \|v\|^{1-k} + \beta t)^{-1/(k-1)}$$

при всех $t \geq 0$ и $v \in C$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Теоремы 4.1 и 4.2 имеют место и для функционально-дифференциальных уравнений без единственности, а также для функционально-дифференциальных включений, если их правые части обладают определенной регулярностью.

5. Квазилинейные параболические уравнения. Пусть E – банахово пространство и $A: D(A) \rightarrow E$ – линейный замкнутый оператор с плотной областью определения. A называется [18] *секториальным*, если для некоторого $\varphi \in (0, \pi/2)$, некоторого $M \geq 1$ и некоторого вещественного a сектор $S_{a,\varphi} = \{\lambda : \varphi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$ лежит в резольвентном множестве $\rho(A)$ оператора A и $\|(I\lambda - A)^{-1}\| \leq M|\lambda - a|^{-1}$ для всех $\lambda \in S_{a,\varphi}$. Если A – секториальный оператор, то существует $a_1 \geq 0$ такое, что $\operatorname{Re} \sigma(A + a_1 I) > 0$ ($\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$). Пусть $A_1 = A + a_1 I$. Для $0 < \alpha < 1$ определяют [18]

$$A_1^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda I + A_1)^{-1} d\lambda,$$

который является линейным, ограниченным и взаимно однозначным. Положим $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ и наделим пространство X^α нормой графика $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$ ($x \in X^\alpha$), $X^0 = E$ и $X^1 = D(A)$. Пространство X^α является банаховым с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ и плотно и непрерывно вложено в E .

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + Ax = F(t, x), \quad (25)$$

где $F \in C(\mathbb{R} \times X^\alpha, E)$ и $C(\mathbb{R} \times X^\alpha, E)$ – пространство всех непрерывных функций, наделенное открыто-компактной топологией.

Наряду с уравнением (25) рассмотрим семейство уравнений

$$\dot{y} + Ay = G(t, y), \quad (26)$$

где $G \in H(F) = \overline{\{F_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}}$. В [18] приводятся условия регулярности F (см. [18, теоремы 3.3.3, 3.3.4, 3.3.6 и 3.4.1]).

В предположении регулярности F с уравнением (25) естественным образом связывается некоторая неавтономная динамическая система. А именно, положим $Y = H(F)$ и через $(Y, \mathbb{R}, \sigma)$ обозначим динамическую систему сдвигов на Y . Далее, пусть $X = X^\alpha \times Y$ и $(X, \mathbb{R}_+, f)$ – динамическая система на X , определенная равенством $f^\tau(v, G) = \langle \varphi(\tau, v, G), G_\tau \rangle$, где $\varphi(\tau, v, G)$ – единственное решение (26), определенное на $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяющее условию $\varphi(0, v, G) = v$. Наконец, положив $h = \operatorname{pr}_2: X \rightarrow Y$, получим неавтономную систему $\langle (X, \mathbb{R}_+, f), (Y, \mathbb{R}, \sigma), h \rangle$, порожденную уравнением (25). Применяя к последней системе теорему 1.1, получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $F \in C(\mathbb{R} \times X^\alpha, E)$ регулярна и $F(t, \lambda x) = \lambda F(t, x)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in X^\alpha$ и $\lambda \geq 0$. Тогда для уравнения (25) следующие два условия эквивалентны:

- а) нулевое решение уравнения (25) равномерно асимптотически устойчиво;
- б) существуют положительные числа N и ν такие, что

$$\|\varphi(t, v, G)\|_\alpha \leq N e^{-\nu t} \|v\|_\alpha$$

при всех $t \geq 0$ и $v \in X^\alpha$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
- [2] Красовский Н. Н. Об устойчивости по первому приближению // ПММ. 1955. Т. 19. № 5. С. 516–530.
- [3] Зубов В. И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973.
- [4] Coleman C. Growth and decay estimates near non-elementary points // Canad. J. Math. 1970. V. 22. № 6. P. 1156–1167.
- [5] Филиппов А. Ф. Устойчивость для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 6. С. 1018–1027.
- [6] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- [7] Ладис Н. Н. Асимптотика решений квазиоднородных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 12. С. 2257–2260.
- [8] Halanay A. Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale. București, 1963.
- [9] Морозов М. В. Некоторые свойства периодических дифференциальных включений // Изв. вузов. Матем. 1993. № 4 (371). С. 95–100.
- [10] Сибирский К. С., Шубэ А. С. Полудинамические системы. Кишинев: Штиинца, 1987.
- [11] Чебан Д. Н., Факих Д. С. Глобальные аттракторы дисперсных динамических систем. Кишинев: Сигма, 1994.
- [12] Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
- [13] Бронштейн И. У. Расширения минимальных групп преобразований. Кишинев: Штиинца, 1975.
- [14] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [15] Щербаков Б. А. Устойчивость по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений. Кишинев: Штиинца, 1985.
- [16] Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск: Наука и техника, 1983.
- [17] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
- [18] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.

Молдавский государственный университет, г. Кишинев
E-mail: cheban@usm.md

Поступило
26.09.95