Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Вербицкий, Ф. Такенс, Обобщенные энтропии, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 127–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1254>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:57:45

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБОБЩЕННЫЕ ЭНТРОПИИ

Е. А. Вербицкий, Ф. Такенс

Приложения энтропий Реньи к динамическим системам появились впервые в физической литературе, где они используются для численного определения хаотического поведения. По нашему мнению эти энтропии не изучались на математическом уровне строгости. В связи с этим в настоящей работе энтропии Реньи рассматриваются с позиций эргодической теории.

Понятие обобщенных энтропий тесно связано с предложенными ранее понятиями обобщенных спектров размерностей, которые активно используются при изучении фракталов и странных аттракторов и являются одним из основных компонентов мультифрактального анализа. Были предложены два спектра размерностей: один, названный именем Реньи, и другой, основанный на корреляционных интегралах (иногда называемый по имени Хентшела и Прокачия). Следуя работе [1], рассмотрим некоторую инвариантную меру на аттракторе μ . Для произвольного $q \geq 0$, $q \neq 1$, предполагая, что все пределы существуют, определим спектры *размерности Реньи*

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log \varepsilon} \log \sum_i p_i^q,$$

где p_i – мера i -го элемента разбиения на кубы размера ε , и *размерности Хентшела и Прокачия*

$$\hat{D}_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log \varepsilon} \log \int \mu(\mathcal{B}(x, \varepsilon))^{q-1} d\mu(x), \quad (1)$$

где $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ есть открытая ε -окрестность x .

Их динамические аналоги – обобщенные энтропии – также появились в физической литературе [2], [3], где был рассмотрен только подход Реньи.

1. Энтропии Реньи. Мы рассмотрим определение энтропий Реньи динамических систем, аналогичное классическому определению метрической энтропии.

Пусть $(X, \mathcal{B}, \mu)$ – пространство Лебега и ξ – конечное разбиение X на измеримые множества. Для любого $q \geq 0$ определим энтропию порядка q разбиения ξ как

$$H_q(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{q-1} \log \left(\sum_{i=1}^n \mu(\Delta_i)^q \right), & q \neq 1, \\ -\sum_{i=1}^n \mu(\Delta_i) \log \mu(\Delta_i), & q = 1. \end{cases}$$

Пусть T – обратимое преобразование X , сохраняющее меру μ . Введем обозначение

$$\xi^{(k)} = \xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-k+1}\xi.$$

Энтропией автоморфизма T по отношению к разбиению ξ называется

$$h(T, q, \xi) = \varliminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H_q(\xi^{(k)}). \quad (2)$$

Энтропия порядка q автоморфизма T по определению есть

$$h(T, q) = \sup_{\xi} h(T, q, \xi), \quad (3)$$

где верхняя грань берется по всем конечным разбиениям ξ .

Энтропии Реньи обладают следующими свойствами:

- 1) $0 \leq h(T, q') \leq h(T, q)$ при $q \leq q'$;
- 2) $h(T, 1)$ есть метрическая энтропия;
- 3) если ξ есть измельчение η , т.е. каждый элемент η представляется в виде объединения некоторых элементов ξ , то

$$h(T, q, \eta) \leq h(T, q, \xi) \quad \text{для любого } q \geq 0;$$

- 4) энтропия Реньи порядка q метрически инвариантна, т.е. для двух (слабо) изоморфных автоморфизмов T_1 и T_2 имеем

$$h(T_1, q) = h(T_2, q) \quad \text{при всех } q \geq 0.$$

2. Основной результат.

ТЕОРЕМА. Для эргодической динамической системы $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ с положительной метрической энтропией $h(T) > 0$ имеем

$$h(T, q) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq q < 1, \\ h(T), & q \geq 1. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученный результат отличается от тех, которые приведены в физической литературе, где рассматриваются только простые разбиения, например, разбиения на кубы одинакового размера. В действительности же для достижения верхней грани в (3) при $q \neq 1$ необходимо рассматривать все конечные разбиения. Эта ситуация отлична от классического случая ($q = 1$), где верхняя грань достигается на любом образующем разбиении (теорема Синай).

Для доказательства теоремы мы используем следующие классические результаты.

ТЕОРЕМА (Синай [4]). Пусть T — произвольный эргодический автоморфизм пространства Лебега $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Тогда любой бернуллиевский автоморфизм T_1 с $h(T_1) \leq h(T)$ является фактором автоморфизма T .

Простым следствием определения энтропии Реньи является следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть T — сдвиг на пространстве последовательностей с конечным алфавитом и бернуллиевской мерой, порожденной вероятностями $p_1, \dots, p_m$. Тогда

$$h(T, q, \xi) = -\frac{1}{q-1} \log(p_1^q + \dots + p_m^q),$$

где ξ — произвольное разбиение на цилиндры одинаковой длины.

Ключевой леммой в доказательстве является

ЛЕММА 2. Пусть T – автоморфизм $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Тогда для произвольных $q \geq 0$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем $h(T^m, q) = m h(T, q)$.

Данное утверждение представляет собой непосредственное обобщение широко известного факта для метрической энтропии. Как было показано Реньи [5], при $q \neq 1$ обобщенная энтропия порядка q не обладает свойством монотонности (или субаддитивности), т.е. неравенство

$$H_q(\xi \vee \eta) \leq H_q(\xi) + H_q(\eta)$$

для произвольных ξ, η верно только при $q = 1$. Мы не можем утверждать, что в (2) вместо нижнего предела существует предел, как это было в классическом случае. Тем не менее, утверждение леммы 2 выполняется при всех q .

3. Корреляционные энтропии. Пусть (X, d) – компактное метрическое пространство, а $T: X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, сохраняющее борелевскую вероятностную меру μ . Для любого $q \geq 0$ определим корреляционную энтропию порядка q как

$$C(T, q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{k} I(q, k, \varepsilon),$$

где

$$I(q, k, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{q-1} \log \int \mu(\mathcal{B}_k(x, \varepsilon))^{q-1} d\mu, & q \neq 1, \\ \int \log \mu(\mathcal{B}_k(x, \varepsilon)) d\mu, & q = 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_k(x, \varepsilon) = \{y : d(T^i x, T^i y) < \varepsilon, i = 0, \dots, k-1\}.$$

Представленное определение является динамическим аналогом формулы (1) для $\hat{D}_q$.

Отметим следующие свойства корреляционных энтропий:

- 1) $0 \leq C(T, q') \leq C(T, q)$ при $q \leq q'$;
- 2) $C(T, 1)$ есть метрическая энтропия (следствие формулы Брина–Катка [6]);
- 3) корреляционные энтропии инварианты относительно сохраняющих меру биекций с ограниченным искажением, т.е. изоморфизмов $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ таких, что при некотором $K > 1$:

$$\frac{1}{K} < \frac{d_2(f(x), f(y))}{d_1(x, y)} < K \quad \forall x, y \in X_1;$$

- 4) $C(T, q)$ непрерывно по q при $q < 1$ и $q > 1$; существуют примеры как с непрерывным поведением, так и с разрывом в точке $q = 1$.

4. Символическая динамика. Пусть $X = \Omega^{\mathbb{Z}}$, где Ω – конечный алфавит, а T – левый сдвиг. Тогда

- 1) для бернуллиевской меры μ , порожденной вероятностями $p_1, \dots, p_m$, корреляционные энтропии равны

$$C(T, q) = -\frac{1}{q-1} \log(p_1^q + \dots + p_m^q), \quad q \neq 1;$$

- 2) для гиббсовской меры μ с потенциалом φ [7] корреляционные энтропии могут быть выражены в терминах топологического давления P :

$$C(T, q) = -\frac{P(q\varphi) - qP(\varphi)}{q-1}, \quad q \neq 1;$$

- 3) для предыдущих двух случаев

$$C(T, 0) = h_{\text{top}}(T), \quad C(T, 1) = h(T),$$

где $h_{\text{top}}(T)$ – топологическая энтропия T ; более того, $C(T, \cdot)$ – гладкая функция q (вещественно-аналитическая в случае гиббсовской меры).

Таким образом, с метрической точки зрения энтропии Реньи не содержат новой информации о динамической системе по сравнению с классической метрической энтропией. С другой стороны, корреляционные энтропии обладают свойствами, приписываемыми энтропиям Реньи в физической литературе. Другим преимуществом подхода с использованием корреляционных интегралов является исключение разбиений из определения, что позволяет легко применить это новое определение при построении численных методов.

Первый автор выражает глубокую признательность Б. М. Гуревичу и В. И. Оселедцу за ценное обсуждение и полезные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hentschel G. E., Procaccia I. // Phys. D. 1983. V. 8. P. 435–444. 2. Eckmann J.-P., Ruelle D. // Rev. Modern Phys. 1985. V. 57. № 3. P. 365. 3. Grassberger P., Procaccia I. // Phys. Rev. A (3). 1983. V. 28. P. 2591–2593. 4. Синай Я. Г. // Матем. сб. 1964. Т. 63. № 1. С. 23–42. 5. Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland, 1970. 6. Brin M., Katok A. On local entropy // Geometric Dynamics. Lecture Notes in Math. V. 1007. New York: Springer, 1983. P. 30–38. 7. Боуэн Р. Методы символической динамики. Новое в зарубежной науке. Математика. Т. 13. М.: Мир, 1979.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Groningen University, Netherlands
E-mail: root@verb.msk.ru, f.takens@math.rug.nl

Поступило
03.09.97