Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Воскресенская, Модулярные формы и представления групп диэдра, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 130–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1255>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 04:38:11

Изучение связей между представлениями конечных групп и модулярными формами приводит к ряду интересных задач. Одной из них является задача нахождения таких конечных групп, что все модулярные формы, которые можно ассоциировать с элементами этих групп с помощью некоторого представления, являются собственными относительно всех операторов Гекке.

Сопоставление элементам конечных групп модулярных форм осуществляется по следующему правилу. Пусть Φ – представление конечной группы G унитарными матрицами в пространстве V , размерность которого делится на 24. Тогда для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен оператора $\Phi(g)$ имеет вид

$$P_g(x) = \prod_{k=1}^s (x^{a_k} - 1)^{t_k}, \quad a_k \in \mathbb{N}, \quad t_k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

С каждым элементом $g \in G$ можно связать функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{k=1}^s \eta^{t_k}(a_k z), \quad a_k \in \mathbb{N}, \quad t_k \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где z лежит в верхней комплексной полуплоскости, а $\eta(z)$ есть эта-функция Дедекинда, определяемая формулой

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi iz}.$$

Функция $\eta_g(z)$ является параболической формой определенного уровня $N(g)$ и веса

$$k(g) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s t_k$$

с характером, равным характеру квадратичного поля

$$\mathbb{Q}\sqrt{\prod_{k=1}^s (ia_k)^{t_k}}.$$

Рассмотрим далее специальный класс функций, характеризующихся тем, что они являются параболическими формами целого веса с характерами, собственными относительно всех операторов Гекке и не имеющими нулей вне параболических вершин. Они полностью описываются следующей формулой:

$$f(z) = \prod_{k=1}^s \eta^{t_k}(a_k z), \quad a_k, t_k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^s t_k a_k = 24,$$

$$2 \left| \sum_{k=1}^s t_k, \quad a_k \mid a_s, \quad \frac{a_1 a_s}{a_k} = a_{s+1-k} \quad \forall 1 \leq k \leq s. \right.$$

Эти функции имеют мультипликативные коэффициенты Фурье. Мы будем называть их *мультипликативными η -произведениями*. Таких функций ровно 28. Далее, в доказательстве теоремы все они будут выписаны явно.

Рассмотрим задачу нахождения таких конечных групп, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами этих групп с помощью некоторого точного представления по описанному выше правилу, являются мультипликативными η -произведениями.

Автором статьи эта задача рассматривалась для конечных подгрупп в $SL(5, \mathbb{C})$ и присоединенного представления Φ [1], а также для регулярных представлений групп порядка 24 [2]. В настоящей работе находятся все группы диэдра, с элементами которых можно ассоциировать мультипликативные η -произведения с помощью некоторого точного представления.

ТЕОРЕМА. *Для групп диэдра D_n , где $n = \overline{3, 23}$, $n \neq 13, 17, 19$, существует точное представление Φ такое, что для любого $g \in D_n$ оператор $\Phi(g)$ имеет характеристический многочлен (1) такой, что функция (2) является собственной относительно всех операторов Гекке и не имеющей нулей вне параболических вершин (т.е. мультипликативным η -произведением). Для других групп диэдра такого точного представления не существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Список мультипликативных η -произведений известен. Операторы $\Phi(g)$ для искомого Φ могут иметь порядки $n = \overline{3, 23}$, $n \neq 13, 17, 19$. Следовательно, у групп D_n при $n = 13, 17, 19$ и $n > 23$ искомого точного представления не существует. Проверим оставшиеся группы. Напомним, что $D_n \cong \langle a, b : a^n = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. В искомом представлении единичному элементу группы соответствует параболическая форма $\eta^{24}(z)$.

Группа D_{23} . Искомым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений, взятых с кратностью 1. Элементам порядка 23 соответствует параболическая форма $\eta(23z)\eta(z)$, элементам порядка 2 – форма $\eta^{12}(2z)$.

Группа D_{22} . Искомым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений, взятых с кратностью 1. Элементам порядка 22 соответствует форма $\eta(22z)\eta(2z)$, элементам порядка 11 – форма $\eta^2(11z)\eta^2(z)$, элементам порядка 2 – форма $\eta^{12}(2z)$.

Группа D_{21} . Обозначим через $\zeta_3 = -1/2 + \sqrt{3}i/2$ преобразованный корень третьей степени из 1. Искомым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений, взятых с кратностью 1, кроме представления T :

$$T(a) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}, \quad T(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которое входит в искомое представление с кратностью 2. Элементам порядка 21 соответствует параболическая форма $\eta(21z)\eta(3z)$, элементам порядка 7 – форма $\eta^3(7z)\eta^3(z)$, элементам порядка 3 – форма $\eta^8(3z)$, элементам порядка 2 – форма $\eta^{12}(2z)$.

Группа D_{20} . В искомое представление неприводимое представление T :

$$T(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad T(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

входит с кратностью 2, а все остальные неприводимые представления входят с кратностью 1. Элементам порядка 20 соответствует параболическая форма $\eta(20z)\eta(4z)$, элементам порядка 10 – форма $\eta^2(10z)\eta^2(2z)$, элементам порядка 5 – форма $\eta^4(5z)\eta^4(z)$, элементам порядка 4 – форма $\eta^6(4z)$, элементам порядка 2 – форма $\eta^{12}(2z)$.

Группа D_{18} . Обозначим через $\zeta_6 = 1/2 + \sqrt{3}i/2$ преобразованный корень шестой степени из 1. Представления T_1 :

$$T_1(a) = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^5 \end{pmatrix}, \quad T_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и T_2 :

$$T_2(a) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}, \quad T_2(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

входят в искомое представление с кратностью 2, остальные неприводимые представления входят в искомое представление с кратностью 1. Элементам порядка 18 соответствует параболическая форма $\eta(18z)\eta(6z)$, элементам порядка 9 – форма $\eta^2(9z)\eta^2(3z)$, элементам порядка 6 – форма $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$, элементам порядка 3 – форма $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, элементам порядка 2 – форма $\eta^{12}(2z)$.

Группа D_{16} . Обозначим через $\zeta_8 = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2$ первообразный корень восьмой степени из 1. Представления T_k :

$$T_k(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8^k & 0 \\ 0 & \zeta_8^{-k} \end{pmatrix}, \quad T_k(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, 3},$$

входят в искомое представление с кратностью 2, остальные неприводимые представления входят в искомое представление с кратностью 1. Элементам порядка 16 соответствует параболическая форма $\eta(16z)\eta(8z)$, элементам порядка 8 соответствует параболическая форма $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$, элементам порядка 4 – форма $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, элементам порядка 2 – формы $\eta^8(2z)\eta^8(z)$ и $\eta^{12}(2z)$.

Группа D_{15} . В искомое представление все точные неприводимые представления входят с кратностью 1, а остальные представления входят с кратностью 2. Элементам порядка 15 соответствует параболическая форма $\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$, элементам порядка 5 – форма $\eta^4(5z)\eta^4(z)$, элементам порядка 3 – форма $\eta^6(3z)\eta^6(z)$.

Группа D_{14} . Все точные неприводимые представления входят в искомое представление с кратностью 1, а все остальные неприводимые представления – с кратностью 2. Элементам порядка 14 соответствует параболическая форма $\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$, элементам порядка 7 – форма $\eta^3(7z)\eta^3(z)$, элементам порядка 2 – формы $\eta^8(2z)\eta^8(z)$ и $\eta^{12}(2z)$.

Группа D_{12} . Существует два представления с указанным в условии теоремы свойством. Первое из них – регулярное представление, в этом случае элементам порядка 12 соответствует параболическая форма $\eta^2(12z)$, элементам порядка 6 – форма $\eta^4(6z)$, элементам порядка 4 – форма $\eta^6(4z)$, элементам порядка 3 – форма $\eta^8(3z)$, элементам порядка 2 – форма $\eta^{12}(2z)$.

Во второе представление все точные неприводимые представления входят с кратностью 1, а остальные неприводимые представления – с кратностью 2. Элементам порядка 12 соответствует параболическая форма $\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$, элементам порядка 6 соответствует форма $\eta^2(6z) \times \eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$, элементам порядка 4 – форма $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, элементам порядка 3 – форма $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, элементам порядка 2 – формы $\eta^8(2z)\eta^8(z)$ и $\eta^{12}(2z)$.

Справедливость теоремы для диэдральных групп меньших порядков следует из исключений: $D_3 < D_6 < D_{12}$, $D_4 < D_8 < D_{16}$, $D_5 < D_{10} < D_{20}$, $D_7 < D_{14}$, $D_9 < D_{18}$, $D_{11} < D_{22}$. Однако, у группы D_8 существует точное представление, сопоставляющее ее элементам другие мультипликативные η -произведения. Рассмотрим эту группу подробнее. Выпишем все ее неприводимые представления: $T_1(a) = 1$, $T_1(b) = 1$; $T_2(a) = -1$, $T_2(b) = -1$; $T_3(a) = -1$, $T_3(b) = 1$; $T_4(a) = 1$,

$$T_4(b) = -1;$$

$$T_5(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8 & 0 \\ 0 & \zeta_8^7 \end{pmatrix}, \quad T_5(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_6(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8^3 & 0 \\ 0 & \zeta_8^5 \end{pmatrix}, \quad T_6(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$T_7(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad T_7(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда искомым представлением является

$$\Phi = 3T_1 \oplus 2T_2 \oplus 2T_3 \oplus 3T_4 \oplus 2T_5 \oplus 2T_6 \oplus 3T_7.$$

Элементам порядка 8 соответствует параболическая форма $\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$, элементам порядка 4 – форма $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$, элементам порядка 2 – формы $\eta^8(2z)\eta^8(z)$ и $\eta^{12}(2z)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воскресенская Г. В. // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 2. С. 71–73.
2. Воскресенская Г. В. // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 292–294.