Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Звягин, О множестве критических значений потенциальных фредгольмовых функционалов, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 133–135

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:03:24

О МНОЖЕСТВЕ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В. Г. Звягин

1. Хорошо известна роль, которую играет для исследования различных классов отображений тот факт, что множество критических значений для отображений из этого класса имеет меру нуль (см., например, [1], [2]). В конечномерном анализе этот факт носит название теоремы Морса–Сарда. В бесконечномерном случае имеется обобщение этого результата на класс фредгольмовых отображений [3]. Однако, для класса гладких функционалов $V: E \rightarrow \mathbb{R}$, определенных на вещественных бесконечномерных банаховых пространствах C^∞ , этот факт в общем случае неверен. Соответствующие примеры имеются в [2], [4]. Тем не менее, при дополнительном условии фредгольмовости отображения $D^2V(x): E \rightarrow E^*$ для каждого $x \in E$, сепарабельности и рефлексивности пространства E аналог теоремы Морса–Сарда имеет место. Это показано в работе [5].

Однако, в приложениях (см., например, [6]) часто возникают C^∞ -гладкие функционалы, определенные, во-первых, на нерефлексивных банаховых пространствах, и, во-вторых, вторая производная которых не обладает свойством фредгольмовости, как отображение из E в E^* , хотя это свойство имеет место для некоторых аналогов второй производной, но уже в паре банаховых пространств. Здесь рассматривается такой класс функционалов и для него доказывается аналог теоремы Морса–Сарда.

2. Итак, пусть E – вещественное банахово пространство, $V: E \rightarrow \mathbb{R}$ – C^2 -гладкий функционал на E .

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- 1) задана такая пара вещественных линейных пространств F, H , где F банахово, а H гильбертово, что E линейно и непрерывно вложено в F , F линейно и непрерывно вложено в H , причем суперпозиция этих вложений $i: E \rightarrow H$ является плотным вложением E в H ;
- 2) задано C^1 -гладкое отображение $f: E \rightarrow F$ такое, что

$$V'(x)h = \langle f(x), h \rangle \quad \forall x \in E, \quad \forall h \in i(E),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в H .

Отображение f называется *градиентом* функционала V и обозначается символом $\text{grad}_H V$. Соответственно V называют *потенциалом* отображения f или *потенциальным функционалом*.

Напомним (см., например, [7]), что C^1 -гладкое отображение $f: E \rightarrow F$ называется *фредгольмовым отображением индекса нуль*, если производная $f'(x): E \rightarrow F$ в каждой точке $x \in E$ является линейным фредгольмовым оператором индекса нуль, т.е. $\dim \text{Ker } f'(x) = \dim \text{Coker } f'(x) < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Потенциальный C^r -гладкий функционал V называется *фредгольмовым*, если его градиент $f = \text{grad}_H V: E \rightarrow F$ является фредгольмовым отображением индекса нуль.

Ряд примеров потенциальных фредгольмовых функционалов, возникающих в различных вопросах механики, можно найти в [6].

Далее, точка $x \in E$ называется *критической точкой* C^1 -гладкого функционала $V: E \rightarrow \mathbb{R}$, если $V'(x) = 0$. Обозначим через B множество критических точек функционала V . Тогда их образ $V(B)$ называется *множеством критических значений* этого функционала.

Теперь сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $V - C^\infty$ -гладкий потенциальный фредгольмов функционал, заданный на сепарабельном вещественном банаховом пространстве E . Тогда множество критических значений функционала V имеет лебегову меру нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество B критических точек функционала V , т.е. $B = \{x \in E : V'(x) = 0\}$.

Пусть $\tilde{x} \in B$ и $A = f'(\tilde{x})$. Так как A является линейным фредгольмовым оператором индекса нуль, имеет место разложение (см. [7]) $E = \text{Ker } A \times E_2$, $F = \text{Im } A \times F_2$, где E_2, F_2 – подпространства соответственно пространств E и F , причем F_2 изоморфно $\text{Coker } A$.

Тогда отображение $f: \text{Ker } A \times E_2 \rightarrow \text{Im } A \times F_2$ можно записать в следующей координатной форме: $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, где $x_1 \in \text{Ker } A$, $x_2 \in E_2$, $f_1(x_1, x_2) \in \text{Im } A$, $f_2(x_1, x_2) \in F_2$. Определим отображение $\alpha: \text{Ker } A \times E_2 \rightarrow \text{Ker } A \times \text{Im } A$ по формуле $\alpha(x_1, x_2) = (x_1, f_1(x_1, x_2))$, $x_1 \in \text{Ker } A$, $x_2 \in E_2$. Отображение α является C^∞ -гладким отображением, причем $\alpha'(\tilde{x})$ является изоморфизмом соответствующих пространств. По теореме об обратном отображении α – локальный C^∞ -диффеоморфизм в точке $\tilde{x}$, т.е. существуют окрестности U точки $\tilde{x}$ и W точки $\alpha(\tilde{x})$ такие, что $\alpha|_U: U \rightarrow W$ есть C^∞ -диффеоморфизм. Без ограничения общности можно считать, что $W = W_1 \times W_2$, где $W_1 \subseteq \text{Ker } A$, $W_2 \subseteq \text{Im } A$.

Определим функционал $\tilde{V}: W \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $\tilde{V}(w_1, w_2) = V\alpha^{-1}(w_1, w_2)$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Очевидно, функционал V является C^∞ -гладким как суперпозиция двух C^∞ -гладких отображений. Далее, поскольку $(\alpha^{-1})'(\alpha(\tilde{x}))$ – изоморфизм, уменьшая W в случае необходимости, можно считать, что $(\alpha^{-1})'(w_1, w_2)$ также является изоморфизмом для всех $(w_1, w_2) \in W$. Учитывая это, заметим, что из равенства $\tilde{V}'(w) = V'(\alpha^{-1}(w)) \cdot (\alpha^{-1})'(w)$ следует взаимно-однозначное соответствие между множеством $\tilde{C}$ критических точек функционала $\tilde{V}$ в окрестности W и множеством C критических точек функционала V на множестве U , причем это соответствие осуществляется отображением α^{-1} .

Заметим также, что множество $\tilde{C}$ принадлежит подпространству $\text{Ker } A$. В самом деле, пусть w – критическая точка функционала $\tilde{V}$. Ей соответствует критическая точка функционала V $x = \alpha^{-1}(w)$, т.е. $V'(x) = 0$. Но тогда $f(x) = 0$. Следовательно, и ее первая компонента $f_1(x) = 0$. Поэтому $\alpha(x) = \alpha(x_1, x_2) = (x_1, f_1(x)) = (x_1, 0) = w \in \text{Ker } A$.

Итак, пусть $V(C)$ – множество критических значений функционала $V|_U$ и $\tilde{V}(\tilde{C})$ – множество критических значений функционала $\tilde{V}$. В силу предыдущих рассуждений, имеем $V(C) = \tilde{V}(\tilde{C})$.

Выше показано, что $\tilde{C} \subseteq \text{Ker } A$ и, следовательно, для $w \in \tilde{C}$ имеет место представление $w = (w_1, 0)$, где $w_1 \in W_1$ и $\tilde{V}(w) = \tilde{V}(w_1, 0)$.

Определим функцию $\varphi: W_1 \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле $\varphi(w_1) = \tilde{V}(w_1, 0)$. Обозначим через C_0 множество критических точек функционала φ на множестве W_1 . Очевидно, что $C \subseteq \tilde{C}_0$ и, следовательно, $\tilde{V}(\tilde{C}) \subseteq \varphi(C_0)$.

Функция $\varphi: W_1 \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу C^∞ и, следовательно, по теореме Морса–Сарда лебегова мера $\mu(\varphi(C_0)) = 0$. Но тогда $\mu(\tilde{V}(\tilde{C})) = 0$. Откуда имеем $\mu(V(C)) = 0$.

Таким образом, каждой точке $x \in B$ соответствует окрестность U такая, что множество $V(B \cap U)$ имеет лебегову меру нуль. Окрестности типа U покрывают множество B . Из этого покрытия выделим счетное подпокрытие, что возможно в силу сепарабельности пространства E . Поскольку счетное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль, то множество $f(B)$ имеет меру нуль. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abraham R., Robbin J. Transversal Mappings and Flows. New York: Benjamin, 1967.
2. Иллс Дж. // УМН. 1969. Т. 24. № 3. С. 157–210. 3. Smale S. // Amer. J. Math. 1965. V. 87. № 4. P. 861–866. 4. Kupka J. // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. № 5. P. 954–957. 5. Похожаев С. И. // Матем. сб. 1968. Т. 75 (117). № 1. С. 106–111. 6. Сапронов Ю. И. // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 101–132. 7. Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И. // УМН. 1977. Т. 32. № 4. С. 3–54.