Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, О кососимметричной части произведения теплицевых матриц, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 138–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1257>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-

зумекает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:34:25

О КОСОСИММЕТРИЧНОЙ ЧАСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ

Х.Д. Икрамов, В.Н. Чугунов

1. Пусть T_1 и T_2 – теплицевы $n \times n$ -матрицы, вещественные или комплексные. В ряде работ [1]–[3] рассматриваются задачи следующего типа: при каких условиях некоторая матричная функция от T_1 и T_2 (такая как произведение $T_1 T_2$ или коммутатор $[T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1$) сама является теплицевой матрицей? Сюда же можно отнести статьи [4], [5], где изучаются теплицевы невырожденные матрицы, сохраняющие теплицево свойство при обращении: для такой матрицы T произведение T и T^{-1} есть теплицева матрица I_n .

Во всех перечисленных случаях ответ выражается однотипным образом. Для примера сформулируем итоговый результат из [2].

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы произведение теплицевых матриц T_1 и T_2 было теплицевой матрицей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось по крайней мере одно из следующих условий:

- 1) T_1 либо T_2 является скалярной матрицей;
- 2) T_1 и T_2 – треугольные матрицы одного типа (т.е. обе нижние или обе верхние треугольные матрицы);
- 3) T_1 и T_2 суть φ -циркулянты для одного и того же числа φ .

Наши исследования, относящиеся к нормальным ганкелевым матрицам, привели к необходимости описания пар теплицевых матриц T_1, T_2 , для которых кососимметричная часть произведения $T = T_1 T_2$, т.е. матрица

$$U = \frac{1}{2}(T_1 T_2 - (T_1 T_2)^t), \quad (1)$$

также является теплицевой (верхний индекс t в данной статье используется как символ транспонирования). Это описание, содержащееся в теореме 2, представляет собой основной результат настоящего сообщения. Как и следовало ожидать, оно сложнее списка условий теоремы 1, но содержит его в качестве частного случая.

2. Примем обозначения

$$\{T_1\}_{ij} = a_{j-i}, \quad \{T_2\}_{ij} = b_{j-i}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Пусть V – верхнетреугольная теплицева матрица. Составим из внедиагональных элементов ее первой строки $(n-1)$ -мерный вектор

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}).$$

Через $\tilde{V}$ будем обозначать верхнетреугольную теплицеву матрицу, для которой аналогичный вектор имеет вид

$$\tilde{c} = (c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2, c_1).$$

Требование, чтобы матрица (1) была теплицевой, записывается скалярными соотношениями

$$\{U\}_{ij} = \{U\}_{i+1, j+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^n (a_{k-i} b_{j-k} - a_{k-j} b_{i-k}) = \sum_{l=1}^n (a_{l-i-1} b_{j+1-l} - a_{l-j-1} b_{i+1-l}).$$

Заменяя в правой части индекс суммирования l на $k = l-1$, приходим к равенствам

$$a_{n-i} b_{j-n} - a_{n-j} b_{i-n} = a_{-i} b_j - a_{-j} b_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2)$$

Введем матрицы

$$F = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ b_{-(n-1)} & b_{-(n-2)} & \dots & b_{-2} & b_{-1} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-(n-2)} & a_{-(n-1)} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Символы Δ_{ij}^F и Δ_{ij}^G ($i < j$) будут обозначать 2×2 -миноры матриц (3), расположенные в столбцах i и j . В этих обозначениях равенства (2) переписываются как

$$\Delta_{ij}^F = \Delta_{ij}^G, \quad 1 \leq i < j \leq n-1. \quad (4)$$

Заметим, что соотношения (2) и (4) не содержат диагональных элементов a_0 и b_0 , что вполне объяснимо: свойство матрицы U быть (или не быть) теплицевой не зависит от произвольных диагональных сдвигов матриц T_1 и T_2 .

Рассмотрим теперь два случая.

1. $\text{rank } F \leq 1$. Согласно (4) ранг G также не превосходит единицы.

Пусть f_1, f_2 и g_1, g_2 – строки матриц F и G . Найдутся векторы c и d размерности $n - 1$ и коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такие, что

$$f_1 = \alpha c, \quad f_2 = \beta c, \quad g_1 = \gamma d, \quad g_2 = \delta d. \quad (5)$$

При этом не исключено, что некоторые (или даже все) из чисел $\alpha, \dots, \delta$ равны 0.

Обозначим через V_1 и V_2 строго верхнетреугольные теплицевы матрицы, для которых векторы c и d составляют введигональные части первой строки. Диагональные элементы матриц T_1 и T_2 без ограничения общности можем считать нулевыми. Тогда равенства (5) эквивалентны матричным соотношениям

$$T_1 = \alpha \tilde{V}_1 + \gamma V_2^t, \quad T_2 = \delta V_2 + \beta \tilde{V}_1^t. \quad (6)$$

II. $\text{rank } F = 2$. Тогда вследствие (4) $\text{rank } G = 2$. Более того, соотношения (4) теперь равносильны существованию матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \det A = 1,$$

такой, что $F = AG$. Иначе говоря,

$$f_1 = \alpha g_1 + \beta g_2, \quad f_2 = \gamma g_1 + \delta g_2, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (7)$$

Введем, как и при разборе случая I, строго верхнетреугольные теплицевы матрицы V_1 и V_2 , для которых роль векторов c и d будут выполнять

$$g_1 = (a_{-1}a_{-2} \dots a_{-(n-2)}a_{-(n-1)}) \quad \text{и} \quad g_2 = (b_1b_2 \dots b_{n-2}b_{n-1}).$$

Равенства (7) можно эквивалентным образом переписать как

$$T_1 = V_1^t + \alpha \tilde{V}_1 + \beta \tilde{V}_2, \quad T_2 = V_2 + \gamma \tilde{V}_1^t + \delta \tilde{V}_2^t, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (8)$$

Снова мы считаем диагональные элементы матриц T_1 и T_2 нулями.

Подытожим предыдущие рассуждения следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы произведение теплицевых матриц T_1 и T_2 имело теплицеву кососимметричную часть, необходимо и достаточно, чтобы матрицы T_1 и T_2 , с точностью до произвольных диагональных сдвигов, выражались формулами (6) либо (8). В этих формулах V_1 и V_2 – произвольные строго верхнетреугольные теплицевы матрицы.*

3. Если уже само произведение $T = T_1 T_2$ есть теплицева матрица, то, разумеется, теплицевой будет и его кососимметричная часть U . Тем самым, классы матриц, указываемые условиями 2) и 3) теоремы 1, должны содержаться в матричных семействах, описываемых формулами (6) и (8). Действительно, при $\gamma = \beta = 0, \alpha\delta \neq 0$ формулы (6) дают произвольные верхнетреугольные матрицы. Пары нижнетреугольных матриц получаются при $\alpha = \delta = 0, \gamma\beta \neq 0$. Наконец, если в (8) положить $\beta = \gamma = 0$, то матрица $T_1 = \alpha(\tilde{V}_1 + \alpha^{-1}V_1^t)$ будет α^{-1} -циркулянт с первой строкой $(0 a_{-(n-1)}a_{-(n-2)} \dots a_{-2}a_{-1})$. Поскольку $\delta = \alpha^{-1}$, то $T_2 = V_2 + \alpha^{-1}\tilde{V}_2^t$ также α^{-1} -циркулянт, первую строку которого определяет вектор g_2 .

4. В этом заключительном пункте будет указана связь между задачей, рассмотренной в данной заметке, и задачей описания нормальных ганкелевых матриц. Последняя представляет интерес только в комплексном случае, так как вещественная ганкелева матрица, будучи симметричной, автоматически является нормальной.

Введем специальную $n \times n$ -матрицу-перестановку

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 1. *Формула*

$$H = T \mathcal{P}_n \quad (9)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между теплицевыми и ганкелевыми матрицами порядка n .

Всякая теплицева матрица T персимметрична. Последнее означает справедливость матричного соотношения

$$\mathcal{P}_n T \mathcal{P}_n = T^t. \quad (10)$$

Записывая аналогичное соотношение для теплицевой матрицы T^* :

$$\mathcal{P}_n T^* \mathcal{P}_n = \overline{T} \quad (11)$$

(черта над символом матрицы обозначает поэлементное сопряжение) и перемножая (10) и (11), имеем

$$\mathcal{P}_n T^* T \mathcal{P}_n = \overline{T} T^t = \overline{(T T^*)}. \quad (12)$$

ЛЕММА 2. *Если в формуле (9) ганкелева матрица H нормальна, то соответствующая ей теплицева матрица T удовлетворяет соотношению*

$$\mathcal{P}_n T^* T \mathcal{P}_n = T T^*. \quad (13)$$

Справедливо и обратное утверждение: из (13) вытекает нормальность матрицы $H = T \mathcal{P}_n$.

Для доказательства достаточно подставить (9) в определение нормальности $H^* H = H H^*$.

ЛЕММА 3. *Ганкелева матрица H в (9) тогда и только тогда нормальна, когда для соответствующей теплицевой матрицы T справедливо равенство*

$$\text{Im}(T T^*) = 0. \quad (14)$$

Это утверждение вытекает из сравнения (12) и (13).

Заменим комплексную матрицу T в (14) ее представлением

$$T = T_1 + iT_2, \quad (15)$$

где T_1 и T_2 – вещественные ганкелевы матрицы. Тогда получим

$$T_1 T_2^t = T_2 T_1^t. \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 3. *Необходимым и достаточным условием нормальности ганкелевой матрицы H является равенство (16) для вещественных теплицевых матриц T_1 и T_2 , определяемых соотношениями (9) и (15).*

Равенство (16) можно рассматривать как требование того, чтобы кососимметричная часть произведения вещественных теплицевых матриц T_1 и T_2^t была равна нулевой (т.е. также теплицевой) матрице.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shalom T. // Linear Algebra Appl. 1987. V. 96. P. 211–226.
2. Zimmerman D. L. // Linear and Multilinear Algebra. 1989. V. 25. №3. P. 185–190.
3. Гельфгат В. И. Условия коммутирования теплицевых матриц // ЖВМиМФ. 1997.
4. Huang N. M., Cline R. E. // J. Assoc. Comput. Mach. 1972. V. 19. P. 437–444.
5. Greville T. N. E. // Linear Algebra Appl. 1983. V. 55. P. 87–92.