Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Карапетян, О значениях случайных полиномов
в окрестности единичной окружности, *Матем. заметки*,
1998, том 63, выпуск 1, 142–145

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1258>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:08:39

О ЗНАЧЕНИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛИНОМОВ В ОКРЕСТНОСТИ ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

А. Г. Карапетян

Для независимых случайных величин $r_0, \dots, r_{n-1}$, каждая из которых равна $+1$ или -1 с вероятностью $1/2$, обозначим через $P(u)$ вероятность:

$$P(u) = P_n(u) = P\left(\min_{x \in \mathbb{T}} \left| \sum_{j=0}^{n-1} r_j \exp(ijx) \right| > u\right), \quad u \geq 0.$$

Дж. Литтлвуд [1] предположил, что $P(\varepsilon\sqrt{n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Б. С. Кашин [2] доказал эту гипотезу, причем рассмотрел минимум значений полинома не на всем торе $\mathbb{T}$, а на некотором подмножестве точек из отрезка $[0, \pi]$. Точнее, он установил, что при $n \rightarrow \infty$

$$P\left(\inf_{\nu=1,2,\dots} |Q(\theta_\nu)| > n^{1/2}(\log n)^{-1/3}\right) \rightarrow 0,$$

где $\theta_\nu = 2\pi \cdot 2^{-\nu}$ при $\nu = 1, 2, \dots$, а

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{n-1} r_j e^{ijx}.$$

А. М. Одлышко показал, что $P(n^{1/3+\varepsilon}) \rightarrow 0$ при любом $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$, и предположил, что при больших n и всяком $\varepsilon > 0$ для большинства полиномов

$$G(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \pm \exp(ijx)$$

выполнена оценка

$$\min_{x \in \mathbb{T}} |G(x)| < n^{-1/2+\varepsilon}.$$

Эта гипотеза была доказана С. В. Конягиным [3], установившим, что $P(n^{-1/2+\varepsilon}) \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$. Далее, в [4] была доказана

ТЕОРЕМА. Пусть ξ_j , $j = 0, \dots, n-1$, — действительные независимые одинаково распределенные случайные величины с конечными третьими абсолютными моментами и с нулевыми средними, удовлетворяющие условию $M\xi^2 > 0$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ при $n > (16C_0(\xi))^{9936/\varepsilon^3}$

$$P\left(\min_{x \in \mathbb{T}} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \exp(ijx) \right| > n^{-1/2+\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{n^{\varepsilon^2/180}},$$

где константа $C_0(\xi)$, зависящая только от ξ , определена в [4], а $M\xi^2$ — второй момент случайной величины ξ_j .

(Случай $M\xi^2 = 0$ является тривиальным, и при этом оценка вероятности в теореме, очевидно, справедлива для любого $n \in \mathbb{N}$.)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00378.

Затем С. В. Конягиным и В. Шлагом в [5] было доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $\Phi \in H^\sigma[0, 1] \setminus \{0\}$, $\sigma \in (1/2, 1]$, для независимых случайных величин $r_0, \dots, r_{n-1}$, имеющих радемахеровское или стандартное нормальное распределение, справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ \min_{z \in \mathbb{C}: ||z|-1| < \varepsilon n^{-2}} \left| \sum_{j=0}^{n-1} r_j \Phi \left(\frac{j}{n} \right) z^j \right| < \varepsilon n^{-1/2} \right\} \right) \leq C\varepsilon,$$

где C – константа, зависящая от Φ , а H^σ – это гёльдеровский класс действительных функций порядка σ на $[0, 1]$.

Нашей целью было доказать это утверждение для более широкого класса случайных величин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Действительная случайная величина ξ называется *субгауссовской* [6, с. 108], если она удовлетворяет условию

$$M(e^{\lambda \xi}) \leq e^{\tau^2 \lambda^2 / 2}, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

при некотором $\tau > 0$.

Любая ограниченная случайная величина с нулевым средним является субгауссовской величиной [7, с. 39]. В то же время, любая субгауссовская величина имеет нулевое среднее и конечный момент любого порядка [6, с. 108].

Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ξ, ξ_j , $j = 0, \dots, n-1$, – действительные независимые одинаково распределенные субгауссовские случайные величины, удовлетворяющие условию $M\xi^2 = M\xi_j^2 > 0$, и пусть $\Phi \in H^\sigma[0, 1] \setminus \{0\}$, где $\sigma \in (1/2, 1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ \min_{z \in \mathbb{C}: ||z|-1| < \varepsilon n^{-2}} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \Phi \left(\frac{j}{n} \right) z^j \right| < \varepsilon n^{-1/2} \right\} \right) \leq C\varepsilon,$$

где C – константа, зависящая от Φ и ξ .

СЛЕДСТВИЕ. Выполнено

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ \min_{x \in \mathbb{T}} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \exp(ijx) \right| < \varepsilon n^{-1/2} \right\} \right) \leq C\varepsilon.$$

Тем самым, на основании следствия из теоремы 1 мы получили, что с большой вероятностью

$$\min_{x \in \mathbb{T}} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \exp(ijx) \right|$$

по порядку не меньше $n^{-1/2}$.

Для доказательства теоремы 1 мы пользуемся теоремой Берри–Эссена [8, следствие 17.2], а также теоремой 8.4 из [8]. Решающую роль играют оценки характеристических функций f_x, g_x соответственно векторов

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (\operatorname{Re} J(x), \operatorname{Im} J(x)), \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\operatorname{Re} J(x), \operatorname{Im} J(x), \operatorname{Re} \left(\frac{J'(x)}{in} \right), \operatorname{Im} \left(\frac{J'(x)}{in} \right) \right),$$

где

$$J(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \Phi \left(\frac{j}{n} \right) e^{ijx}$$

(считаем n достаточно большим):

$$\sup_{\omega \in I_1} |f_x(\omega)| < \exp(-n^\tau), \quad I_1 = \{\omega \in \mathbb{R}^2 : n^{1/6-\tau/2} < |\omega| < n^{1+\tau}\},$$

$$\sup_{(u,v) \in I_2} |g_x(u,v)| < \exp(-n^\tau), \quad I_2 = \{(u,v), u,v \in \mathbb{R}^2 : n^{1/6-\tau/2} < |u| < n^{1+\tau}, |v| \leq n^\tau\},$$

для $\tau = (\sigma - 1/2)/10$ и точек x , удовлетворяющих условию

$$\left| x - \frac{2\pi h}{k} \right| > 2\pi n^{-1+\sigma/20}$$

для любых h и k , $0 \leq h \leq k-1$, $1 \leq k \leq H$, H – константа, зависящая от Φ .

Можно ожидать, что утверждение теоремы 1 будет справедливо при ослаблении условий на ξ ; возможно, достаточно предположить, что $M|\xi|^3 < \infty$ и $M\xi^2 > 0$.

В работе [4] (основные результаты опубликованы также в [9]) для доказательства теоремы была предварительно получена асимптотическая оценка вероятности события

$$\left(\left\{ \operatorname{Re} T(x), \dots, \operatorname{Re} \left(\frac{T^{(r-1)}(x)}{(in)^{r-1}} \right), \operatorname{Im} T(x), \dots, \operatorname{Im} \left(\frac{T^{(r-1)}(x)}{(in)^{r-1}} \right) \right\} \in \Pi \right),$$

где

$$T(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \exp(ijx),$$

ξ_j – случайные величины такие же, как в условии теоремы [4], $r \in \mathbb{N}$, $10/\varepsilon < r < 12/\varepsilon$ для заданного $\varepsilon \in (0, 1)$, $x = x_k = 2\pi k/k_0$, $0 < k < k_0$, где k_0 – наибольшее простое, не превосходящее $n^{1-\varepsilon/20}$, а Π – произвольный $2r$ -мерный куб со стороной $h = n^{-1/2+\varepsilon/2}$, причем $\Pi \subset [-H, H]^{2r}$, $H = n^{1/2-\varepsilon/(5r)}$.

В связи с этой оценкой возникла задача: получить асимптотическую оценку для вероятности $P(T(x) \in \Pi)$ для двумерного квадрата Π с максимальным ослаблением условия на длину стороны Π , а также условия принадлежности Π большому квадрату, и впоследствии распространить оценку со случая квадрата Π на случай любого выпуклого множества S с некоторыми ограничениями на расположение, на объем S и на x . В этом направлении нам удалось получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ξ, ξ_j , $j = 0, \dots, n-1$, – действительные независимые одинаково распределенные случайные величины с конечными третьими абсолютными моментами и с нулевыми средними, удовлетворяющие условию $M\xi^2 = M\xi_j^2 > 0$, и

$$T(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \exp(ijx).$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1/2]$, для $x = 2\pi p/q$, $(p, q) = 1$, $n^\varepsilon \leq q \leq n^{1-\varepsilon}$, и любого выпуклого множества S , удовлетворяющего условиям $\operatorname{Vol} S \geq n^{-\rho(n)}$, $S \subset \{\omega : \|\omega\| \leq n^{1/2}H(n)\}$, где $\rho(n) \rightarrow \infty$, $\rho(n) = o(\ln n)$, $H(n) = o(\sqrt{\ln n})$, $H(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$P\{T(x) \in S\} = \frac{1}{\pi n M\xi^2} \int_S \exp\left(-\frac{\|\tau\|^2}{n M\xi^2}\right) d\tau \cdot (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

причем остаточный член $o(1)$ равномерен по p, q, S .

Было бы интересно исследовать сходимость случайных векторов

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \cos(jx), \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \sin(jx) \right)$$

к нормальному распределению при $n \rightarrow \infty$ в зависимости от скорости приближения числа $x/(2\pi)$ рациональными.

Автор благодарит научного руководителя С.В. Конягина за полезные обсуждения и важные указания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Littlewood J. E. // J. London Math. Soc. 1966. V. 41. P. 367–376. 2. Кашин Б. С. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1987. № 5. С. 40–46. 3. Колягин С. В. // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 3. С. 80–101. 4. Карапетян А. Г. О минимуме модуля тригонометрических полиномов со случайными коэффициентами // Деп. ВИНТИ. № 3330-B96. 5. Konyagin S. V., Schlag W. Lower bounds for the absolute value of random polynomials on a neighborhood // Trans. Amer. Math. Soc. (to appear). 6. Кахан Ж. Случайные функциональные ряды. М.: Наука, 1973. 7. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 8. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982. 9. Карапетян А. Г. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 451–455.