Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Теорема о классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ для N взаимодействующих фермионов, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1259>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 02:14:38

ТЕОРЕМА О КЛАССИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ $\hbar \rightarrow 0$ ДЛЯ N ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФЕРМИОНОВ

В. П. Маслов

Рассмотрим уравнение Шрёдингера в пространстве $L_2(\mathbb{R}^{3N} \times (0, T))$ для N взаимодействующих тождественных частиц:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \left(- \left(\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i - U(x_i) \right) + \sum_{j < i \leq N} \sum V(x_i, x_j) \right) \Psi, \quad (1)$$

$$\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_{i1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{i2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{i3}^2}, \quad x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь $U(x) \in C^\infty$, $x \in \mathbb{R}^3$, – внешний потенциал, а $V(x, y) \in C^\infty$ – потенциал взаимодействия, m – масса частицы, $\hbar$ – константа Планка.

Пусть $\Psi_1(x_1, \dots, x_N, t)$ – некоторое антисимметрическое по $x_1, \dots, x_N$ решение указанного уравнения, $\Psi_2(x_1, \dots, x_N, t)$ – некоторое симметрическое решение.

Образует функцию распределения Вигнера:

$$P_w(p_1, \dots, p_N, x_1, \dots, x_N, t) = (2\pi\hbar)^{-N} \int \Psi_1 \left(x_1 + \frac{\xi_1}{2}, \dots, x_N + \frac{\xi_N}{2}, t \right) \\ \times \Psi_2^* \left(x_1 - \frac{\xi_1}{2}, \dots, x_N - \frac{\xi_N}{2}, t \right) \exp \left\{ \frac{i \sum_{k=1}^N p_k \xi_k}{\hbar} \right\} d\xi_1 \dots d\xi_N,$$

которая удовлетворяет известному уравнению Вигнера. Очевидно, что она антисимметрична относительно перестановки пар (x_i, p_i) .

Уравнение Вигнера на гладких функциях

$$\varphi(x_1, \dots, x_N, p_i, \dots, p_N)$$

сходится к уравнению Лиувилля, отвечающему функции Гамильтона

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + U(x_i) \right) + \sum_{j < i \leq N} \sum V(x_i, x_j).$$

Решение задачи Коши с гладкими функциями начальных данных сходится при $\hbar \rightarrow 0$ к решению задачи Коши с теми же данными уравнения Лиувилля.

Работа выполнена при частичной поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-91.

Отсюда следует аналогичный факт для обобщенных функций. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $R_w(p, x, 0)$ при $\hbar \rightarrow 0$ сходится на любом элементе пространства Шварца к обобщенной функции $g_0(p, x)$. Тогда $R_w(p, x, t)$ при $\hbar \rightarrow 0$ сходится на любом элементе пространства Шварца к $g(p, x, t)$ – обобщенному антисимметрическому решению уравнения Лиувилля, удовлетворяющему условию $g(p, x, 0) = g_0(p, x)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть α – собственное значение, отвечающее антисимметрической обобщенной собственной функции χ_α оператора Лиувилля

$$\hat{L}\Phi = \{H, \Phi\},$$

где $\{H, \Phi\}$ – скобка Пуассона на многообразии $H(p, x) = E$. Существуют такие последовательности симметрических и антисимметрических собственных функций $\{\Psi_n\}$ и $\{\Psi_m\}$ оператора Шрёдингера (1), отвечающих собственным значениям E_n и E_m , что

- 1) $E_n \rightarrow E$, $E_m \rightarrow E$ при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, $\hbar \rightarrow 0$;
- 2) $E_m - E_n = \alpha\hbar + O(\hbar^2)$;
- 3) последовательность функций Вигнера, отвечающая парам $\{\Psi_n\}$, $\{\Psi_m\}$ сходится (слабо) на функциях из пространства Шварца к обобщенной функции χ_α .

В предположениях теоремы 2 имеет место

СЛЕДСТВИЕ. Существует последовательность матричных элементов $\hbar$ -псевдодифференциального оператора $\hat{A}$ с символом Вейля $A(p, x)$,

$$\{(\Psi_n^*, \hat{A}\Psi_m)\},$$

где Ψ_n – симметрическая собственная функция оператора (1), а Ψ_m – антисимметрическая, собственные значения которых таковы, что при $\hbar \rightarrow 0$ выполнено $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, $E_n \rightarrow E$, $E_m \rightarrow E$, а $E_n - E_m = \alpha\hbar + O(\hbar^2)$, сходящаяся к выражению

$$\iint A(p, x) \chi_\alpha(p, x) \delta(E - H(p, x)) dp dx,$$

где $\chi_\alpha(p, x)$ – обобщенная антисимметрическая собственная функция оператора Лиувилля $\hat{L}$, ограниченного на поверхности $H(p, x) = E$.

Особенно интересен случай классических фермионов, когда классическая энергия E стремится к 0. Тогда при взаимодействии, отвечающем притяжению в классической механике, все частицы притягиваются друг к другу и происходит “коллапс”. Что же происходит с классическими фермионами? Оказывается, что в этом случае антисимметрические собственные функции многочастичного оператора Лиувилля при $E \rightarrow 0$ представляют из себя произведение $N(N-1)/2$ спаренных друг с другом антисимметрических обобщенных функций от шести переменных так, что каждый электрон образует пару с каждым другим, подобно тому, как это было указано в [1]. “Разорвать” эту обменную связь для классических фермионов невозможно, так как в квазиклассике для этого нужно затратить энергию, экспоненциально растущую по $\hbar$ при $\hbar \rightarrow 0$. Повидимому, это сильное обменное взаимодействие можно интерпретировать как взаимодействие нуклонов внутри ядра.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 633–634.