Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Иванова, Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p -группами свободных произведений двух групп с объединенной подгруппой, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 502–509

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:22:14

УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ КОНЕЧНЫМИ p -ГРУППАМИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ ГРУПП С ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Е. А. Иванова

Доказано, что свободное произведение двух конечных p -групп с объединенными центральными подгруппами является группой, аппроксимируемой относительно сопряженности конечными p -группами. С использованием этого результата показано, что для свободного произведения с объединенными подгруппами двух конечно порожденных абелевых групп свойства аппроксимируемости конечными p -группами относительно отношения равенства и относительно отношения сопряженности являются равносильными.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой* (соответственно *аппроксимируемой конечными p -группами*) *относительно сопряженности*, если для любых элементов a и b этой группы, не сопряженных в ней, найдется гомоморфизм группы G на конечную группу (соответственно на конечную p -группу) X , образы относительно которого элементов a и b не сопряжены в X .

Напомним также, что подмножество M группы G называется *финитно отделимым* (соответственно *отделимым в классе конечных p -групп*), если для любого элемента $a \in G$, не принадлежащего подмножеству M , существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу (соответственно конечную p -группу) X такой, что $a\varphi \notin M\varphi$.

Элемент a группы G будем называть *C_f -отделимым* (соответственно *C_{fp} -отделимым*), если множество $a^G = \{x^{-1}ax \mid x \in G\}$ элементов, сопряженных с a в группе G , является финитно отделимым (соответственно отделимым в классе конечных p -групп).

Таким образом, группа G является финитно аппроксимируемой (соответственно аппроксимируемой конечными p -группами) относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый элемент этой группы C_f -отделим (соответственно C_{fp} -отделим).

Очевидно, что если некоторая группа является финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, то она финитно аппроксимируема (т.е. аппроксимируема конечными группами относительно равенства). Столь же очевидно аналогичное утверждение для аппроксимируемости конечными p -группами. Несмотря на то, что соответствующие обратные утверждения, вообще говоря, не имеют места, в ряде случаев оказывается, что условия, гарантирующие финитную аппроксимируемость групп некоторого класса, обеспечивают и финитную аппроксимируемость их относительно сопряженности. Так, в работе Дайер [1] доказано, что свободное произведение с объединенной

подгруппой двух групп является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, если свободные множители являются конечными группами (финитная аппроксимируемость таких групп была установлена Баумслагом [2] еще в 1963 году).

Свободное произведение с объединенной подгруппой двух конечных p -групп не обязательно является группой, аппроксимируемой конечными p -группами; условия, необходимые и достаточные для этого, указаны в работе Хигмена [3]. Возникает естественный вопрос, будут ли эти условия обеспечивать и аппроксимируемость таких свободных произведений конечными p -группами относительно сопряженности? В этом направлении здесь будет доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть A и B – конечные p -группы, H – подгруппа группы A , K – подгруппа группы B и $\varphi: H \rightarrow K$ – изоморфизм группы H на группу K . Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – свободное произведение групп A и B с объединенными относительно φ подгруппами H и K . Тогда

- (1) если группа G аппроксимируема конечными p -группами, то все ее элементы бесконечного порядка являются C_{f_p} -отделимыми;
- (2) если H и K являются центральными подгруппами групп A и B соответственно, то группа G аппроксимируема конечными p -группами относительно сопряженности.

Заметим, что аппроксимируемость группы G конечными p -группами при условии центральности подгрупп H и K вытекает непосредственно из упомянутого выше критерия Хигмена.

С помощью теоремы 1 можно показать, что в случае, когда группы A и B являются абелевыми с конечным числом порождающих, аппроксимируемость группы G конечными p -группами относительно равенства и относительно сопряженности являются равносильными свойствами. Более точно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных абелевых групп A и B , аппроксимируемых конечными p -группами, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Следующие утверждения равносильны:

- (1) группа G аппроксимируема конечными p -группами относительно сопряженности;
- (2) группа G аппроксимируема конечными p -группами;
- (3) подгруппы H и K p' -изолированы в группах A и B соответственно.

Напомним, что если p – простое число, то подгруппа X некоторой группы Y называется p -изолированной, если для любого элемента $y \in Y$ из включения $y^p \in X$ следует, что $y \in X$. Подгруппа X группы Y называется p' -изолированной, если она q -изолирована для любого простого числа $q \neq p$.

В работе [4] показано, что если свободное произведение $G = (A * B; H = K, \varphi)$ локально нильпотентных групп A и B , где $H \neq A$ и $K \neq B$, является группой, аппроксимируемой нильпотентными группами, то для некоторого простого числа p подгруппы H и K p' -изолированы в группах A и B соответственно. Поэтому имеет место

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных свободных абелевых групп A и B ,

причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Следующие утверждения равносильны:

- (1) группа G аппроксимируема нильпотентными группами;
- (2) для некоторого простого числа p подгруппы H и K p' -изолированы в группах A и B соответственно;
- (3) для некоторого простого числа p группа G аппроксимируема конечными p -группами относительно сопряженности;
- (4) для некоторого простого числа p группа G аппроксимируема конечными p -группами.

2. Доказательство теоремы 1. Начнем с доказательства двух вспомогательных утверждений, являющихся аналогами соответствующих результатов для C_f -отделимости, полученных в работе [5] (лемма 1 и теорема 1 соответственно).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть H – субнормальная подгруппа конечного p -индекса группы G . Если элемент $h \in H$ является C_{fp} -отделимым в группе H , то он является C_{fp} -отделимым и в группе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидная индукция по длине последовательности подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_s = G,$$

где для $i = 0, 1, \dots, s-1$ подгруппа H_{i+1} совпадает с нормализатором в группе G подгруппы H_i , позволяет считать, что H является нормальной подгруппой группы G .

Предположим, что элемент $h \in H$ является C_{fp} -отделимым в группе H , и пусть g – произвольный элемент группы G , не сопряженный с элементом h . Покажем, что для подходящей нормальной подгруппы N конечного p -индекса группы G в фактор-группе G/N элементы hN и gN не являются сопряженными.

Если элемент g не принадлежит подгруппе H , то подгруппа $N = H$ является, очевидно, искомой. Пусть $g \in H$. Фиксируем систему $c_1, c_2, \dots, c_n$ представителей левых смежных классов группы G по подгруппе H и полагаем для $i = 1, 2, \dots, n$ $g_i = c_i^{-1}gc_i$. Так как каждый из элементов $g_1, g_2, \dots, g_n$ группы H не сопряжен в этой группе с элементом h , по предположению найдется такая нормальная подгруппа M конечного p -индекса группы H , что в фактор-группе H/M образ каждого из элементов $g_1, g_2, \dots, g_n$ не сопряжен с образом элемента h .

Пусть $M_i = c_i^{-1}Mc_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Так как сопряжение произвольным элементом группы G индуцирует некоторый автоморфизм группы H , каждая из подгрупп $M_1, M_2, \dots, M_n$ инвариантна в H и имеет в этой группе конечный p -индекс. Поэтому их пересечение N является подгруппой конечного p -индекса группы H , а потому и группы G . Очевидно, кроме того, что подгруппа N инвариантна в группе G и что в фактор-группе G/N образ элемента g не сопряжен с образом элемента h .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если группа G является расширением свободной группы при помощи конечной p -группы, то в группе G каждый элемент бесконечного порядка C_{fp} -отделим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – свободная нормальная подгруппа конечного p -индекса группы G и $a \in G$ – элемент бесконечного порядка. Если H – подгруппа группы G , порожденная подгруппой F и элементом a , то H имеет конечный p -индекс в группе G и

является субнормальной, поскольку фактор-группа G/F нильпотентна. Поэтому ввиду предложения 4 можно без потери общности считать, что $G = H$. Это означает, в частности, что произвольный элемент $g \in G$ записывается в виде $g = a^k f$ для некоторого целого числа k и подходящего элемента $f \in F$.

Пусть b – произвольный элемент группы G , не сопряженный с элементом a . Если элементы a и b принадлежат разным смежным классам по подгруппе F , то поскольку фактор-группа G/F абелева, элементы aF и bF не сопряжены в конечной p -группе G/F .

Будем считать теперь, что $aF = bF$. Поскольку фактор-группа G/F является конечной p -группой, то для некоторого целого числа $n \geq 0$ должно выполняться включение $a^{p^n} \in F$. Докажем, что элементы a^{p^n} и b^{p^n} не сопряжены в группе G .

Пусть, напротив, для некоторого элемента $g \in G$ имеет место равенство $b^{p^n} = g^{-1}a^{p^n}g$. Записывая элемент g в виде $g = a^k f$, где $f \in F$, имеем $b^{p^n} = f^{-1}a^{p^n}f$. Пусть $a_1 = f^{-1}af$. Тогда $a_1F = aF$, и потому $b = a_1x$ для подходящего $x \in F$. Из равенства $(a_1x)^{p^n} = a_1^{p^n}$ следует, очевидно, перестановочность элементов a_1x и $a_1^{p^n}$, откуда, в свою очередь, вытекает, что элементы x и $a_1^{p^n}$ свободной группы F перестановочны. Следовательно, эти элементы должны принадлежать некоторой циклической подгруппе группы F , т.е. для некоторого элемента $y \in F$ и подходящих целых чисел r и s выполнены равенства $x = y^r$ и $a_1^{p^n} = y^s$. При этом, ввиду того, что порядок элемента a бесконечен, $s \neq 0$. В силу второго из этих равенств элементы a_1 и y^s являются перестановочными, т.е. $(a_1^{-1}ya_1)^s = y^s$. Так как $a_1^{-1}ya_1 \in F$ и в свободной группе извлечение корней однозначно, отсюда следует перестановочность элементов a_1 и y . Поэтому из равенства $(a_1x)^{p^n} = a_1^{p^n}$ следует, что $x^{p^n} = 1$, т.е. $x = 1$. Отсюда $b = a_1$, что невозможно, так как элементы a и b не являются сопряженными.

Итак, элемент b^{p^n} не сопряжен в группе G с элементом a^{p^n} из подгруппы F . Так как свободная группа аппроксимируема конечными p -группами относительно сопряженности для любого простого числа p (см. [6, предложение 4.8]), из предложения 4 следует существование такой нормальной подгруппы N конечного p -индекса группы G , что в фактор-группе G/N образы элементов a^{p^n} и b^{p^n} не сопряжены. Очевидно, что тогда и образы элементов a и b не являются сопряженными, и предложение 5 доказано.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Хорошо известно (и легко показать, используя теорему Неймана (см., например, [7, следствие 4.9.2]), что свободное произведение с объединенными подгруппами $G = (A * B; H = K, \varphi)$ двух конечных p -групп A и B является группой, аппроксимируемой конечными p -группами, тогда и только тогда, когда G есть расширение свободной группы при помощи конечной p -группы. Поэтому первое утверждение теоремы 1 сразу же следует из предложения 5.

Как упоминалось во введении, из теоремы Хигмена [3] следует, что если объединяемые подгруппы H и K являются центральными в группах A и B соответственно, то группа G аппроксимируема конечными p -группами. Поэтому ввиду того же предложения 5 для доказательства второго утверждения теоремы 1 достаточно рассматривать лишь те несопряженные элементы группы G , порядки которых конечны.

Итак, пусть x и y – элементы конечного порядка группы G , не сопряженные в этой группе. Поскольку каждый элемент конечного порядка свободного произведения групп с объединенной подгруппой сопряжен с элементом одного из свободных множителей, без потери общности можно считать, что каждый из элементов x и y лежит в одной из подгрупп A и B . Если, при этом, эти элементы принадлежат одной и той же подгруппе A

или B , то они не сопряжены в этой подгруппе.

Поскольку подгруппы H и K являются центральными в группах A и B , можно построить обобщенное прямое произведение P групп A и B с подгруппами H и K , объединенными относительно изоморфизма φ . Напомним (см., например, [8]), что группа P может быть определена как фактор-группа прямого произведения $A \times B$ групп A и B по подгруппе N , состоящей из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$.

Без труда проверяется, что произведение α стандартного вложения группы A в группу $A \times B$ и естественного гомоморфизма группы $A \times B$ на группу P является вложением группы A в группу P ; аналогично определяется вложение β группы B в группу P . Кроме того, $A\alpha \cap B\beta = H\alpha = K\beta$, произвольный элемент из подгруппы $A\alpha$, не принадлежащий подгруппе $H\alpha$, не сопряжен в группе P ни с одним элементом из подгруппы $B\beta$, и два элемента из подгруппы $A\alpha$ (или из подгруппы $B\beta$) сопряжены в группе P тогда и только тогда, когда они сопряжены в подгруппе $A\alpha$ (соответственно в подгруппе $B\beta$).

Так как для любого элемента $h \in H$ выполнено равенство $h\alpha = h(\varphi\beta)$, то существует гомоморфизм ρ группы G в группу P , продолжающий отображения α и β . Очевидно теперь, что элементы $x\rho$ и $y\rho$ не сопряжены в конечной p -группе P , и доказательство теоремы 1 закончено.

3. Доказательство теоремы 2. Импликация $(1) \implies (2)$ в теореме 2 очевидна. Легко устанавливается и справедливость импликации $(2) \implies (3)$.

В самом деле, пусть группа $G = (A * B; H = K, \varphi)$ аппроксимируема конечными p -группами, причем группы A и B абелевы и $H \neq A$, $K \neq B$. Если, скажем, подгруппа H не является p' -изолированной в группе A , то для некоторого элемента $a \in A \setminus H$ и некоторого простого числа $q \neq p$ имеет место включение $a^q \in H$. Пусть еще b – произвольный элемент группы B , не принадлежащий подгруппе K . Тогда запись $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ коммутатора элементов a и b несократима, и потому этот коммутатор является неединичным элементом группы G . С другой стороны, легко видеть, что для любого гомоморфизма θ группы G на конечную p -группу выполнено включение $a\theta \in H\theta$, так что оба элемента $a\theta$ и $b\theta$ принадлежат абелевой группе $B\theta$. Таким образом, элемент $[a, b]$ переходит в 1 при любом гомоморфизме группы G на конечную p -группу, что противоречит предположению об аппроксимируемости группы G конечными p -группами.

Таким образом, остается доказать, что из p' -изолированности в группах A и B подгрупп H и K следует аппроксимируемость группы G конечными p -группами относительно сопряженности.

Для этого необходимо, прежде всего, напомнить следующее понятие (см. [2]). Если A и B – некоторые группы, H – подгруппа группы A , K – подгруппа группы B и $\varphi: H \rightarrow K$ – изоморфизм, то подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$ называются (H, K, φ) -совместимыми, если $(H \cap R)\varphi = K \cap S$. Если нормальные подгруппы R и S групп A и B соответственно (H, K, φ) -совместимы, то отображение $\varphi_{R,S}: HR/R \rightarrow KS/S$, определяемое по правилу

$$(hR)\varphi_{R,S} = (h\varphi)S, \quad h \in H,$$

является изоморфизмом подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу KS/S фактор-группы B/S . Поэтому можно построить свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S; HR/R = KS/S, \varphi_{R,S})$$

групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S , объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{R,S}$. Естественные отображения группы A на фактор-группу A/R и группы B на фактор-группу B/S продолжаемы до гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы $G = (A * B; H = K, \varphi)$ на группу $G_{R,S}$.

Если группы A и B абелевы и индексы (H, K, φ) -совместимых подгрупп R и S в группах A и B конечны и являются p -числами, то в силу теоремы 1 группа $G_{R,S}$ аппроксимируема конечными p -группами относительно сопряженности. Поэтому для доказательства аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p -группами группы G достаточно показать, что для любых несопряженных элементов x и y группы G можно найти такие (H, K, φ) -совместимые подгруппы R и S конечных p -индексов в группах A и B , что образы $x\rho_{R,S}$ и $y\rho_{R,S}$ этих элементов не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Напомним еще, что произвольный элемент x группы $G = (A * B; H = K, \varphi)$ может быть записан в виде $x = x_1 x_2 \dots x_n$, где каждый из сомножителей $x_1, x_2, \dots, x_n$ принадлежит одной из подгрупп A или B и при $n > 1$ любые соседние сомножители x_i и x_{i+1} не лежат в одной и той же из этих подгрупп (и потому не входят в соответствующую объединяемую подгруппу H или K). Такая запись элемента x называется его *несократимой* записью, а число n сомножителей этой записи (одно и то же для всех несократимых записей данного элемента) называется *длиной* элемента x . Элемент x группы G называется *циклически несократимым*, если либо его длина n равна 1, либо $n > 1$ и сомножители x_1 и x_n его несократимой записи не принадлежат одной и той же подгруппе A или B . В этом случае для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ запись $u_i = x_i x_{i+1} \dots x_n x_1 \dots x_{i-1}$ элемента u_i является несократимой; элементы $u_1, u_2, \dots, u_n$ называются *циклически перестановками* элемента x (отметим, что при $n = 1$ единственной циклической перестановкой элемента x является он сам).

Общий критерий Солитера сопряженности двух элементов свободного произведения групп с объединенной подгруппой (теорема 4.6 из [7]) в рассматриваемом здесь случае абелевых свободных множителей принимает более простой вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – свободное произведение с объединенными подгруппами абелевых групп A и B . Произвольный элемент группы G сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Циклически несократимые элементы x и y сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда их длины равны и один из них совпадает с некоторой циклической перестановкой другого.

Для построения искомым гомоморфизмов $\rho_{R,S}$ необходимо доказать два предварительных утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть A и B – конечно порожденные абелевы группы, H – p' -изолированная подгруппа группы A , K – p' -изолированная подгруппа группы B и $\varphi: H \rightarrow K$ – изоморфизм. Для любых подгрупп M и N конечных p -индексов групп A и B соответственно существуют (H, K, φ) -совместимые подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$, имеющие конечные p -индексы в группах A и B и такие, что $R \leq M$ и $S \leq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала следующий вспомогательный результат.

ЛЕММА 8. Пусть A – конечно порожденная абелева группа, H – p' -изолированная подгруппа группы A и U – подгруппа конечного p -индекса группы H . Для любой

подгруппы M конечного p -индекса группы A , содержащей подгруппу U , существует подгруппа R конечного p -индекса группы A такая, что $R \leq M$ и $R \cap H = U$.

В самом деле, так как подгруппа U является, очевидно, p' -изолированной в группе A , фактор-группа A/U оказывается конечно порожденной абелевой группой без p' -кручения и потому аппроксимируема конечными p -группами. Поскольку ее подгруппа H/U конечна, найдется подгруппа R/U конечного p -индекса группы A/U , не имеющая с подгруппой H/U общих неединичных элементов. Так как, при этом, можно считать без потери общности, что R/U содержится в подгруппе M/U , подгруппа R является искомой.

Пусть теперь M и N – подгруппы конечных p -индексов групп A и B соответственно. Тогда $U = (M \cap H) \cap (N \cap K)\varphi^{-1}$ – подгруппа конечного p -индекса группы H и $V = (M \cap H)\varphi \cap (N \cap K)$ – подгруппа конечного p -индекса группы K . В соответствии с леммой 8 выберем в группе A такую подгруппу R конечного p -индекса, что $R \leq M$ и $R \cap H = U$, а в группе B – такую подгруппу S конечного p -индекса, что $S \leq N$ и $S \cap K = V$. Так как $U\varphi = V$, подгруппы R и S являются искомыми. Предложение 7 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть A и B – конечно порожденные абелевы группы, аппроксимируемые конечными p -группами, H – p' -изолированная подгруппа группы A , K – p' -изолированная подгруппа группы B и $\varphi: H \rightarrow K$ – изоморфизм. Для любого конечного набора $g_1, g_2, \dots, g_r$ неединичных элементов группы $G = (A * B; H = K, \varphi)$ найдутся (H, K, φ) -совместимые подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$ конечных p -индексов такие, что для любого $i = 1, 2, \dots, r$ образ $g_i\rho_{R,S}$ элемента g_i является неединичным элементом группы $G_{R,S}$. Более того, подгруппы R и S можно выбрать так, что для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ длина элемента $g_i\rho_{R,S}$ в группе $G_{R,S}$ совпадает с длиной элемента g_i в группе G (и потому элемент $g_i\rho_{R,S}$ является циклически несократимым, если элемент g_i циклически несократим).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение является непосредственным следствием предложения 7. Действительно, если длина элемента g_i больше 1, то все сомножители его несократимой записи лежат попеременно в группах A и B и не входят в соответствующие объединяемые подгруппы H и K . Поскольку фактор-группы A/H и B/K аппроксимируемы конечными p -группами, найдутся такие подгруппы M_i и N_i конечных p -индексов групп A и B соответственно, что все сомножители несократимой записи элемента g_i , лежащие в группе A , не входят в подгруппу M_iH , а сомножители, лежащие в группе B , не входят в подгруппу N_iK . Если же длина элемента g_i равна 1, то, воспользовавшись предположением об аппроксимируемости групп A и B конечными p -группами, подгруппы $M_i \leq A$ и $N_i \leq B$ конечных p -индексов выберем так, чтобы элемент g_i не входил в подгруппу M_i , если $g_i \in A$, и не входил в подгруппу N_i , если $g_i \in B$. Полагая

$$M = \bigcap_{i=1}^r M_i \quad \text{и} \quad N = \bigcap_{i=1}^r N_i,$$

видим, что (H, K, φ) -совместимые подгруппы R и S , выбранные в соответствии с предложением 7 так, чтобы $R \leq M$ и $S \leq N$, являются искомыми.

Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных абелевых групп A и B , аппроксимируемых конечными

p -группами, причем объединяемые подгруппы H и K являются p' -изолированными в группах A и B соответственно. Пусть циклически несократимые элементы x и y группы G не сопряжены в этой группе. Напомним, что для завершения доказательства теоремы 2 нам достаточно указать такие (H, K, φ) -совместимые подгруппы R и S конечных p -индексов в группах A и B , что образы $x\rho_{R,S}$ и $y\rho_{R,S}$ этих элементов не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Если длины этих элементов различны, то в соответствии с предложением 9 найдутся (H, K, φ) -совместимые подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$ конечных p -индексов такие, что образы $x\rho_{R,S}$ и $y\rho_{R,S}$ этих элементов также циклически несократимы и их длины различны. Так как тогда в силу предложения 6 элементы $x\rho_{R,S}$ и $y\rho_{R,S}$ не сопряжены в группе $G_{R,S}$, подгруппы R и S искомые.

Пусть теперь длина каждого из элементов x и y равна n , и пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ – все циклические перестановки элемента y . Поскольку элементы x и y не сопряжены в группе G , элемент x отличен от каждого из элементов $y_1, y_2, \dots, y_n$. Из предложения 9 вытекает существование (H, K, φ) -совместимых подгрупп $R \leq A$ и $S \leq B$ конечных p -индексов таких, что образы относительно гомоморфизма $\rho_{R,S}$ элементов x и y имеют длину n , циклически несократимы и образ элемента x отличен от образа каждого из элементов $y_1, y_2, \dots, y_n$. Легко видеть, кроме того, что произвольная циклическая перестановка элемента $y\rho_{R,S}$ является образом одного из элементов $y_1, y_2, \dots, y_n$. Из предложения 6 теперь следует, что элементы $x\rho_{R,S}$ и $y\rho_{R,S}$ не сопряжены в группе $G_{R,S}$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dyer J. L. Separating conjugates in amalgamated free products and HNN extensions // Austral. Math. Soc. Ser. A. 1980. V. 29. P. 35–51.
- [2] Baumslag G. On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.
- [3] Higman G. Amalgams of p -groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.
- [4] Азаров Д. Н., Иванова Е. А. О нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Науч. тр. ИвГУ. Сер. Матем. Т. 2. Иваново: Изд-во ИвГУ, 1999. С. 5–7.
- [5] Stebe P. F. A residual property of certain groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 26. P. 37–42.
- [6] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
- [7] Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
- [8] Neumann B. H. An essay on free products of groups with amalgamations // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1954. V. 246. P. 503–554.