Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, Об аксиоматике квантовой теории поля с ультрафиолетовым обрезанием, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 147–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:08:40

ОБ АКСИОМАТИКЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫМ ОБРЕЗАНИЕМ

В. П. Маслов, О. Ю. Шведов

Одним из направлений в релятивистской квантовой теории поля является аксиоматический подход [1]. В рамках этого подхода удается получить много интересных физических результатов.

Однако, до сих пор неизвестно, существует ли хотя бы одна нетривиальная модель теории поля в четырехмерном пространстве времени, которая удовлетворяла бы всем аксиомам Уайтмана. Как правило, исследование конкретных моделей происходит по следующей схеме (см., например, [2], [3]). Сначала рассматривается теория, в которой исходный формально релятивистски-инвариантный гамильтониан (содержащий особенности) заменяется на гамильтониан с "ультрафиолетовым обрезанием", в котором эти особенности сглажены. Для сглаженного гамильтониана производится вычисление физически интересных величин, и уже в ответе сглаженный гамильтониан заменяется на сингулярный. Таким образом, фактически все вычисления производятся для релятивистски инвариантного гамильтониана.

Представляет интерес вопрос о том, как можно изменить аксиоматику квантовой теории поля, чтобы она была применима и к тем моделям, которые обладают релятивистской инвариантностью лишь асимптотически, когда какой-либо параметр стремится к 0. В этой заметке мы рассмотрим такую аксиоматику.

Пусть δ – вещественный параметр, который будет в дальнейшем стремиться к 0, $\mathcal{H}^\delta$ – некоторые гильбертовы пространства. Обозначим через $\mathcal{F}$ прямое произведение пространств $\mathcal{H}^\delta$, т.е. множество отображений из множества положительных чисел $\mathbb{R}_+$ в объединение множеств $\bigcup_{\delta>0} \mathcal{H}^\delta$ таких, что $\Psi(\delta) \in \mathcal{H}^\delta$. Будем предполагать, что в каждом пространстве $\mathcal{H}^\delta$ задано помимо гильбертовой топологии еще одно (необязательно положительно определенное) скалярное произведение $\eta^\delta(\Phi, \Psi) = (\Phi, \eta^\delta \Psi)$, $\Psi, \Phi \in \mathcal{H}^\delta$, причем оператор η^δ является ограниченным и эрмитовым. Предполагается также, что в каждом пространстве $\mathcal{H}^\delta$ действуют ограниченные обратимые операторы U_g^δ , отвечающие элементам g спинорной группы Пуанкаре и сохраняющие скалярное произведение η^δ . Аксиому релятивистской инвариантности можно сформулировать следующим образом.

АКСИОМА 1 (предельная релятивистская инвариантность). *Существует подпространство $\mathcal{H}$ пространства $\mathcal{F}$, которое инвариантно относительно действия операторов U_g^δ и на котором выполнены соотношения*

$$\|(U_{g_1}^\delta U_{g_2}^\delta - U_{g_1 g_2}^\delta) \Psi(\delta)\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad \Psi \in \mathcal{H}, \quad \|\Psi(\delta)\| = 1.$$

В квантовой теории поля важную роль играет инвариантность вакуума относительно преобразований группы Пуанкаре. Сформулируем аналог этого свойства.

АКСИОМА 2 (существование вакуума). *Существует элемент Ψ_0^δ пространства $\mathcal{H}^\delta$ такой, что*

$$\|\Psi_0^\delta\| = 1, \quad \|U_g^\delta \Psi_0^\delta - \Psi_0^\delta\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \quad (1)$$

Важную роль в аксиоматике [1] играет понятие квантового поля φ , являющееся совокупностью операторнозначных обобщенных функций $\varphi_{a\mu}(x)$, где $a = \overline{1, M}$, $\mu = \overline{1, M(a)}$, $x \in \mathbb{R}^4$. Поэтому предположим, что каждой функции из пространства Шварца сопоставлены операторы в $\mathcal{H}^\delta$, которые обозначим как $\int \varphi_{a\mu}(x) f(x)$, причем $\int \varphi_{a\mu}(x) f(x) \Psi(\delta) \in \mathcal{H}$ при $\Psi \in \mathcal{H}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Королевского общества Великобритании и частичной поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-91.

АКСИОМА 3 (инвариантность полей). Для некоторого матричного представления W универсальной накрывающей группы Пуанкаре справедливо свойство

$$\left\| \left(U_g^\delta \int \varphi_{a\mu}(x) f(x) (U_g^\delta)^{-1} - \int \sum_{\nu=1}^{M(a)} W_{\mu\nu}^{(a)}(g^{-1}) \varphi_{a\mu}(g(x)) f(x) dx \right) \Psi(\delta) \right\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \\ \Psi \in \mathcal{H}, \quad \|\Psi(\delta)\| = 1.$$

Будем говорить, что две точки $x, y \in \mathbb{R}^4$ пространственноподобны друг другу, $x \sim y$, если

$$(x_0 - y_0)^2 < \sum_{m=1}^3 (x_m - y_m)^2.$$

АКСИОМА 4 (локальность). Пусть любые две точки носителей функций f и g из пространства Шварца пространственноподобны друг другу. Тогда для $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$ справедливо свойство

$$\left\| \int dx dy f(x) g(y) (\varphi_{a\mu}(x) \varphi_{b\nu}(y) - \sigma \varphi_{b\nu}(y) \varphi_{a\mu}(x)) \Psi(\delta) \right\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad \Psi \in \mathcal{H}, \quad \|\Psi(\delta)\| = 1.$$

Сформулируем теперь понятие предельной калибровочной инвариантности. Пусть f – конечный набор функций $(f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(n)})$, $f^{(k)}$ – вещественная функция от $a_1, \dots, a_k, \mu_1, \dots, \mu_k, x_1, \dots, x_k$ из пространства Шварца, а φ^δ – операторнозначная обобщенная функция, действующая в некотором пространстве $\mathcal{H}^\delta$. Введем обозначение

$$F_f[\varphi^\delta] = \sum_{k=0}^n \int dx_1 \cdots dx_k f_{a_1 \dots a_k \mu_1 \dots \mu_k}^{(k)}(x_1, \dots, x_k) \varphi_{a_1 \mu_1}(x_1) \cdots \varphi_{a_k \mu_k}(x_k).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть группу Ли $\mathcal{G}$ сединицей *калибровочной группой теории*, если каждой функции $\omega: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{G}$ со значениями на группе $\mathcal{G}$ сопоставлено преобразование полей $\varphi^\delta \mapsto V_\omega^\delta \varphi^\delta$

$$(V_\omega^\delta \varphi^\delta)_{a\mu}(x) = \sum_{b=1}^A A_{ab}[\omega(x)] \varphi_{b\mu}^\delta(x) + B_{a\mu} \left[\omega(x), \frac{\partial \omega}{\partial x} \right],$$

удовлетворяющее свойствам:

$$V_{\omega_1 \omega_2}^\delta = V_{\omega_1}^\delta V_{\omega_2}^\delta, \quad V_e^\delta \varphi^\delta = \varphi^\delta;$$

существует подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$, называемое пространством физических состояний такое, что

- 1) для любых $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}$ существует $\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta^\delta(\Phi(\delta), \Psi(\delta))$, причем он ≥ 0 ;
- 2) пространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно группы Пуанкаре;
- 3) если

$$F_f[V_\omega^\delta \varphi^\delta] = F_f[\varphi^\delta], \quad (2)$$

то

$$\text{а) } F_f[\varphi^\delta] \mathcal{L} = \mathcal{L};$$

$$\text{б) } \eta^\delta(F_f[\varphi^\delta] \Phi(\delta), F_f[\varphi^\delta] \Psi(\delta)) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \text{ при } \eta^\delta(\Phi(\delta), \Psi(\delta)) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0;$$

- 4) если для $\Psi \in \mathcal{L}$ выполнено свойство (1), то

$$\eta^\delta(\Psi(\delta) - c^\delta \Psi_0^\delta, \Psi(\delta) - c^\delta \Psi_0^\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

для некоторой $c^\delta \in \mathbb{C}$;

- 5) если выполнено свойство (2), то средние значения

$$(\Psi_0^\delta, F_f[\varphi^\delta] \Psi_0^\delta) \quad (3)$$

имеют конечный предел при $\delta \rightarrow 0$.

Величины, инвариантные относительно преобразования (2), называются *калибровочно-инвариантными*.

Пусть пространства $\mathcal{H}^\delta$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$ и операторы U_g^δ , φ^g зависят также от параметров α , пробегающих некоторое многообразие $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Взаимно однозначное отображение $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, не меняющее пределов средних значений (3) при $\delta \rightarrow 0$, называется *ренормгрупповым преобразованием*.

Введем в пространстве $\mathcal{L}$ скалярное произведение

$$(\Phi, \Psi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \eta^\delta(\Phi(\delta), \Psi(\delta)).$$

Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на $\mathcal{L}$. Будем говорить, что $\Phi \sim \Psi$, если $(\Phi - \Psi, \Phi - \Psi) = 0$. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{L}}$ соответствующее факторпространство. Его пополнение $\overline{\widetilde{\mathcal{L}}}$ является гильбертовым пространством.

Пусть $A^\delta: \mathcal{H}^\delta \rightarrow \mathcal{H}^\delta$ – оператор, удовлетворяющий свойствам $A^\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}$ и

$$\eta^\delta(A^\delta \Phi^\delta, A^\delta \Phi^\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad \text{при} \quad \eta^\delta(\Phi^\delta, \Phi^\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Для любых таких операторов введем операторы $A: \widetilde{\mathcal{L}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{L}}$ следующим образом. Пусть $\Phi \in \mathcal{L}$ – представитель класса эквивалентности $[\Phi] \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Обозначим через $A[\Phi]$ класс эквивалентности, одним из представителей которого является вектор $\Psi \in \mathcal{L}$ вида $\Psi(\delta) = A^\delta \Phi(\delta)$.

ТЕОРЕМА. Для операторов U_g , $\varphi_{a\mu}$ справедливы свойства:

- 1) $U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1 g_2}$;
- 2) существует единственный с точностью до числового множителя элемент $\Psi_0 \in \overline{\widetilde{\mathcal{L}}}$, инвариантный относительно U_g ;
- 3) $U_g \varphi_{a\mu}(x) U_g^{-1} = \sum_{\nu=1}^{M(a)} W_{\mu\nu}^{(a)}(g^{-1}) \varphi_{a\nu}(g(x))$;
- 4) при $x \sim y$ и $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$ $\varphi_{a\mu}(x) \varphi_{b\nu}(y) = \sigma \varphi_{b\nu}(y) \varphi_{a\mu}(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношения 3) и 4) понимаются в обобщенном смысле. Таким образом, наши аксиомы являются обобщением аксиом [1].

ПРИМЕР. Пусть $\mathcal{H}^\delta$ – не зависящее от δ пространство Фока, состоящее из элементов вида $(X_0, X_1, \dots)$, $X_l(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_l)$ – симметричные квадратично интегрируемые функции $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_l \in \mathbb{R}^3$. Введем согласно [2] операторы рождения и уничтожения $a^\pm(\vec{k})$ в этом пространстве, обозначим через $\Phi^{(0)}$ вакуумный вектор $(1, 0, \dots)$. Обозначим через $\mathcal{H}$ множество всех элементов $\mathcal{F}$ таких, что

$$\Psi(\delta) = X + O(\delta), \quad (4)$$

а функции X_l принадлежат пространству Шварца. Сопоставим каждому преобразованию из группы Пуанкаре

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu + a^\mu$$

унитарные операторы $U_{(a,\Lambda)}^\delta$, однозначно определяющиеся из соотношений

$$U_{(a,\lambda)}^\delta a^\pm(\vec{k}) U_{(a,\lambda)}^{\delta-1} = e^{\pm i(\Lambda k)a} a^\pm(\vec{\Lambda k}) c_{\vec{k},\Lambda}, \quad c_{\vec{k},\Lambda} \in \mathbb{R}, \quad U_{(a,\lambda)}^\delta \Phi^{(0)} = \Phi^{(0)}, \quad (5)$$

здесь Λk – четырехмерный вектор с компонентами

$$(\Lambda k)^\mu = \Lambda_0^\mu \omega_k^\mu + \sum_{n=1}^3 \Lambda_n^\mu k^n,$$

$\omega_k^2 = \vec{k}^2 + m^2 + F(\delta\vec{k})$, F – функция из пространства Шварца, а $\vec{\Lambda k}$ – трехмерный вектор $((\Lambda k)^1, (\Lambda k)^2, (\Lambda k)^3)$. Через $(\Lambda k)a$ обозначено скалярное произведение четырехмерных векторов

$$(\Lambda k)^0 a^0 - \sum_{n=1}^3 (\Lambda k)^n a^n.$$

Согласно [2] соотношение (5) однозначно определяет операторы $U_{(a,\lambda)}^\delta$. Определим операторы поля следующим образом:

$$\varphi^\delta(\vec{x}, t) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} [a^+(\vec{k}) e^{i(\omega_k t - \vec{k}\vec{x})} + a^-(\vec{k}) e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\vec{x})}].$$

Калибровочная группа в данном примере тривиальна, т.е. состоит из одной единицы, а $\mathcal{L} = \mathcal{H}$. Ренормгруппа в данном примере содержит преобразования $(F, m^2) \mapsto (\tilde{F}, \tilde{m}^2)$ такие, что $\tilde{m}^2 = m^2 + F(0) - \tilde{F}(0)$. Отметим, что теория поля в $\overline{\mathcal{L}}$, построенная согласно теореме, является теорией скалярного поля с массой $\sqrt{m^2 + F(0)}$ [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Введенные операторы U^δ , φ^δ возникают при квантовании бесконечномерной гамильтоновой системы с функцией Гамильтона

$$H = \int d\vec{x} \left[\frac{1}{2} P^2(\vec{x}) + \frac{1}{2} (\nabla Q)^2(\vec{x}) + \frac{m^2}{2} Q^2(\vec{x}) \right] + \int d\vec{x} d\vec{y} F(\vec{y}) Q(\vec{x}) Q(\vec{x} + \vec{y}\delta).$$

Здесь $P(\vec{x})$, $Q(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, – бесконечный набор импульсов и координат соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичным образом можно построить теорию скалярного поля как предел рассмотренной в [5] теории поля на решетке. В этом случае пространства $\mathcal{H}^\delta$ будут различны при разных δ , $\mathcal{H}^\delta = L^2(\mathbb{R}^M)$, $M = O(1/\delta^3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Векторы пространства $\mathcal{F}$, не имеющие вида (4), играют большую роль в теории сверхпроводимости [6]: они отвечают куперовским парам. Эти элементы $\mathcal{F}$ можно назвать “сверхсостояниями”, они рассматривались в [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
2. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
3. Шварц А. С. Математические основы квантовой теории поля. М.: Атомиздат, 1975.
4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
5. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
6. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. В., Церковников Ю. А. // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. № 5. С. 788–791.
7. Маслов В. П., Шведов О. Ю. О проблеме расходимостей в квантовой теории поля. // Докл. РАН. 1997 (в печати).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 Университет Бристоля (Великобритания)
 E-mail: shvedov@qs.phys.msu.su

Поступило
 06.10.97