Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Омелянов, В. В. Трушков, Геометрическая поправка
в задаче о движении свободной границы, *Матем. заметки*,
1998, том 63, выпуск 1, 151–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 08:00:28

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПОПРАВКА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Г. А. Омелянов, В. В. Трушков

В работе построена поправка к асимптотическому решению системы уравнений фазового поля [1]

$$\begin{aligned} \partial_t(\theta + \varphi) &= \Delta\theta, \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \partial_t \varphi &= \varepsilon^2 \Delta\varphi + \varphi - \varphi^3 + \varepsilon \kappa \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\theta|_{\Sigma} = g(x, t)|_{\Sigma}, \quad \varphi|_{\Sigma} = 1, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x, \varepsilon), \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0(x, \varepsilon). \quad (2)$$

Здесь $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой (C^∞) границей, ε – малый параметр, $\kappa > 0$ – константа, $\partial_t = \partial/\partial t$.

Предполагается, что существуют подобласти $\Omega_0^\pm$ такие, что $\Omega = \Omega_0^+ \cup \Omega_0^- \cup \Gamma_0$, Γ_0 – замкнутое гладкое многообразие коразмерности 1, не имеющее общих точек с внешней границей $\partial\Omega$, и что при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \in \Omega_0^\pm$, $\theta_0(x, \varepsilon) \rightarrow \theta_0^\pm(x) \in C^\infty(\Omega_0^\pm)$, $\varphi_0(x, \varepsilon) \rightarrow \pm 1$.

В [2] на базе результатов [3], [4] разработана схема построения самоподобной асимптотики типа кинка для задачи (1), (2). Показано, что построение главного члена сводится к решению модифицированной задачи Стефана (см. также [1])

$$\partial_t \theta^\pm - \Delta \theta^\pm = 0, \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$\theta^\pm|_{t=0} = \theta_0^\pm, \quad x \in \Omega_0^\pm, \quad \theta^+|_{\Sigma} = g(x, t)|_{\Sigma}, \quad (4)$$

$$[\theta^\pm]|_{\Gamma_t} = 0, \quad [\partial_\nu \theta^\pm]|_{\Gamma_t} = 2V_\nu, \quad (5)$$

$$\theta^+|_{\Gamma_t} = \kappa_1 K_t - \kappa_1 V_\nu. \quad (6)$$

Здесь $\Omega_t^\pm$ – подобласти Ω такие, что $\Omega = \Omega_t^+ \cup \Omega_t^- \cup \Gamma_t$, Γ_t обладает теми же свойствами, что и Γ_0 , V_ν – нормальная скорость движения Γ_t , K_t – средняя кривизна Γ_t , $\kappa_1 = \sqrt{2}/(3\kappa)$, через $[f]$ обозначен скачок f на Γ_t , $\partial_\nu = \partial/\partial \nu$ – производная вдоль нормали к Γ_t .

Условие (6) называется *условием Гиббса–Томсона*. Оно является частным случаем известной задачи о средней кривизне, т.е. задачи определения свободной поверхности, подчиняющейся соотношению $V_\nu = K_t + f$.

Положение фронта в задаче (3)–(6) описывается с помощью вспомогательной функции $\psi(x)$, т.е. $\Gamma_t = \{x \in \Omega, t = \psi(x)\}$; нормальная скорость и кривизна вычисляются по формулам $V_\nu = -1/|\psi(x)|$, $K_t = \operatorname{div} \nu$, где $\nu = \nabla \psi(x)/|\nabla \psi(x)|$ – нормаль к Γ_t , $\partial_\nu = \langle \nu, \nabla \rangle$. Известно, что при неособой поверхности с ненулевой средней кривизной условие Гиббса–Томсона (6) переписывается в виде квазилинейного параболического уравнения (дополненного начальным условием $\psi|_{\Gamma_0} = 0$), в котором роль времени играет параметр вдоль нормали к Γ_t [2].

Таким образом, в главном члене определение фронта кинка сводится к задаче о средней кривизне. Однако, существуют задачи, в которых необходимо знать поправки (по крайней мере величины $O(\varepsilon)$) к закону движения свободной границы. Пример – задача о так называемых волновых поездках, в которой переходная зона моделируется суперпозицией M кинков ($M = O(1/\varepsilon^\gamma)$, $\gamma \in (0, 1)$), фронты которых расположены на расстоянии $O(\varepsilon^\gamma)$ друг от друга [5], [6]. Ясно, что в этой задаче необходимо описывать положение фронта с точностью большей, чем $O(1)$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-10492.

Сформулируем основной результат работы. Для этого определим функции $\theta_1^\pm = \theta_1^\pm(x, t)$ и $s = s(x)$ как решение задачи

$$\partial_t \theta_1^\pm = \Delta \theta_1^\pm - \frac{\kappa}{2} \partial_t \theta^\pm, \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad t \in (0, T), \quad (7)$$

$$\theta_1^\pm|_{t=0} = \theta_\pm^1(x), \quad x \in \Omega_0^\pm, \quad \theta_1^+|_\Sigma = 0, \quad (8)$$

$$[\theta_1^\pm]|_{\Gamma_t} = 0, \quad [\partial_\nu \theta_1^\pm]|_{\Gamma_t} = -p_1 V_\nu, \quad (9)$$

$$\kappa_1(\widehat{\mathcal{K}}'_t - \widehat{V}'_\nu)s = (\theta_t^+ + \theta_t^-)|_{\Gamma_t} \frac{s}{2} - \frac{|\nabla \psi|}{\sqrt{2}} - 2\theta_1^+|_{\Gamma_t}, \quad (10)$$

где

$$p_1 = \frac{1}{2}(\Delta \psi + 1)s(|\nabla \psi|^2 + |\nabla \psi|[\partial_\nu \theta_t^\pm]|_{\Gamma_t}), \quad \theta_\pm^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\theta_0 - \theta_0^\pm}{\varepsilon},$$

$(\widehat{\mathcal{K}}'_t - \widehat{V}'_\nu)s$ – вариация $\mathcal{K}_t - V_\nu$, которая действует по формуле

$$(\widehat{\mathcal{K}}'_t - \widehat{V}'_\nu)s = \left\langle \nabla, \frac{\nabla s - \langle \nu, \nabla s \rangle \nu}{|\nabla \psi|} \nu \right\rangle - \frac{\langle \nu, \nabla s \rangle}{|\nabla \psi|}.$$

Обозначим через $\tilde{\theta}_0^\pm(x, t)$ (соответственно $\tilde{\theta}_1^\pm(x, t)$) гладкие продолжения $\theta^\pm$ ($\theta_1^\pm$) в области $\Omega_t^\mp$ такие, что каждая из функций $\tilde{\theta}_0^\pm$ ($\tilde{\theta}_1^\pm$) удовлетворяет в $\Omega_t^\mp$ уравнению теплопроводности (неоднородному уравнению с правой частью $\tilde{f}_1^\pm = -\frac{\kappa}{2}(\partial \tilde{\theta}^\pm / \partial t)$).

ТЕОРЕМА. *Асимптотическое по mod $O(\varepsilon^2)$ решение типа кинка системы уравнений фазового поля имеет вид*

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{th}(\beta\tau) + \varepsilon \left(\frac{\kappa}{4}(\tilde{\theta}_0^+ + \tilde{\theta}_0^-) + \frac{\kappa}{4}(\tilde{\theta}_0^+ - \tilde{\theta}_0^-)\chi + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\nu \beta)\tau^2 + \sqrt{2}\beta(\partial_\nu s)\tau + c \right) \chi_\tau \right), \\ \theta &= \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_0^+ + \tilde{\theta}_0^-) + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_0^+ - \tilde{\theta}_0^-)\chi \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_1^+ + \tilde{\theta}_1^-) + \left(\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_1^+ - \tilde{\theta}_1^-) \right) \chi - 2\beta\kappa(\beta\tau - \ln(2 \text{ch}(\beta\tau))) \right). \end{aligned}$$

Здесь $\chi = \text{th}(\beta\tau)$, $\tau = (t - \psi(x) + \varepsilon s(x))/\varepsilon$, $\beta = |\nabla \psi|/\sqrt{2}$, $c = c(x)$ – постоянная интегрирования, которая определяется при построении членов асимптотического решения величины $O(\varepsilon^2)$.

Как следует из теоремы, положение фронта кинка с точностью $O(\varepsilon^2)$ определяется равенством $t = \psi(x) - \varepsilon s(x)$. В свою очередь, поправка s находится из линейаризованной модифицированной задачи Стефана (7)–(10). Можно доказать, что при достаточно малых T (но не зависящих от ε) задача (7)–(10) имеет классическое решение при тех же предположениях, что и задача (3)–(6) (см. [2]).

Наметим доказательство теоремы. В [2] показано, что для уравнений (1) асимптотика типа кинка представима в виде

$$\begin{aligned} \theta(x, t, \varepsilon) &= \Xi^N(x, t, \varepsilon) + V^N\left(\frac{S}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon\right) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \varphi(x, t, \varepsilon) &= W^N\left(\frac{S}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon\right) + \varepsilon \Phi^N(x, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$V^N(\tau, x, t, \varepsilon) = \rho(x, t)V_0(\tau, x, t) + \sum_{j=1}^N (\rho_j(x, t)V_j(\tau, x, t) + U_j(\tau, x, t)),$$

$$W^N(\tau, x, t, \varepsilon) = \chi(\tau, x) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j W_j(\tau, x, t),$$

$$\Theta^N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \theta_j(x, t), \quad \Phi^N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^N \varepsilon^{j-1} \varphi_j(x, t).$$

Здесь $S = t - \psi(x) + \varepsilon s(x)$; $\psi, s \in C^\infty(\bar{\Omega})$; $\theta_j, \varphi_j, \rho_j \in C^\infty(\bar{Q})$, $Q = \Omega \times (0, T)$, причем $\rho_j|_{t=\psi(x)} = 0$; $V_j(\tau, x, t), U_j(\tau, x, t), W_j(\tau, x, t), \chi(\tau, x) \in \mathcal{H}$, и мы используем обозначения $\mathcal{H} = \{f : f'_\tau \in \mathcal{S}\}$, где $\mathcal{S} = \{f : f(\tau, x, t) \in S(\mathbb{R}^1; C^\infty(Q))\}$, S – пространство Шварца. Подставив разложения (11) в (1), приравняв нулю члены одного порядка по ε и устремив τ к $\pm\infty$, получаем соотношения между

$$\varphi_j^\pm = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} (\varphi_j + W_j) \text{ и } \theta_j^\pm = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} (\theta_j + \rho_j V_j + U_j), \quad j \geq 0,$$

в частности, равенство $\varphi_1^\pm = \kappa \theta_0^\pm / 2$, а также уравнения

$$(\partial_t - \Delta)\theta_0^\pm = 0, \quad (\partial_t - \Delta)\theta_j^\pm = -\partial_t \varphi_j^\pm, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (12)$$

Уравнения (12) при $j = 1$ приводят к уравнениям теплопроводности (3) и (7).

Построение быстро меняющихся членов асимптотики сводится к решению обыкновенных уравнений

$$|\nabla \psi|^2 \chi_{\tau\tau} + \chi - \chi^3 = 0, \quad (13)$$

$$|\nabla \psi|^2 W_{j\tau\tau} + (1 - 3\chi^2)W_j = F_j^\varphi(\tau, x, t), \quad U_{j\tau\tau} = F_j^\theta(\tau, x, t). \quad (14)$$

Из (13) мы находим $\chi = \text{th}(\beta\tau)$, а условия разрешимости (14) в $\mathcal{H}$ приводят к дополнительным уравнениям на ψ , s и “постоянным” интегрирования (14). В частности, эти условия при $j = 1$ приводят к условиям Стефана (5) и Гиббса–Томсона (6), а при $j = 2$ – к линеаризованным условиям Стефана (9) и Гиббса–Томсона (10) для первой поправки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Caginalp G. // Arch. Rational Mech. Anal. 1986. V. 92. P. 205–245.
2. Данилов В. Г., Омелянов Г. А., Радкевич Е. В. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 3. С. 483–491.
3. Маслов В. П., Омелянов Г. А. // УМН. 1981. Т. 36. № 3. С. 63–126.
4. Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов теплопереноса. М.: Наука, 1987.
5. Lacey A. A., Taylor A. B. // IMA J. Appl. Math. 1983. V. 30. P. 303–314.
6. Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V. // Free Boundary Problem News. 1995. V. 6. P. 27–28.