Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Филиновский, Убывание решений волнового уравнения и спектральные свойства оператора Лапласа в расширяющихся областях, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 1, 154–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:32:23

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В РАСШИРЯЮЩИХСЯ ОБЛАСТЯХ

А. В. Филиновский

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – неограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u(0, x) &= f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad u|_{\Gamma} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

с вещественнозначными начальными функциями $f(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ и $g(x) \in L_2(\Omega)$. Хорошо известно, что задача (1) имеет единственное решение из энергетического класса (см., например, [1]), и для него справедлив закон сохранения энергии

$$E_{\Omega}(t) = \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx = E_{\Omega}(0), \quad t > 0.$$

Говорят, что энергия $E_{\Omega}(t)$ *рассеивается на бесконечность*, если для любой ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$ выполнено соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\Omega'}(t) = 0, \quad (2)$$

где

$$E_{\Omega'}(t) = \int_{\Omega'} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx.$$

Соотношение (2) установлено для произвольной ограниченной Γ [2]. Если Γ неограничена, то рассеяние энергии на бесконечность доказано при дополнительных условиях на Γ . А именно, в работах [3], [4] соотношение (2) установлено в предположении, что поверхность Γ звездна относительно начала координат, т.е.

$$(\nu, x) \leq 0, \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к Γ . В работе [5] соотношение (2) получено для кривой Γ , звездной вне некоторого круга ($n = 2$) и степенным образом приближающейся к сторонам угла.

Нас будет интересовать связь между рассеянием энергии решения задачи (1) на бесконечность и спектральными свойствами соответствующей эллиптической краевой задачи.

Пусть L_0 – минимальный оператор, порожденный в $L_2(\Omega)$ дифференциальным выражением $-\Delta$, L – самосопряженное расширение L_0 , соответствующее однородному граничному условию Дирихле. Тогда $\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup \sigma_c(L) \subset [0, +\infty)$, где $\sigma_p(L)$ – точечный, а $\sigma_c(L)$ – непрерывный спектр оператора L . Оператор называется *спектрально непрерывным*, если его точечный спектр пуст, и *спектрально разрывным* в противоположном случае.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если оператор L спектрально разрывен, то существуют начальные функции $f(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$, $g(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ и ограниченная область $\Omega' \subset \Omega$ такие, что*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\Omega'}(t) > 0.$$

Таким образом, спектральная непрерывность оператора L является необходимым условием рассеяния на бесконечность энергии решения задачи (1) с произвольными финитными начальными функциями.

При ограниченной Γ оператор L спектрально непрерывен [6]. Сформулируем известные достаточные условия спектральной непрерывности оператора L в случае неограниченной Γ . В работе [6] рассмотрен класс областей Ω , граница которых удовлетворяет условию

$$(\nu, e_n) \leq 0, \quad x \in \Gamma, \quad (4)$$

где e_n – координатный вектор оси Ox_n , и таких, что $\text{diam}(\Omega \cap \{x_n < R\}) < \infty$ при всех $R > 0$. Для областей из этого класса, каждая из которых содержит некоторый полуцилиндр, в [6] доказана спектральная непрерывность оператора L . Из результатов работы [7] следует, что L спектрально непрерывен, если поверхность Γ звездна относительно начала координат. Нарушение условия (3) внутри некоторого круга ($n = 2$) не изменяет спектральной непрерывности L [5], а невыполнение (4) на сколь угодно малом участке Γ может привести к появлению собственного значения у L [6]. В работе [8] был определен класс областей Ω , граница которых вне некоторого шара удовлетворяет условию

$$\alpha(\nu_1 x_1 + \dots + \nu_{n-1} x_{n-1}) + \nu_n x_n \leq 0, \quad x \in \Gamma, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (5)$$

таких, что $\text{diam}(\Omega \cap \{x_n = R\}) \leq CR^\alpha$, $C > 0$, $R > 0$, и доказана спектральная непрерывность оператора L . Области, удовлетворяющие (5), содержат некоторый параболоид и по минимальной скорости расширения на бесконечности занимают промежуточное положение между областями со звездными границами и областями, удовлетворяющими условию (4).

В настоящей работе изучаются области с границами, звездными относительно некоторых классов векторных полей.

Пусть

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n = 1, \quad \varphi(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Область Ω называется *областью класса $\tilde{D}_\varphi$* , если

$$(\nu, \nabla \varphi(x)) \leq 0, \quad x \in \Gamma \cap \{r \geq R_0\}, \quad r = |x|, \quad R_0 > 0. \quad (6)$$

Геометрически условие (6) означает звездность поверхности Γ относительно векторного поля $\nabla \varphi(x)$. В частности, при $\alpha_1 = 1$ из (6) следует звездность поверхности относительно начала координат. Классы областей $\tilde{D}_\varphi$ для $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha$, $\alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 1$, $1 \leq m \leq n-1$, были определены в работе [9].

ТЕОРЕМА 1. Если $n \geq 2$ и $\Omega \in \tilde{D}_\varphi$, то оператор L спектрально непрерывен и его спектр заполняет всю положительную полуось.

Для спектрально непрерывного оператора L из результатов монографии [2] следует, что при всех $f(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $g(x) \in L_2(\Omega)$ и произвольной ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$ выполнено соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_{\Omega'}(t) = 0.$$

В настоящей работе устанавливается более сильный результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если оператор L спектрально непрерывен, то для любых начальных функций $f(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $g(x) \in L_2(\Omega)$ и произвольной ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$ выполнено соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t E_{\Omega'}(\tau) d\tau = 0. \quad (7)$$

Из теоремы 1 и утверждения 2 следует теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. Если $n \geq 2$ и $\Omega \in \tilde{D}_\varphi$, то для любых начальных функций $f(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $g(x) \in L_2(\Omega)$ и произвольной ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$ выполнено соотношение (7).

Установим теперь достаточное условие выполнения более сильного, чем (7), соотношения (2). Для этого сузим класс спектрально непрерывных операторов L . Пусть $\{E(\lambda)\}$ – спектральное семейство проекторов, соответствующих оператору L . Подпространство $H_{ac} \subset L_2(\Omega)$ называется *подпространством абсолютной непрерывности* оператора L , если функция $(E(\lambda)h, h)_{L_2(\Omega)}$ абсолютно непрерывна по λ для всех $h \in H_{ac}$ (см., например, [10]). В случае $H_{ac} = L_2(\Omega)$ оператор L называется *спектрально абсолютно непрерывным*, а его спектр $\sigma_c(L) = \sigma_{ac}(L)$ – *абсолютно непрерывным*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если оператор L спектрально абсолютно непрерывен, то для любых начальных функций $f(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, $g(x) \in L_2(\Omega)$ и произвольной ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$ выполнено соотношение (2).

Выделим класс областей $\Omega \in \tilde{D}_\varphi$, для которых оператор L спектрально абсолютно непрерывен. Пусть $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{n-2} < \alpha_{n-1} < \alpha_n = 1$. Будем называть

$$d_m(R) = \sup_{\Omega \cap \{|x_n|=R\}} \left(\sum_{j=1}^m x_j^2 \right)^{1/2}, \quad m = 1, \dots, n-1, \quad R > 0,$$

диаметрами сечения $\Omega \cap \{|x_n|=R\}$.

Функции $d_m(R)$, $R > 0$, характеризуют скорость расширения области Ω по “незвездным” переменным $x_1, \dots, x_m$, когда “звездная” переменная x_n стремится к бесконечности. Например, для области

$$\Omega = \{x : x_3 > (x_1^{2/\alpha_1} + x_2^{2/\alpha_2})^{1/2}\} \subset \mathbb{R}^3, \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1,$$

имеем $d_1(R) = R^{\alpha_1}$, $R^{\alpha_2} \leq d_2(R) \leq \sqrt{2}R^{\alpha_2}$, $R > 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Область $\Omega \in \tilde{D}_\varphi$ называется областью класса $\tilde{G}_\varphi$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$d_{n-2}(R) \leq CR^{\alpha_{n-2}}, \quad d_{n-1}(R) \leq CR^{\alpha_{n-1}}, \quad x \in \Omega \cap \{r \geq R_0\}, \quad R_0 > 0.$$

ТЕОРЕМА 3. Если $n \geq 2$, $\Omega \in \tilde{G}_\varphi$,

$$\alpha_1 > \frac{1}{2}, \tag{8}$$

$$\alpha_{n-1} < \frac{1+3\alpha_1}{2(1+\alpha_1)}, \tag{9}$$

то оператор L спектрально абсолютно непрерывен.

Условие (8) означает, что область Ω расширяется быстрее квадратичного параболоида. Из условия (9) следует, что скорости расширения области Ω по различным “незвездным” переменным не должны сильно отличаться друг от друга.

Из утверждения 3 и теоремы 3 следует рассеяние на бесконечность энергии решения задачи (1) для областей из классов $\tilde{G}_\varphi$.

ТЕОРЕМА 4. Если выполнены условия теоремы 3, то для любых начальных функций $f(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, $g(x) \in L_2(\Omega)$ и произвольной ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$ выполнено соотношение (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971.
3. Zachmanoglou E. C. // Arch. Rational Mech. Anal. 1963. V. 14. № 3. P. 312–325.
4. Муравей Л. А. // Тр. МИАН. 1988. Т. 185. С. 171–180.
5. Рамм А. Г. // Матем. сб. 1965. Т. 66. № 3. С. 321–343.
6. Rellich F. // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1943. V. 53. № 1. P. 57–65.
7. Odeh F. M. // J. Math. Mech. 1963. V. 12. № 6. P. 857–867.
8. Tayoshi T. // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1972. V. 8. № 2. P. 375–391.
9. Филиновский А. В. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 6. С. 131–160.
10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.