Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Я. Азизов, А. И. Барсуков, Алгебраическая структура H -диссипативных операторов в конечномерном пространстве, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 163–169

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:11:06

УДК 517.98

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА H -ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Т. Я. Азизов, А. И. Барсуков

Исследуются свойства жордановых представлений H -диссипативных операторов в конечномерном индефинитном H -пространстве. Приведено алгебраическое доказательство существования у таких операторов максимальных семидефинитных инвариантных подпространств.

Библиография: 14 названий.

Введение. Пусть $\mathcal{E}^n$ – n -мерное комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, $H: \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ – самосопряженный обратимый оператор. Полуторалинейная, вообще говоря, индефинитная форма $[\cdot, \cdot] = (H\cdot, \cdot)$ называется H -метрикой.

Напомним некоторые определения (подробнее см., например, [1]). Естественным образом, в соответствии со знаком H -метрики, вводится знак вектора и подпространства. Так, например, вектор x называется *положительным*, если $[x, x] > 0$, а подпространство $\mathcal{L}$ – *нейтральным*, если $[x, x] = 0$ при всех $x \in \mathcal{L}$, и т.д. Подпространство

$$\mathcal{L}^\perp = \{x \in \mathcal{E}^n \mid [x, y] = 0 \text{ при всех } y \in \mathcal{L}\}$$

называется H -ортогональным дополнением подпространства $\mathcal{L}$, а $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp$ – его *изотропной частью*. Если $\mathcal{L}^0 = \{\theta\}$, то $\mathcal{L}$ называется *невыврожденным подпространством*, в противном случае – *вырожденным*, а векторы $x \in \mathcal{L}^0$ – *изотропными* в $\mathcal{L}$ (и в $\mathcal{L}^\perp$). Заметим, что если $\mathcal{L}^0 \neq \{\theta\}$, то каждый вектор $x \in \mathcal{L}^0$ нейтрален; каждый нейтральный вектор подпространства $\mathcal{L}$ изотропен тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}$ семидефинитно, т.е. неотрицательно или неположительно.

Оператор $A^*: \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ называется H -сопряженным, если $[Ax, y] = [x, A^*y]$ при всех $x, y \in \mathcal{E}^n$. Так же, как в случае гильбертова пространства, определяются и другие классы операторов. Так, например, оператор A называется H -диссипативным, если $\text{Im}[Ax, x] \geq 0$, $x \in H$, и H -самосопряженным, если $\text{Im}[Ax, x] = 0$, $x \in H$, т.е. $[Ax, y] = [x, Ay]$.

Базис

$$\{e_{i,j_i}\}, \quad j_i = 1, 2, \dots, n_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n, \quad (1)$$

Работа первого автора выполнена при поддержке фонда INTAS, грант № 93-0249. Работа второго автора выполнена при поддержке Международного научного фонда и правительства России, грант NZP300.

называется *A-жордановым*, если каждый из наборов $\{e_{i,j_i}\}_{j_i=1}^{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, является жордановой цепочкой оператора A , т.е. каждому указанному набору соответствует собственное значение $\lambda_i \in \sigma_p(A)$ оператора A такое, что

$$(A - \lambda_i I)^p e_{i,n_i} = e_{i,n_i-p}, \quad p = 0, 1, \dots, n_i, \quad e_{i,0} = \theta, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Статья посвящена исследованию свойств H -диссипативных операторов A в конечномерном пространстве. Показано существование A -жорданова базиса (1) такого, что линейная оболочка каждого из наборов $\{e_{i,j_i}\}_{j_i=1}^{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, является невырожденным подпространством. Основным результатом работы является доказательство невырожденности для любого базиса каждой линейной оболочки наборов $\{e_{i,j_i}\}_{j_i=1}^{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, равной длины.

Вопрос существования для случая H -самосопряженного оператора A рассматривался ранее и даже вошел в монографии [2], [3]. Для несамосопряженного оператора это более трудная задача, и здесь, как правило, доказываются существование биортогональной “сопряженной” системы. Этой проблеме для H -диссипативных операторов посвящен ряд работ (см. [4] и библиографию к ней), а для произвольных матриц – работа [5]. Кроме того, в [6]–[8] подобный вопрос решен в более общем случае операторного пучка.

Вопрос о том, что для любого базиса каждая линейная оболочка наборов $\{e_{i,j_i}\}_{j_i=1}^{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, равной длины является невырожденным подпространством в случае H -самосопряженного оператора был, по-видимому, впервые поставлен и решен в [9], где существенно использовалось свойство самосопряженности. В настоящей работе найден другой подход, не использующий это обстоятельство.

Описанные выше утверждения применены нами, как иллюстрация, к “конечномерному” доказательству известного результата [10], [11] о существовании максимального семидефинитного A -инвариантного подпространства (другие подходы в этом направлении см. в [4], [12]). Близкие результаты для H -сжатий, связанных, как известно, с H -диссипативными операторами преобразованием Кэли–Неймана, можно найти в [13].

1. Структура невырожденных инвариантных подпространств H -диссипативных операторов. Пусть сперва спектр $\sigma(A)$ H -диссипативного оператора A состоит из единственной точки $\lambda = 0$. Докажем две ключевые леммы.

ЛЕММА 1. *Если вектор $e_s \in \mathcal{E}^n$ таков, что $A^{s-1}e_s \neq \theta$, $A^s e_s = \theta$, то существует вектор $f_s \in \mathcal{E}^n$ такой, что*

$$A^{s-1}e_s = A^{*s-1}f_s \quad \text{и} \quad A^{*s}f_s = \theta. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [14] (см. также [1, с. 125]) следует, что если A есть H -диссипативный оператор и для некоторого $e \in \mathcal{E}^n$ и натурального m имеем $A^m e = \theta$, то

$$A^{*m-[m/2]} A^{[m/2]} e = \theta, \quad (3)$$

$$A^{*m-[m/2]-1} A^{[m/2]} e = A^{m-1} e. \quad (4)$$

Пусть $x \in \ker A^{s-1}$. Используя (4), получим

$$[A^{s-1}e_s, x] = [A^{*s-[s/2]-1} A^{[s/2]} e_s, x] = [e_s, A^{*[s/2]} A^{s-[s/2]-1} x].$$

Из тождества $[s/2] + [(s-1)/2] = s-1$ и соотношения (3) следует

$$[A^{s-1}e_s, x] = [e_s, A^{s-[(s-1)/2]-1}A^{[(s-1)/2]}x] = 0.$$

Следовательно, вектор $A^{s-1}e_s$ H -ортогонален ядру $\ker A^{s-1}$, что влечет включение $A^{s-1}e_s \in \operatorname{ran} A^{s-1}$, т.е. существует вектор $f_s \in \mathcal{E}^n$ такой, что $A^{s-1}e_s = A^{s-1}f_s$. Поскольку для H -диссипативного оператора $A: \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ справедливо равенство (см. [14], [1, с. 121])

$$\ker A = \ker A^*, \quad (5)$$

имеем $A^{*s}f_s = \theta$.

ЛЕММА 2. *Инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ оператора A невырождено тогда и только тогда, когда $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp \cap \ker A = \{\theta\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение доказывается тривиально: если $\mathcal{L}$ невырождено, т.е. $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp = \{\theta\}$, то и $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp \cap \ker A = \{\theta\}$.

Для доказательства обратной импликации достаточно проверить, что подпространство $\mathcal{L}^0$ инвариантно относительно A , и воспользоваться тем, что $\sigma(A) = \{0\}$. В силу A -инвариантности $\mathcal{L}$ получаем

$$[A^*x, y] = 0 \quad \text{при всех } x \in \mathcal{L}^0, \quad y \in \mathcal{L}. \quad (6)$$

Из определения H -диссипативного оператора следует, что и оператор $-A^*$ H -диссипативен. Поэтому равенство (6) при $y = x$ влечет $A^*x = Ax$, т.е. $\mathcal{L}^0$ A -инвариантно.

Зафиксируем в $\mathcal{E}^n$ A -жорданов базис (1). Предположим

$$\begin{aligned} k_1 := n_1 = n_2 = \dots = n_{l_1} > k_2 := n_{l_1+1} = n_{l_1+2} = \dots = n_{l_2} > \dots \\ > k_s := n_{l_{s-1}+1} = n_{l_{s-1}+2} = \dots = n_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Каждому подмножеству $\mathbf{S} \subset \{1, 2, \dots, s\}$ поставим в соответствие подпространство

$$\mathcal{L}_{\mathbf{S}} = \text{l.h.}\{\mathcal{L}_r \mid r \in \mathbf{S}\}, \quad (8)$$

где $\mathcal{L}_r = \text{l.h.}\{e_{i,j_i} \mid j_i = 1, 2, \dots, k_r, i = n_{l_{r-1}+1}, \dots, n_{l_r}\}$, $r = 1, 2, \dots, s$, $n_{l_0+1} = n_1$, $n_{l_s} = n_k$.

ЛЕММА 3. *При каждом $\mathbf{S} \subset \{1, 2, \dots, s\}$ подпространство $\mathcal{L}_{\mathbf{S}}$ невырождено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{L}_{\mathbf{S}}$ есть A -инвариантное подпространство, в силу леммы 2 достаточно проверить, что $\mathcal{L}_{\mathbf{S}} \cap \mathcal{L}_{\mathbf{S}}^\perp \cap \ker A = \{\theta\}$.

Пусть $x_0 \in \mathcal{L}_{\mathbf{S}} \cap \mathcal{L}_{\mathbf{S}}^\perp \cap \ker A$. Как нетрудно проверить, такой вектор представляется в виде

$$x_0 = \sum_{r \in \mathbf{S}} \sum_{\{i \mid n_i = k_r\}} \alpha_i e_{i,1},$$

или, что эквивалентно,

$$x_0 = \sum_{r \in \mathbf{S}} \sum_{\{i \mid n_i = k_r\}} \alpha_i A^{n_i-1} e_{i,n_i}. \quad (9)$$

Проверим, что x_0 H -ортогонален $\ker A^{k_{j_0}}$, где $j_0 = \max\{i \in \mathbf{S}\}$. В силу изотропности этого вектора в $\mathcal{L}_{\mathbf{S}}$ достаточно показать, что x_0 H -ортогонален $\text{l.h.}\{e_{i,1} \mid n_i \neq k_r, r \in \mathbf{S}\}$.

Рассмотрим следующие три случая.

1) Пусть $j < j_1 = \min\{i \in \mathbf{S}\}$. Из определения (7) следует $k_j > k_{j_0} > k_{j_1}$. Поэтому для любого $z \in \mathcal{L}_{k_j} \cap \ker A^{k_{j_0}}$ имеет место представление $z = Ay$, где $y \in \mathcal{L}_{k_j}$. Равенство (5) влечет

$$[x_0, z] = [x_0, Ay] = [A^*x_0, y] = 0.$$

2) Пусть $j > j_0$, т.е. $k_j < k_{j_1} < k_{j_0}$. Без ограничения общности будем считать, что вектор (9) принадлежит $\text{ran } A^{k_{j_0}-1}$ и не принадлежит $\text{ran } A^{k_{j_0}}$, т.е. жорданова цепочка $x_0 = A^{k_{j_0}-1}y_0, \dots, y_0$ имеет длину k_{j_0} . В силу леммы 1 существует вектор f_0 такой, что $x_0 = A^{*k_{j_0}-1}f_0$. Теперь H -ортогональность x_0 к $w \in \mathcal{L}_j \cap \ker A^{k_{j_0}}$ следует из равенств $[x_0, w] = [A^{*k_{j_0}-1}f_0, w] = [f_0, A^{k_{j_0}-1}w] = 0$.

Если $j_0 = j_1$, то x_0 H -ортогонален $\ker A^{k_{j_0}}$. Если же $j_0 \neq j_1$, то следует рассмотреть и следующий возможный случай.

3) Пусть $j_1 < j < j_0$, т.е. $k_{j_0} < k_j < k_{j_1}$.

Из случаев 1) и 2) в силу представления

$$x_0 = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \text{l.h.}\{\mathcal{L}_i \mid i \in \mathbf{S}, j_1 \leq i < j\}, \quad x_2 \in \text{l.h.}\{\mathcal{L}_i \mid i \in \mathbf{S}, j < i \leq j_0\},$$

следует H -ортогональность x_0 к $v \in \mathcal{L}_j \cap \ker A^{k_{j_0}}$.

Таким образом, x_0 H -ортогонален $\ker A^{k_{j_0}}$, поэтому $x_0 \in \text{ran } A^{*k_{j_0}}$, т.е. существует вектор g_0 такой, что $x_0 = A^{*k_{j_0}}g_0$. Из равенства (2), меняя ролями A и $-A^*$ и заменяя $s-1$ на k_{j_0} , получим, что $x \in \text{ran } A^{k_{j_0}}$. Это противоречит предположению $x \notin \text{ran } A^{k_{j_0}}$ в случае 2).

Вернемся к общему случаю. Пусть H -диссипативный оператор $A: \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ имеет $m \leq n$ различных вещественных собственных значений $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$. Вновь зафиксируем A -жорданов базис (1). Символом $\mathcal{L}_{\lambda, \mathbf{S}(\lambda)}$ обозначим подпространство $\mathcal{L}_{\mathbf{S}(\lambda)}$, соответствующее оператору $A - \lambda I$ согласно формуле (8).

ТЕОРЕМА 1. Подпространство $\mathcal{M} = \text{l.h.}\{\mathcal{L}_{\lambda, \mathbf{S}(\lambda)} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ невырождено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: подпространство $\mathcal{M}$ вырождено. Тогда согласно лемме 2 его изотропная часть содержит хотя бы один собственный вектор $x_0 \neq \theta$ оператора A . Без ограничения общности можно считать, что он соответствует собственному значению $\lambda = 0$. Пусть μ – собственное значение оператора A , а $\mathcal{L}(\mu)$ – соответствующее корневое подпространство. Из леммы 3 следует, что x_0 H -ортогонален $\mathcal{L}(0)$. Покажем, что x_0 H -ортогонален $\mathcal{L}(\mu)$, $\mu \neq 0$. Если s – длина максимальной жордановой цепочки, соответствующей собственному значению μ , то

$$[(A^* - \mu I)^s x_0, y] = [x_0, (A - \mu I)^s y] = 0, \quad y \in \mathcal{L}(\mu). \quad (10)$$

С другой стороны, из равенства (5) имеем

$$[(A^* - \mu I)^s x_0, y] = (-\mu)^s [x_0, y]. \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), получаем $[x_0, y] = 0$ при $y \in \mathcal{L}(\mu)$.

Таким образом, $x_0 \in (\text{l.h.}\{\mathcal{L}(\mu) \mid \mu \in \sigma(A)\})^\perp$. Из равенства $\mathcal{E}^n = \text{l.h.}\{\mathcal{L}(\mu) \mid \mu \in \sigma(A)\}$ следует, что $x_0 = \theta$. Получили противоречие.

СЛЕДСТВИЕ. Каждое подпространство $\mathcal{L}(\mu)$, $\mu \in \sigma(A)$, невырождено.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1, если в качестве $\mathcal{M}$ взять корневое подпространство $\mathcal{L}(\mu)$, $\mu \in \sigma(A)$.

ТЕОРЕМА 2. В $\mathcal{E}^n$ существует A -жорданов базис такой, что линейная оболочка любого набора максимальных жордановых цепочек, входящих в него, невырождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия и теоремы 1 без ограничения общности можно считать спектр оператора A состоящим из одной точки $\lambda = 0$ и все максимальные A -жордановы цепочки имеющими одинаковую длину m , т.е. произвольный базис (1) принимает вид $\{e_{i,j}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, m$. Рассмотрим форму $[A^{m-1}x, x]$. В $\mathcal{E}^n$ существует вектор $e_{1,m}$ такой, что $[A^{m-1}e_{1,m}, e_{1,m}] \neq 0$. В самом деле, в противном случае $A^{m-1}x = 0$ при всех $x \in \mathcal{E}^n$, а это противоречит тому, что длины всех максимальных жордановых цепочек равны m . Без ограничения общности можно считать вектор $e_{1,m}$ выбранным так, что $[A^{m-1}e_{1,m}, e_{1,m}] = a_1$, где $a_1 = 1$ или $a_1 = -1$. Последовательность $\{e_{1,j}\}_{j=1}^m$ с $e_{1,j} = A^{m-j}e_{1,m}$, $j = 1, 2, \dots, m$, является максимальной A -жордановой цепочкой. Согласно лемме 1 существует вектор $f_{1,m}$ такой, что выполнено равенство (2), а именно $A^{*m-1}f_{1,m} = A^{m-1}e_{1,m} = e_{1,1}$.

Заметим, что

$$[A^{*m-1}f_{1,m}, f_{1,m}] = [A^{m-1}e_{1,m}, f_{1,m}] = [e_{1,m}, A^{*m-1}f_{1,m}] = [e_{1,m}, A^{m-1}e_{1,m}] = a_1.$$

Из предположений относительно длин жордановых цепочек получаем, что последовательность $\{f_{1,j}\}_{j=1}^m$ с $f_{1,j} = A^{m-j}f_{1,m}$, $j = 1, 2, \dots, m$, является максимальной A^* -жордановой цепочкой. Из выбора A - и A^* -жордановых цепочек и леммы 2 следует невырожденность подпространств $\text{l.h.}\{e_{1,j}\}_{j=1}^m$ и $\text{l.h.}\{f_{1,j}\}_{j=1}^m$. Поэтому невырождено и A -инвариантное подпространство $\mathcal{E}^{n-m} = (\text{l.h.}\{f_{1,j}\}_{j=1}^m)^\perp$. Следовательно, в $\mathcal{E}^{n-m}$ существует вектор $e_{2,m}$ такой, что $[A^{m-1}e_{2,m}, e_{2,m}] = a_2$, где $a_2 = 1$ или $a_2 = -1$. По тем же правилам, что и выше, построим A -жорданову цепочку $\{e_{2,j}\}_{j=1}^m$ и A^* -жорданову цепочку $\{f_{2,j}\}_{j=1}^m$. Тогда $[A^{m-1}e_{1,m}, e_{2,m}] = [A^{*m-1}f_{1,m}, f_{2,m}] = 0$. Продолжив этот процесс, выделим в $\mathcal{E}^n$ A -жорданов базис $\{e_{i,j}\}_{j=1}^m$, $i = 1, 2, \dots, k$, и A^* -жорданов базис $\{f_{i,j}\}_{j=1}^m$, $i = 1, 2, \dots, k$, такие, что

$$f_{i,1} = A^{*m-1}f_{i,m} = A^{m-1}e_{i,m} = e_{i,1}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (12)$$

$$[A^{m-1}e_{i,m}, e_{i,m}] = [A^{*m-1}f_{i,m}, f_{i,m}] = a_i, \quad a_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (13)$$

$$[A^{m-1}e_{i,m}, e_{s,m}] = [A^{*m-1}f_{i,m}, f_{s,m}] = 0, \quad i \neq s, \quad i, s = 1, 2, \dots, k. \quad (14)$$

Пусть $\{i_r\}_{r=1}^s$ – подмножество множества $\{i\}_{i=1}^k$. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\text{l.h.}\{e_{i_r,j} \mid j = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, s\}$ – невырожденное подпространство. Если это не так, то согласно лемме 2 среди изотропных векторов есть вектор вида

$$\sum_{r=1}^s \alpha_r e_{i_r,1}.$$

Из (12) и (14) имеем $\alpha_r [e_{i_r,1}, e_{i_r,m}] = 0$, а из (13) получаем $\alpha_r = 0$.

2. Максимальные семидефинитные A -инвариантные подпространства.

Целью этого пункта является алгебраическое доказательство существования максимальных семидефинитных A -инвариантных подпространств. Как известно (см., например, [3, с. 15]), размерность максимального неотрицательного (соответственно неположительного) подпространства не зависит от его выбора и совпадает с количеством положительных (соответственно отрицательных) собственных значений оператора H с учетом кратности. Поэтому неотрицательное $\mathcal{M}^+$ и неположительное $\mathcal{M}^-$ A -инвариантные подпространства будут максимальными тогда и только тогда, когда

$$\dim \mathcal{M}^+ + \dim \mathcal{M}^- = n. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 3 [10], [11]. Пусть A есть H -диссипативный оператор в n -мерном H -пространстве $\mathcal{E}^n$. Тогда существуют A -инвариантные максимальное неотрицательное $\mathcal{M}^+$ и максимальное неположительное $\mathcal{M}^-$ подпространства такие, что $\operatorname{Im} \sigma(A|_{\mathcal{M}^+}) \geq 0$ и $\operatorname{Im} \sigma(A|_{\mathcal{M}^-}) \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение пространства $\mathcal{E}^n = \mathcal{E}_1^+ + \mathcal{E}_1^- + \mathcal{E}_1$, где $\mathcal{E}_1^+$ – линейная оболочка корневых векторов оператора A , соответствующих $\lambda \in \sigma_p(A)$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $\mathcal{E}_1^-$ – линейная оболочка корневых векторов оператора A , соответствующих $\lambda \in \sigma_p(A)$, $\operatorname{Im} \lambda < 0$, и $\mathcal{E}_1$ – линейная оболочка корневых векторов оператора A , соответствующих вещественным $\lambda \in \sigma_p(A)$. Из [14] (см. также [1, с. 123–124]) следует неотрицательность $\mathcal{E}_1^+$, неположительность $\mathcal{E}_1^-$ и невырожденность $\mathcal{E}_1$. Поэтому достаточно указать максимальные в $\mathcal{E}_1$ неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{M}_2^+$ и неположительное инвариантное подпространство $\mathcal{M}_2^-$, H -ортогональные $\mathcal{E}_1^+$ и $\mathcal{E}_1^-$.

Пусть (1) – базис в $\mathcal{E}_1$ из жордановых цепочек оператора $A|_{\mathcal{E}_1}$, построенный по методу, изложенному в доказательстве теоремы 2. Рассмотрим подпространства

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^0 &= \text{l.h.} \left\{ e_{i,j_i} \mid j_i = 1, 2, \dots, \frac{n_i}{2}, i : n_i \text{ четно} \right\}, \\ \mathcal{M}_1^+ &= \text{l.h.} \left\{ e_{i,j_i} \mid j_i = 1, 2, \dots, \frac{n_i+1}{2}, i : n_i \text{ нечетно и } [e_{i,1}, e_{i,n_i}] = 1 \right\}, \\ \mathcal{M}_1^- &= \text{l.h.} \left\{ e_{i,j_i} \mid j_i = 1, 2, \dots, \frac{n_i+1}{2}, i : n_i \text{ нечетно и } [e_{i,1}, e_{i,n_i}] = -1 \right\}. \end{aligned}$$

С помощью формулы [14] (см. также [1, с. 125])

$$(A^* - \alpha I)^{l-p} (A - \alpha I)^p x = 0, \quad \text{если } \alpha = \bar{\alpha}, (A - \alpha I)^l x = 0 \text{ и } p = \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + 1, \dots, l-1,$$

можно доказать, что $\mathcal{M}_1^0$ – нейтральное, $\mathcal{M}_1^+$ – положительное, $\mathcal{M}_1^-$ – отрицательное подпространства, они попарно H -ортогональны и H -ортогональны $\mathcal{E}_1^+ + \mathcal{E}_1^-$. Поэтому $\mathcal{M}_2^+ = \mathcal{M}_1^0 + \mathcal{M}_1^+$ и $\mathcal{M}_2^- = \mathcal{M}_1^0 + \mathcal{M}_1^-$ – искомые неотрицательное и неположительное инвариантные подпространства, максимальность которых в $\mathcal{E}_1$ следует из (15).

Авторы признательны А. А. Шкаликову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
- [2] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
- [3] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrices and Indefinite Scalar Products. Basel: Birkhäuser, 1983.
- [4] Shkalikov A. A. Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // Operator Theory: Advances and Applications. V. 87. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 258–285.
- [5] Азизов Т. Я., Сухочёва Л. И. Новый подход к доказательству теоремы о приведении матриц к жордановой форме // Функциональный анализ. Линейные пространства. Ульяновск, 1990. С. 3–5.
- [6] Костюченко А. Г., Шкалик А. А. Самосопряженные операторные пучки и эллиптические задачи // Функцион. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 2. С. 38–61.
- [7] Шкалик А. А. О принципах отбора и свойствах части собственных и присоединенных элементов пучков операторов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1988. № 4. С. 16–25.
- [8] Шкалик А. А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и связанные спектральные задачи // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1989. Т. 14. С. 140–224.
- [9] Azizov T. Ya., Binding P. A., Boggar J., Najman B. Nondegenerate Jordan subspaces of self-adjoint operators in indefinite spaces // Linear Algebra Appl. 1994. V. 207. P. 37–48.
- [10] Азизов Т. Я. Инвариантные подпространства и критерии полноты системы корневых векторов J -диссипативных операторов в пространстве Понтрягина Π_κ // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 5. С. 1015–1017.
- [11] Крейн М. Г., Лангер Г. О дефинитных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_κ // Функцион. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 7. С. 59–71.
- [12] Ran A. C. M., Temme D. Dissipative matrices and invariant maximal semidefinite subspaces // Linear Algebra Appl. 1994. V. 212/213. P. 169–213.
- [13] Azizov T. Ya., Langer H. Some spectral properties of contractive and expansive operators in indefinite inner product spaces // Math. Nachr. 1993. V. 162. P. 247–259.
- [14] Азизов Т. Я. Диссипативные операторы в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 3. С. 639–662.

Воронежский государственный университет
E-mail: azizov@tom.vsu.ru

Поступило
14.08.95
Исправленный вариант
23.05.97