Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Антонов, Ю. А. Назырова, Слоино проективные решетки. 1, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 170–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:09:14

УДК 512.56

СЛОЙНО ПРОЕКТИВНЫЕ РЕШЕТКИ. 1

В. А. Антонов, Ю. А. Назырова

Выделен класс слойно проективных решеток. Примерами таких решеток являются решетки подгрупп конечных абелевых p -групп, неразложимые в прямую сумму конечных модулярных решеток централизаторов, а также решетки подпространств конечномерного линейного пространства над конечным полем, инвариантных относительно линейного оператора с нулевыми собственными значениями. В классе слойно проективных решеток естественным образом вводится понятие типа решетки и ставится проблема изоморфности решеток одинакового типа. Эта проблема решается положительно для некоторых конкретных типов слойно проективных решеток. Основной метод – слойный подъем координат.

Библиография: 11 названий.

Введение. Проблема представимости данной решетки решеткой подгрупп некоторой группы была поставлена М. Судзуки [1] более тридцати лет назад. В общем виде эта проблема была решена Б. В. Яковлевым [2]. Но вопрос о представимости конечной модулярной решетки решеткой подгрупп конечной абелевой группы все еще открыт, единственный известный авторам результат получен С. А. Анищенко [3] для решеток размерности 2.

Один из подходов к решению этой задачи заключается в следующем. Необходимо выделить некоторые свойства решетки подгрупп конечной абелевой группы и доказать, что любые две решетки, удовлетворяющие этим свойствам, изоморфны. При этом достаточно ограничиться p -группами.

Отметим, что если $\mathcal{L}$ – решетка подгрупп конечной абелевой p -группы, то $\mathcal{L}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{L}$ – конечная модулярная решетка;
- 2) если A – неразложимый элемент из $\mathcal{L}$, то интервал $[0, A]$ является цепью, т.е. A – цикл;
- 3) $\mathcal{L}$ обладает инволютивным антиавтоморфизмом;
- 4) если B – сумма элементов из $\mathcal{L}$, покрывающих A , то интервал $[A, B]$ (в дальнейшем такой интервал будем называть *слоем решетки $\mathcal{L}$*) является дезарговой проективной геометрией над полем $\text{GF}(p)$.

Это позволяет дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Слойно проективной решеткой* назовем конечную модулярную решетку $\mathcal{L}$, обладающую следующими свойствами:

- 1) любой неразложимый элемент из $\mathcal{L}$ является циклом;

- 2) $\mathcal{L}$ обладает инволютивным антиавтоморфизмом φ ;
- 3) любой слой решетки $\mathcal{L}$ является дезарговой проективной геометрией над полем $\text{GF}(p^n)$ (числа p и n для данной решетки фиксированы).

Целью данной статьи является доказательство изоморфности слойно проективных решеток в некоторых случаях.

1. Основные понятия. Пусть $\mathcal{L}$ – некоторая решетка с нулем 0 и единицей L . Элемент $A \in \mathcal{L}$ называется *циклом* (*коциклом*), если интервал $[0, A]$ (интервал $[A, L]$ соответственно) является цепью.

Элемент B *покрывает* A , если интервал $[A, B]$ – цепь длины 1.

Атомом решетки $\mathcal{L}$ называется элемент, покрывающий 0.

Слоем назовем интервал $[A, B]$ решетки $\mathcal{L}$ такой, что B совпадает с суммой всех элементов из B , покрывающих A .

Обозначим через $\omega(A)$ сумму всех атомов решетки $\mathcal{L}$, лежащих в A . Назовем интервал $[0, \omega(L)]$ *нижним слоем* решетки $\mathcal{L}$.

Через $l(A)$ условимся обозначать *высоту* элемента A , т.е. длину наибольшей цепи из интервала $[0, A]$.

Сумму всех циклов высоты не более k , лежащих в A , обозначим через $\omega_k(A)$. В частности, $\omega_1(A) = \omega(A)$.

Элементы $A_1, \dots, A_n$ решетки $\mathcal{L}$ называются *независимыми*, если $A_i \wedge (\bigvee_{j \neq i} A_j) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Цикл A – *средний* для циклов $A_1, \dots, A_n$, если $\bigvee_{j=1}^n A_j = A \vee (\bigvee_{j \neq i} A_j)$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Максимальный цикл из A , т.е. цикл, не содержащийся в большем цикле, назовем *точкой*.

2. Проективные геометрии. Неразложимая в прямую сумму конечная модулярная решетка с дополнениями является проективной геометрией [4, теорема 4.10].

Пусть $\mathcal{L}$ – дезаргова проективная геометрия размерности $n - 1$ над полем $\text{GF}(p^m)$, $A_1, A_2, \dots, A_n, E$ – базис $\mathcal{L}$, т.е. $A_1, A_2, \dots, A_n$ – независимые точки, E – средний для $A_1, A_2, \dots, A_n$. Если положить

$$A_1 = (1, 0, \dots, 0), A_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, A_n = (0, 0, \dots, 1), E = (1, 1, \dots, 1),$$

то каждая точка S из $\mathcal{L}$ имеет однозначно определенные однородные координаты $(\alpha t, \beta t, \dots, \gamma t)$ (см. [5, теорема 12.1.4]).

Если множитель t выбран так, что последняя ненулевая координата точки S равна 1, то соответствующий набор $(\alpha t, \beta t, \dots, \gamma t)$ будем называть *нормированными координатами* точки S .

Несложно показать, что если $B_1, B_2, \dots, B_n$ – независимая система точек из $\mathcal{L}$, $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni})$ – нормированные координаты точки B_i и

$$T = t \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{1i}, \sum_{i=1}^n \alpha_{2i}, \dots, \sum_{i=1}^n \alpha_{ni} \right),$$

слагаемых $l(X_i) = l(Y_i)$. Число n в этом случае называется *размерностью элемента* A . Размерность L называется *размерностью решетки* $\mathcal{L}$.

Если $L = \bigvee_{i=1}^n A_i$ – представление L в виде суммы независимых циклов, $l(A_1) = \dots = l(A_k)$ и $l(A_j) < l(A_k)$ при $k < j \leq n$, то k называется *геометрической размерностью решетки* $\mathcal{L}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7 [8, теорема 1.6]. *Примарная решетка геометрической размерности не меньше 4 аргова.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 8 [7, теорема 12.3]. *Аргова примарная решетка геометрической размерности не меньше 3 изоморфна решетке всех подмодулей конечно порожденного модуля над вполне примарным однорядовым кольцом.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 9 [7, теорема 4.17]. *Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_1$ – примарные решетки, f – взаимно однозначное отображение множества циклов из $\mathcal{L}$ на множество циклов из $\mathcal{L}_1$ такое, что условия $A \leq B \vee C$ и $f(A) \leq f(B) \vee f(C)$ равносильны. Тогда f единственным образом продолжается до изоморфизма решетки $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}_1$.*

4. Примеры слойно проективных решеток.

ПРИМЕР 1. Как уже отмечалось во введении, решетка подгрупп конечной абелевой p -группы является слойно проективной решеткой.

ПРИМЕР 2. Пусть V – линейное векторное пространство над полем $\text{GF}(p^n)$ с базисом $e_{11}, \dots, e_{1m_1}, e_{21}, \dots, e_{2m_2}, \dots, e_{k1}, \dots, e_{km_k}$ и пусть ψ – линейный оператор пространства V такой, что $\psi(e_{ij}) = e_{i,j+1}$ при $j < m_i$ и $\psi(e_{im_i}) = 0$. Обозначим через $\mathcal{L}$ решетку всех ψ -инвариантных подпространств пространства V . Тогда $\mathcal{L}$ является слойно проективной решеткой.

Доказательство этого факта не встречает никаких принципиальных трудностей, но весьма громоздко. Поэтому ограничимся только наброском доказательства.

Пусть $x \in V$. Обозначим через $\langle x \rangle^\psi$ ψ -замыкание вектора x , т.е. подпространство, порожденное векторами $x, \psi(x), \psi^2(x), \dots$. Легко понять, что $\langle x \rangle^\psi$ является циклом высоты k , где k – наименьшее неотрицательное целое число со свойством $\psi^k(x) = 0$. При этом

$$\langle x \rangle^\psi > \langle \psi(x) \rangle^\psi > \dots > \langle \psi^k(x) \rangle^\psi = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что любой неразложимый элемент из $\mathcal{L}$ является циклом. Построим инволютивный антиавтоморфизм φ . Предположим для определенности, что $m_1 \geq m_i$ для всех $i = 2, \dots, k$. Пусть $F = \text{GF}(p^n)$, $K = F[p]/\langle p^{m_1} \rangle$ – кольцо многочленов переменной p степени меньше m_1 .

Пусть $x, y \in V$, $x = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{km_k})$, $y = (\beta_{11}, \dots, \beta_{km_k})$. Будем писать $x \perp y$ тогда и только тогда, когда в кольце K выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^k (\alpha_{11} + p\alpha_{12} + \dots + p^{m_i-1}\alpha_{im_i})(\beta_{11} + p\beta_{12} + \dots + p^{m_i-1}\beta_{im_i})p^{m_1-m_i} = 0. \quad (1)$$

Легко заметить, что если $x \perp y$, то $x \perp \psi(y)$. Поэтому $x^\perp = \{y \in V \mid x \perp y\}$ является ψ -инвариантным подпространством. Искомый инволютивный антиавтоморфизм φ решетки $\mathcal{L}$ задается формулой $\varphi(A) = A^\perp$, где $A \in \mathcal{L}$, $A^\perp = \{y \in V \mid x \perp y \forall x \in A\}$. Детали доказательства опускаем. Отметим только, что если $\langle x \rangle^\psi$ – цикл высоты t и

$x = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{km_k})$, то $\alpha_{ij} = 0$ для всех пар (i, j) , в которых $m_i - j \geq t$, но $\alpha_{i, m_i - t + 1} \neq 0$ хотя бы для одного i . Подпространство $\langle x \rangle^\psi$ в этом случае t -мерно (его базис образуют, например, векторы $x, \psi(x), \dots, \psi^{t-1}(x)$). Приравнявая к 0 коэффициенты многочлена из равенства (1), получим систему линейных уравнений, ранг которой равен t , т.е. $x^\perp$ является $(m - t)$ -мерным пространством, где $m = \sum_{i=1}^k m_i$.

ПРИМЕР 3. В работах [9], [10] была сделана попытка аксиоматизации решеток центральных групп. В связи с этим были выделены классы C -решеток и правильных C -решеток. Напомним их определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. C -решеткой называется полная решетка $\mathcal{L}$, обладающая инволютивным антиавтоморфизмом φ таким, что

- 1) если A – неразложимый элемент из $\mathcal{L}$, то $A \leq \varphi(A)$;
- 2) если $A \not\leq \varphi(A)$, то в интервале $[A \wedge \varphi(A), A]$ содержится более двух элементов B со свойством $\varphi(B) \wedge A = B$ (если при этом A покрывает хотя бы один элемент, содержащий $A \wedge \varphi(A)$, то A покрывает более двух таких элементов);
- 3) любой элемент $A \in \mathcal{L}$ совпадает с суммой таких элементов B из интервала $[A \wedge \varphi(A), A]$, что $B = A \wedge \varphi(B)$.

Конечная модулярная C -решетка называется *правильной*, если в ней каждый неразложимый элемент является циклом.

Оказывается [9, теорема 4], если $\mathcal{L}$ – правильная C -решетка, L – ее единица, то $L = \bigvee_{i=1}^n H_i$, где $H_i = A_i \vee B_i$, A_i и B_i – циклы одинаковой высоты, и $\varphi(H_i) = \bigvee_{j \neq i} H_j$ для всех $i = 1, \dots, n$. В частности, размерность правильной C -решетки всегда четна.

Из [10, теорема С.7] следует, что если $\mathcal{L}$ – неразложимая в прямую сумму правильная C -решетка размерности больше 2, то $\mathcal{L}$ слоисто проективна. В случае размерности 2 это не всегда так [10, пример В.4 и пример на с. 23].

ТЕОРЕМА 1. *Слоисто проективная решетка $\mathcal{L}$ является C -решеткой в том и только том случае, когда она обладает инволютивным антиавтоморфизмом φ таким, что $A \leq \varphi(A)$ для любого цикла $A \in \mathcal{L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из определения 2. Докажем достаточность. Отметим, что если $A \leq \varphi(A)$, то выполнение свойства 3) из определения 2 очевидно.

Пусть $A \not\leq \varphi(A)$, $C < A$ и $\varphi(C) \geq C$. Тогда из $\varphi(C) > \varphi(A) > \varphi(A) \wedge A$ и $\varphi(A \wedge \varphi(A)) = A \vee \varphi(A) > A > C$ следует, что $\varphi(B) \geq B$, где $B = C \vee (A \wedge \varphi(A))$.

Пусть теперь C – произвольный цикл из A , B – максимальный элемент из A со свойством $\varphi(B) \geq B \geq C$. По уже доказанному $B > A \wedge \varphi(A)$. Покажем, что $\varphi(B) \wedge A = B$. Предположим противное: пусть $T = \varphi(B) \wedge A > B$. Тогда

$$\varphi(T) \wedge A = (B \vee \varphi(A)) \wedge A = B \vee (A \wedge \varphi(A)) = B.$$

Если D – цикл из T , не лежащий в B , то из

$$\varphi(B \vee D) = \varphi(B) \wedge \varphi(D) \geq T \wedge \varphi(D) \geq T \wedge D = D$$

и

$$\varphi(B \vee D) = \varphi(B) \wedge \varphi(D) \geq \varphi(T) \geq \varphi(T) \wedge A = B$$

следует, что $\varphi(B \vee D) \geq B \vee D$, что противоречит выбору D .

Итак, мы показали, что любой цикл $C \leq A$ содержится в элементе B таком, что $\varphi(B) \wedge A = B$. Отсюда, как несложно видеть, следует свойство 3) из определения 2. Покажем выполнение свойства 2).

Пусть C_1 – цикл из A , не лежащий в $A \wedge \varphi(A)$, C_2 – цикл из A , не лежащий в $\varphi(C_1)$. Из определения 1 несложно получить, что существует цикл C , средний для C_1 и C_2 . Но тогда, если B_1, B_2, B_3 – элементы из A такие, что $\varphi(B_i) \wedge A = B_i$ и $B_i \geq C_i$, то они, очевидно, попарно различны. Это доказывает первую часть свойства 2).

Докажем теперь вторую часть этого свойства. Пусть A покрывает B_1 и $B_1 \geq A \wedge \varphi(A)$. Пусть C_2 – цикл из A , не лежащий в B_1 , $T = C_2 \vee (A \wedge \varphi(A))$. По уже доказанному $\varphi(T) \geq T$. Поэтому $T < A$. Обозначим через B_2 максимальный элемент из A , содержащий T . Тогда A покрывает B_2 , $B_2 > A \wedge \varphi(A)$ и $B_2 \neq B_1$. Остается взять цикл C_1 из B_1 , не лежащий в B_2 , средний цикл C для C_1 и C_2 и максимальный в A элемент B , содержащий $C \vee (A \wedge \varphi(A))$. Теорема доказана.

Заметим, что слойно проективные решетки из примеров 1 и 2 арговы. В связи с этим возникает вопрос: не будет ли произвольная слойно проективная решетка арговой?

Отметим следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Решетка подгрупп конечной абелевой p -группы G является C -решеткой в том и только том случае, когда в представлении G в виде прямого произведения циклических групп участвует четное число групп каждого порядка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из упомянутой выше теоремы 4 из [9]. Докажем достаточность. Пусть

$$G = \langle a_1 \rangle \times \langle b_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_k \rangle \times \langle b_k \rangle, \quad l(a_i) = l(b_i) = m_i, \quad m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_k.$$

Рассмотрим группу

$$H = \left(\langle z \rangle \times \prod_{i=1}^k \langle c_i \rangle \right) \wedge \left(\prod_{i=1}^k \langle d_i \rangle \right),$$

где $|c_i| = |d_i| = m_i$, $|z| = m_1$ и $[c_i, d_i] = z^{m_1 - m_i}$. Ясно, что $G \cong H/Z(H)$. Так как H является группой типа Гашюца (см. [11]), т.е. в ней любая подгруппа, содержащая центр, является централизатором, то решетка подгрупп $\mathcal{L}(G)$ группы G изоморфна решетке централизаторов $\mathcal{C}(H)$ группы H . В [9] показано, что решетка централизаторов произвольной конечной группы является C -решеткой. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Для любой конечной абелевой p -группы G решетка подгрупп группы $H = G \times G$ является правильной C -решеткой.*

5. Об изоморфизме слойно проективных решеток. Отметим следующие свойства слойно проективных решеток.

ЛЕММА 1. *Слойно проективная решетка примарна.*

Доказательство очевидно.

В дальнейшем через φ будем обозначать антиавтоморфизм из определения 1.

ЛЕММА 2. *Если $\mathcal{L}$ – слойно проективная решетка, то для любого элемента $A \in \mathcal{L}$ интервал $[A \wedge \varphi(A), A]$ является слойно проективной решеткой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как каждый слой этого интервала является частью слоя решетки $\mathcal{L}$, то с учетом утверждения 1 нам достаточно показать, что этот интервал обладает инволютивным антиавтоморфизмом.

Для $B \in [A \wedge \varphi(A), A]$ положим $\varphi_1(B) = \varphi(B) \wedge A$. Тогда если $B, B_1, B_2 \in [A \wedge \varphi(A), A]$, то

$$\begin{aligned}\varphi_1(B_1 \vee B_2) &= \varphi(B_1 \vee B_2) \wedge A = \varphi(B_1) \wedge \varphi(B_2) \wedge A = \varphi_1(B_1) \wedge \varphi_1(B_2), \\ \varphi_1^2(B) &= \varphi_1(\varphi(B) \wedge A) = \varphi(\varphi(B) \wedge A) \wedge A = (B \vee \varphi(A)) \wedge A = B \vee (\varphi(A) \wedge A) = B.\end{aligned}$$

Покажем, что выполнено и $\varphi_1(B_1 \wedge B_2) = \varphi_1(B_1) \vee \varphi_1(B_2)$. Неравенство $\varphi_1(B_1 \wedge B_2) \geq \varphi_1(B_1) \vee \varphi_1(B_2)$ очевидно. Если $\varphi_1(B_1 \wedge B_2) > \varphi_1(B_1) \vee \varphi_1(B_2)$, то

$$\begin{aligned}B_1 \wedge B_2 &= \varphi_1^2(B_1 \wedge B_2) = \varphi_1(\varphi_1(B_1 \wedge B_2)) \\ &< \varphi_1(\varphi_1(B_1) \vee \varphi_1(B_2)) = \varphi_1^2(B_1) \wedge \varphi_1^2(B_2) = B_1 \wedge B_2,\end{aligned}$$

что невозможно. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{L}$ – слойно проективная решетка, L – ее единица. Согласно утверждению 6 $L = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – независимые циклы. Пусть $m_i = l(A_i)$. Предположим, что $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$. Если каждый слой – геометрия над полем $\text{GF}(p^m)$, то набор $(m_1, m_2, \dots, m_n, p^m)$ будем называть *типом решетки $\mathcal{L}$* .

ГИПОТЕЗА. *Слойно проективные решетки одинакового типа изоморфны.*

Эта гипотеза очевидна в случае $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$, т.е. при $L = \omega(L)$, и в случае $n = 1$. Кроме того, справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Слойно проективные решетки одинакового типа (m_1, m_2, p^m) , т.е. имеющие размерность 2, изоморфны.*

Доказательство дословно повторяет доказательство основного результата из [3]. Можно также несколько модифицировать доказательство теоремы С.12 из [10].

В силу утверждения 9 для доказательства изоморфизма слойно проективных решеток достаточно установить взаимно однозначное соответствие между множествами циклов этих решеток так, чтобы сохранялась “коллинеарность”. При этом вполне естественно поступать следующим образом. Ввести координаты в нижнем слое решетки $\mathcal{L}$, т.е. в проективной геометрии $[0, \omega(L)]$. Затем, поднимаясь по слоям, присвоить каждому циклу некоторые координаты. Наконец, циклу, имеющему заданные координаты в первой решетке, поставить в соответствие цикл, имеющий такие же координаты во второй решетке, и доказать, что при таком соответствии “коллинеарность” сохраняется.

Простой иллюстрацией этого пути является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Слойно проективные решетки одинакового типа $(k, 1, \dots, 1, p^m)$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}$ – решетка указанного типа, $L = A \vee B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n$, где $l(A) = k, l(B_i) = 1$ для $i = 1, \dots, n$, и пусть ряд $0 = A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_k = A$ неуплотняем. Положим $P_i = \omega_i(L) = A_i \vee B_1 \vee \dots \vee B_n$ и присвоим каждому циклу из $\mathcal{L}$ $(k+n)$ -мерные координаты следующим образом.

Зададим в проективной геометрии $[0, P_1]$ базис $\{A_1, B_1, \dots, B_n, T_1\}$, где T_1 – фиксированный средний для $A_1, B_1, \dots, B_n$. Если X – атом из $\mathcal{L}$ и $X = t(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n)$ в этом базисе, то положим

$$X = t(\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_n)_L.$$

(Условимся в дальнейшем ненулевой множитель t в однородных координатах по возможности опускать.)

В качестве базиса геометрии $[A_1, P_2]$ возьмем элементы $A_2, A_1 \vee B_1, \dots, A_1 \vee B_n, T_2$, где T_2 – средний для A_2 и T_1 . Тогда, как нетрудно видеть, если $S = (\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n)$ – атом из P_1 , то $A_1 \vee S = (0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ в интервале $[A_1, P_2]$. Если X – цикл высоты 2 из $\mathcal{L}$ и $X = (\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n)$ в $[A_1, P_2]$, то положим

$$X = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-2}, \alpha, 0, \beta_1, \dots, \beta_n)_L.$$

В интервале $[A_2, P_3]$ в качестве базиса выберем $A_3, A_2 \vee B_1, \dots, A_2 \vee B_n, T_3$, где T_3 – средний для A_3 и T_2 , и т.д. В результате каждому циклу X высоты l будут присвоены координаты вида

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_{k-l}, \alpha, \underbrace{0, \dots, 0}_{l-1}, \beta_1, \dots, \beta_n)_L.$$

Если при этом $l > 1$ и X покрывает Y , то

$$Y = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-l+1}, \alpha, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+l-2})_L.$$

Пусть теперь X и Y – циклы из $\mathcal{L}$, $l(X) = l_1 \geq l_2 = l(Y)$, Z – цикл из $X \vee Y$ и пусть

$$X = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-l_1}, \alpha, 0, \dots, 0, \beta_1, \dots, \beta_n)_L, \quad Y = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-l_2}, \alpha', 0, \dots, 0, \beta'_1, \dots, \beta'_n)_L.$$

Обозначим через X_i и Y_i циклы высоты i из X и Y соответственно. Тогда

$$X_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-i}, \alpha, 0, \dots, 0)_L \quad \text{при } 1 \leq i < l_1,$$

$$Y_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-i}, \alpha', 0, \dots, 0)_L \quad \text{при } 1 \leq i < l_2.$$

Индукцией по числу $l_1 + l_2$ покажем, что координаты Z являются линейной комбинацией координат элементов $X_1, \dots, X_{l_1}, Y_1, \dots, Y_{l_2}$. Это очевидно в случае $l_1 + l_2 \leq 2$. Пусть $l_1 + l_2 > 2$. Если исключить тривиальный случай $Y \leq X$, то $X \vee Y = X \vee B$, где B – атом из $B_1 \vee \dots \vee B_n$. Если $l(Z) < l_1$, то $Z \leq X_{l_1-1} \vee Y$, и мы можем применить предположение индукции.

Пусть $l(Z) = l_1$. Предположим сначала, что $l_2 = 1$. Тогда $X = (\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n)$ и $A_{l_1-1} \vee Y = (0, \beta'_1, \dots, \beta'_n)$ в геометрии $[A_{l_1-1}, P_{l_1}]$. Следовательно, в этой геометрии $Z = (a\alpha, a\beta_1 + b\beta'_1, \dots, a\beta_n + b\beta'_n)_L$ для некоторых $a, b \in \text{GF}(p^m)$, т.е.

$$Z = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-l_1}, a\alpha, 0, \dots, 0, a\beta_1 + b\beta'_1, \dots, a\beta_n + b\beta'_n)_L = a(X)_L + b(Y)_L - b\alpha^{-1}\alpha'(X_1)_L,$$

где через $(\cdot)_L$ обозначен вектор координат элемента. Если же $l_2 > 1$, то по уже доказанному из $l(B) = 1$ получаем $Z = a(X)_L + b(Y)_L + c(X_1)_L$ для некоторых $a, b, c \in \text{GF}(p^m)$. Аналогично из $B \vee Y = B \vee X_{l_2}$ имеем $Y = a_1(X_{l_2})_L + b_1(B)_L + c_1(X_1)_L$. Так как $Y \not\leq X$, имеем $b_1 \neq 0$ и

$$Z = a(X)_L + b(b_1^{-1}(Y)_L - a_1b_1^{-1}(X_{l_2})_L - c_1b_1^{-1}(X_1)_L) + c(X_1)_L.$$

Если теперь $\mathcal{L}_2$ – решетка ψ -инвариантных подпространств $(k+n)$ -мерного пространства (см. пример 2), имеющая данный тип, то отображение $\chi: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, ставящее в соответствие циклу $X \in \mathcal{L}_1$ цикл $\langle\langle X \rangle\rangle^\psi \in \mathcal{L}_2$, очевидно, продолжается до изоморфизма. Теорема доказана.

В случае, когда в решетке $\mathcal{L}$ есть хотя бы два независимых цикла высоты $l > 1$, сложность доказательства резко возрастает. Пока авторам удалось доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *Любые две правильные C -решетки одинакового типа $(2, 2, 1, 1, \dots, 1, 1, p^m)$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}$ – правильная C -решетка указанного типа, φ – инволютивный антиавтоморфизм $\mathcal{L}$ со свойством $\varphi(X) \geq X$ для любого цикла $X \in \mathcal{L}$. Пусть $L = A \vee B \vee C_1 \vee D_1 \vee \dots \vee C_n \vee D_n$, где $l(A) = l(B) = 2$, $l(C_i) = l(D_i) = 1$,

$$\varphi(A \vee B) = \bigvee_{i=1}^n (C_i \vee D_i), \quad \varphi(C_i \vee D_i) = (A \vee B) \vee \left(\bigvee_{j \neq i} (C_j \vee D_j) \right).$$

Условимся через X_0 обозначать $\omega(X)$. Тогда если $Q = A_0 \vee B_0$ и X – произвольный цикл высоты 2, то $X_0 \leq Q$. Кроме того, положим $P = \omega(L)$ и $R = \bigvee_{i=1}^n (C_i \vee D_i)$.

Введем однородные координаты в проективной геометрии $[0, P]$. Для этого положим

$$A_0 = (1, 0, \dots, 0), \quad B_0 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad D_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Элементы

$$T_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n+2-i})$$

построим индукцией по i : T_2 – произвольный средний для A_0 и B_0 , T_3 – средний для T_2 и C_1 , T_4 – средний для D_1 и T_3 . При $k > 2$ T_{2k+1} – произвольный средний для T_{2k} и C_k , $T_{2k+2} = (T_{2k+1} \vee D_k) \wedge \varphi(E_k)$, где $E_k = (0, 0, 1, 0, \dots, 0, -1)$ в проективной геометрии $[0, A_0 \vee B_0 \vee \bigvee_{i=1}^{k-1} (C_i \vee D_i) \vee C_k]$ относительно базиса $A_0, B_0, C_1, D_1, \dots, C_k, T_{2k+1}$.

Элементы $A_0, B_0, C_1, D_1, \dots, C_n, D_n, T_{2n+2}$ образуют базис $[0, P]$. Из его построения следует, что если $(\alpha, \beta, \gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_n, \delta_n)_P$ и $(a, b, c_1, d_1, \dots, c_n, d_n)_P$ – координаты точек S и S_1 из $[0, P]$ в этом базисе, то условие $S \leq \varphi(S_1)$ равносильно тому, что

$$\sum_{i=1}^n (\gamma_i d_i - \delta_i c_i) = 0.$$

Если X_0 – атом из Q , то интервал $[X_0, \varphi(X_0)]$ также является проективной геометрией. Ясно, что $\varphi(X_0) = X \vee K_X \vee R$, где X – цикл из $A \vee B$, покрывающий X_0 , K_X – атом, дополняющий X_0 до Q .

Пусть $(\alpha, \beta, 0, \dots, 0)_P$ и $(\gamma, \delta, 0, \dots, 0)_P$ – нормированные координаты X_0 и K_X соответственно. Тогда $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Положим $T = (\gamma, \delta, 1, \dots, 1)_P$ и $T_1 = (\alpha + \gamma, \beta + \delta, 1, \dots, 1)_P$. Элементы $\{X_0, K_X, C_1, \dots, D_n, T_1\}$ образуют базис $[0, P]$, а элементы $\{K_X, C_1, \dots, D_n, T\}$ – базис $[0, K_X \vee R]$, причем координаты в $[0, P]$ продолжают координаты в $[0, K_X \vee R]$. Ясно, что элементы $\{X_0 \vee K_X, X_0 \vee C_1, \dots, X_0 \vee D_n, X_0 \vee T\}$ образуют базис интервала $[X_0, P]$, и если $S = (0, 0, c_1, \dots, d_n)_P$, то $X_0 \vee S = (0, c_1, \dots, d_n)_{[X_0, P]}$ в этом базисе.

Пусть $S = (a, b, c_1, \dots, d_n)_P$ и $S = (x, y, z_1, t_1, \dots, z_n, t_n)$ в базисе $\{X_0, K_X, C_1, \dots, D_n, T\}$. Тогда можно считать, что $a = \alpha x + \gamma y$, $b = \beta x + \delta y$, $c_i = z_i$, $d_i = t_i$, т.е.

$$x = \frac{a\delta - b\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad y = \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad z_i = c_i, \quad t_i = d_i.$$

Поэтому

$$X_0 \vee S = \left(\frac{b\alpha - a\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}, c_1, \dots, d_n \right) = (b\alpha - a\beta, c_1(\alpha\delta - \beta\gamma), \dots, d_n(\alpha\delta - \beta\gamma))$$

в базисе $\{X_0 \vee K_X, X_0 \vee C_1, \dots, X_0 \vee D_n, X_0 \vee T\}$. В дальнейшем мы рассматриваем именно этот базис в $[X_0, P]$.

Введем координаты в $[X_0, \varphi(X_0)]$, продолжающие введенные координаты в $[X_0, P]$. Пусть $H = (X \vee T) \wedge \varphi(S)$, где

$$S = (-1, 1, \alpha\delta - \beta\gamma + 1, 0, \dots, 0)_{[X_0, P]}.$$

Так как $l(X \vee T) = 3$, $l(\varphi(S)) = 2n$ и $(X \vee T) \vee \varphi(S) \leq \varphi(X_0)$, выполнено $l(H) \geq 2$. Из $T \not\leq \varphi(S)$ следует, что H – цикл высоты 2.

Элементы $\{X, X_0 \vee K_X, X_0 \vee C_1, \dots, X_0 \vee D_n, H\}$ образуют базис проективной геометрии $[X_0, \varphi(X_0)]$, и координаты в этом базисе продолжают координаты в $[X_0, P]$, так как $(H \vee X) \wedge P = (T \vee X) \wedge P = X_0 \vee T$. В частности,

$$S = (0, -1, 1, \alpha\delta - \beta\gamma + 1, 0, \dots, 0)_{[X_0, \varphi(X_0)]}.$$

Пусть $T' = (0, 0, 1, \dots, 1)_P$, $X' = (H \vee T') \wedge (X \vee K_X)$, т.е. $X' = (1, 1, 0, \dots, 0)_{[X_0, \varphi(X_0)]}$. Так как $H \vee T' = X' \vee T'$, то $H < X' \vee T'$ и $\varphi(H) > \varphi(X' \vee T') = \varphi(X') \wedge \varphi(T')$. Несложно заметить, что $\varphi(X') = X' \vee R$. Поэтому $\varphi(H) > X' \vee (\varphi(T') \wedge R)$, т.е. $\varphi(H) = S \vee X' \vee (\varphi(T') \wedge R)$.

Рассмотрим отображение $\psi: [X_0, \varphi(X_0)] \rightarrow [X_0, \varphi(X_0)]$ такое, что если $Y = (a, b, c_1, \dots, d_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]}$, то $\psi(Y) = \vee Z$, где суммирование ведется по всем $Z = (x, y, z_1, \dots, t_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]}$, для которых

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(ay - bx) + \sum_{i=1}^n (c_i t_i - d_i z_i) = 0. \quad (2)$$

Отображение ψ естественным образом продолжается до антиавтоморфизма интервала $[X_0, \varphi(X_0)]$. Обозначим этот антиавтоморфизм тоже через ψ . Заметим, что φ и ψ действуют одинаково на базисных элементах $X, X_0 \vee K_X, X_0 \vee C_1, \dots, X_0 \vee D_n, H$. В самом деле,

$$\psi(X) = \bigvee_{y=0} (x, y, z_1, \dots, t_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]} = X \vee R = \varphi(X).$$

Аналогично для $X_0 \vee K_X, X_0 \vee C_1, \dots, X_0 \vee D_n$. Наконец, из $\psi(H) = \vee Z$, где суммирование ведется по всем $Z = (x, y, z_1, \dots, t_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]}$, для которых

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(y - x) + \sum_{i=1}^n (t_i - z_i) = 0,$$

получаем $\psi(H) = S \vee X' \vee (\varphi(T') \wedge R) = \varphi(H)$. Здесь, как и выше,

$$S = (0, -1, 1, \alpha\delta - \beta\gamma + 1, 0, \dots, 0)_{[X_0, \varphi(X_0)]}, \\ X' = (1, 1, 0, \dots, 0)_{[X_0, \varphi(X_0)]}, \quad X_0 \vee T' = (0, 0, 1, \dots, 1)_{[X_0, \varphi(X_0)]}.$$

Поэтому $\varphi\psi = \theta$ для некоторого автоморфизма θ , индуцированного автоморфизмом поля $\text{GF}(p^m)$. Пусть a — произвольный элемент из $\text{GF}(p^m)$, $K = (0, 0, a, 1, 0, \dots, 0)_{[X_0, \varphi(X_0)]}$. Ясно, что

$$\varphi(K) = X \vee K_X \vee K \vee \bigvee_{i=2}^n (C_i \vee D_i).$$

Так как

$$\psi(K) = \bigvee_{at_1 - z_1 = 0} (x, y, z_1, \dots, t_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]} = \varphi(K),$$

имеем $\varphi\psi(K) = K$. В силу произвольности $a \in \text{GF}(p^m)$ $\varphi = \psi$.

Теперь присвоим каждому циклу из $\mathcal{L}$ однородные координаты следующим образом. Введем сначала координаты в $[0, P]$ и $[X_0, \varphi(X_0)]$ для каждого $X_0 < Q$, как описано выше. Пусть S — произвольный цикл из $\mathcal{L}$. Если S — атом и $S = (\alpha, \beta, \gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_n, \delta_n)_{[0, P]}$, то положим

$$S = t(0, 0, \alpha, \beta, \gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_n, \delta_n)_L.$$

Пусть S — цикл высоты 2, X_0 — атом из S . Если $(\alpha, \beta, 0, \dots, 0)_{[0, P]}$ и $(\gamma, \delta, 0, \dots, 0)_{[0, P]}$ — нормированные координаты X_0 и K_X и $S = (a, b, c_1, d_1, \dots, c_n, d_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]}$, то положим

$$S = t(\alpha a, \beta a, \gamma b, \delta b, c_1, d_1, \dots, c_n, d_n)_L.$$

В дальнейшем, как и ранее, множитель t будем по возможности опускать.

Пусть $S = (\alpha a, \beta a, \gamma b, \delta b, c_1, \dots, d_n)_L$ — произвольный цикл высоты 2 из $\mathcal{L}$. Так как $S = (a, b, c_1, \dots, d_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]}$, то по уже доказанному $\varphi(S) = \vee Z$, где суммирование ведется по всем $Z = (x, y, z_1, \dots, t_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]}$, для которых выполнено (2).

Пусть R — атом из $\mathcal{L}$, $R = (x, y, z_1, \dots, t_n)_P$. Тогда

$$X_0 \vee R = (0, \alpha y - \beta x, z_1(\alpha\delta - \beta\gamma), \dots, t_n(\alpha\delta - \beta\gamma))_{[X_0, \varphi(X_0)]},$$

и мы получаем, что R лежит в $\varphi(S)$ в том и только том случае, когда

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)a(\alpha y - \beta x) + \sum_{i=1}^n (\alpha\delta - \beta\gamma)(c_i t_i - d_i z_i) = 0$$

или, что то же самое,

$$\alpha a y - \beta a x + \sum_{i=1}^n (c_i t_i - d_i z_i) = 0. \quad (3)$$

Итак, мы показали, что если $S = (\alpha a, \beta a, \gamma b, \delta b, c_1, \dots, d_n)_L$ – цикл высоты 2 из $\mathcal{L}$, то $\varphi(S) = S \vee (\vee Z)$, где суммирование ведется по всем $Z = (x, y, z_1, \dots, t_n)_P$, для которых выполнено (3).

Пусть $\mathcal{L}'$ – другая правильная C -решетка такого же типа, $L' = A' \vee B' \vee C'_1 \vee \dots \vee D'_n$. Аналогично зададим в ней координаты циклов. При этом если $X_0 = (\alpha, \beta, 0, \dots, 0)_P$, $K_X = (\gamma, \delta, 0, \dots, 0)_P$ и $X'_0 = (\alpha, \beta, 0, \dots, 0)_{P'}$, то в качестве $K'_{X'}$ условимся выбирать атом $(\gamma, \delta, 0, \dots, 0)_{P'}$.

Рассмотрим отображение χ множества циклов $\mathcal{L}$ в множество циклов $\mathcal{L}'$ такое, что

$$\chi((a, b, c, d, e_1, f_1, \dots, e_n, f_n)_L) = (a, b, c, d, e_1, f_1, \dots, e_n, f_n)_{L'}.$$

Легко заметить, что χ отображает атомы в атомы и циклы высоты 2 в циклы высоты 2. Это связано с тем, что цикл $(a, b, c, d, e_1, \dots, f_n)_L$ является атомом в том и только том случае, когда $a = b = 0$.

Если $S = (a, b, c, d, e_1, \dots, f_n)_L$ – цикл высоты 2, то $S_0 = (0, 0, a, b, 0, \dots, 0)_L$. Поэтому $\chi(S_0) < \chi(S)$. Покажем, что χ – биекция. Так как $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ содержат по одинаковому числу циклов высоты 1 и 2 (а именно, $(p^{(2n+2)m} - 1)/(p^m - 1)$ атомов и $p^{(2n+2)m}(1 + p^m)$ циклов высоты 2), нам достаточно показать, что если S^1 и S^2 – циклы из $\mathcal{L}$ такие, что $\chi(S^1) = \chi(S^2)$, то $S^1 = S^2$. Это очевидно, если S^1 и S^2 – атомы, ведь в этом случае χ индуцирует изоморфизм $[0, P]$ и $[0', P']$. Пусть S^1 и S^2 – циклы высоты 2. Тогда из $\chi(S^1) = \chi(S^2)$ получаем $\chi(S^1_0) = \chi(S^2_0)$, т.е. $S^1_0 = S^2_0 = X_0$. Следовательно, если $X_0 = (\alpha, \beta, 0, \dots, 0)_P$ и $K_X = (\gamma, \delta, 0, \dots, 0)_P$, то

$$S^1 = t(\alpha a, \beta a, \gamma b, \delta b, c_1, \dots, d_n)_L \quad \text{и} \quad S^2 = s(\alpha a_1, \beta a_1, \gamma b_1, \delta b_1, c'_1, \dots, d'_n)_{L'}.$$

Поэтому из $\chi(S^1) = \chi(S^2)$ следует $S^1 = S^2$.

Покажем теперь, что χ сохраняет “коллинеарность”. А именно, если X, Y, Z – циклы из $\mathcal{L}$ и $Z \leq X \vee Y$, то $\chi(Z) \leq \chi(Y) \vee \chi(X)$. Это очевидно в случае, когда какие-либо два из элементов X, Y, Z сравнимы или каждый из них является атомом. Рассмотрим оставшиеся случаи.

Пусть X – цикл высоты 2, Y – атом. Если Z является атомом, то $Z \leq X_0 \vee Y$. Отсюда

$$\chi(Z) \leq \chi(X_0) \vee \chi(Y) \leq \chi(X) \vee \chi(Y).$$

Пусть Z – цикл высоты 2. Тогда, очевидно, $Z_0 = X_0$. Пусть

$$\begin{aligned} X &= (a, b, c_1, \dots, d_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]}, \quad X_0 \vee Y = (0, u, v_1, \dots, w_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]}, \\ Z &= (x, y, z_1, \dots, t_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]}. \end{aligned}$$

Тогда из $Z \leq X \vee Y$ следует, что можно считать $x = a$, $y = b + ku$, $z_i = c_i + kv_i$, $t_i = d_i + kw_i$ для некоторого $k \in \text{GF}(p^m)$. Из построения χ следует, что

$$\chi(X) = (a, b, c_1, \dots, d_n)_{[\chi(X_0), \varphi'(\chi(X_0))]}, \quad \chi(Z) = (x, y, z_1, \dots, t_n)_{[\chi(X_0), \varphi'(\chi(X_0))]}.$$

Если $Y = (p, q, r_1, \dots, s_n)_P$, то $\chi(Y) = (p, q, r_1, \dots, s_n)_{P'}$, и из равенств $u = \alpha q - \beta p$, $v_i = r_i(\alpha\delta - \beta\gamma)$, $w_i = s_i(\alpha\delta - \beta\gamma)$ получаем

$$\chi(X_0) \vee \chi(Y) = (0, u, v_1, \dots, w_n)_{[\chi(X_0), \varphi'(\chi(X_0))]}.$$

Тогда, очевидно, $\chi(Z) \leq \chi(X) \vee \chi(Y)$.

Случай, когда X и Y – циклы высоты 2 и $X \wedge Y \neq 0$, рассматривается аналогично.

Пусть X и Y – циклы высоты 2 и $X \wedge Y = 0$,

$$X = (\alpha a, \beta a, \gamma b, \delta b, c_1, \dots, d_n)_{[X_0, \varphi(X_0)]},$$

$$Y = (\alpha_1 a_1, \beta_1 a_1, \gamma_1 b_1, \delta_1 b_1, c'_1, \dots, d'_n)_{[Y_0, \varphi(Y_0)]}.$$

Так как $l(X) = l(Y) = 2$, то $a \neq 0 \neq a_1$. Из независимости X и Y следует, что $\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 \neq 0$. Из строения $\varphi(X)$ и $\varphi(Y)$ (см. выше) получаем, что $\varphi(X \vee Y) = \vee Z$, где суммирование ведется по всем $Z = (x, y, z_1, \dots, t_n)_P$, для которых выполнено (3) и

$$\alpha_1 a_1 y - \beta_1 a_1 x + \sum_{i=1}^n (c'_i t_i - d'_i z_i) = 0.$$

Ясно, что $\varphi'(\chi(X) \vee \chi(Y))$ задается такими же условиями. Если $Z \leq X \vee Y$, то $\varphi(Z) \geq \varphi(X \vee Y)$. Таким образом, $\varphi'(\chi(Z)) \geq \varphi'(\chi(X) \vee \chi(Y))$, т.е. $\chi(Z) \leq \chi(X) \vee \chi(Y)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Судзуки М. Структура группы и строение структуры ее подгрупп. М.: ИЛ, 1960.
- [2] Яковлев Б. В. Об условиях, при которых решетка изоморфна решетке подгрупп группы // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 6. С. 694–712.
- [3] Анищенко С. А. О представлении некоторых модулярных структур структурами подгрупп // Матем. записки Красноярского госпединститута. 1965. Вып. 1. С. 1–21.
- [4] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.
- [5] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
- [6] Кертеси Ф. Введение в конечные геометрии. М.: Наука, 1980.
- [7] Jonsson B., Monk G. S. Representations of primary arguesian lattices // Pacific J. Math. 1969. V. 30. № 1. P. 95–139.
- [8] Monk G. S. Desargues law and the representation of primary lattices // Pacific J. Math. 1969. V. 30. № 1. P. 175–186.
- [9] Антонов В. А. Об одном классе модулярных решеток конечной длины // Алгебра и логика. 1991. Т. 30. № 1. С. 3–14.
- [10] Антонов В. А. Правильные C -решетки и решетки централизаторов // Вестн. Челябинского ун-та. Сер. матем., мех. 1994. Т. 2. № 1. С. 17–28.
- [11] Антонов В. А. Группы типа Гашюца и близкие к ним группы // Матем. заметки. 1980. Т. 27. № 6. С. 839–857.

Челябинский государственный технический университет

Поступило
19.12.95