Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Войнова, Л. С. Ефремова, О динамике простейших отображений дендритов, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 183–195

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 10:56:06

УДК 515.122

О ДИНАМИКЕ ПРОСТЕЙШИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЕНДРИТОВ

М. И. Войнова, Л. С. Ефремова

Введено понятие простейшего отображения дендрита в себя. Указаны арифметические соотношения между периодами периодических точек; установлена структура ω -предельных множеств, множеств периодических и неблуждающих точек; показано, что топологическая энтропия простейших отображений равна 0. Приведены примеры, иллюстрирующие различия в энтропийных свойствах непрерывных отображений дендритов со счетным множеством точек ветвления и непрерывных отображений их ретрактов – конечных деревьев.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Непрерывным отображениям отрезка и окружности посвящена обширная литература. Так, в [1]–[10] рассматривались вопросы сосуществования периодов периодических точек, влияния арифметических соотношений между периодами на топологическую энтропию, изучалась структура неблуждающего множества. Одно из направлений естественного развития этих исследований связано с обобщением указанных результатов на случай непрерывных отображений конечных графов [11]–[15].

В настоящей заметке рассмотрен класс топологических пространств (дендритов), которые допускают не только конечное, но и счетное множество точек ветвления и обладают свойством дугообразной связности.

Сформулируем необходимые определения и напомним основные свойства дендритов (см. [16, гл. 6, § 51]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Дендритом* называется локально связный континуум (компактное связное метрическое пространство), не содержащий подмножеств, гомеоморфных окружности.

Под *дугой* в дендрите X будем понимать множество, гомеоморфное промежутку на прямой. Одноточечное множество отнесем к классу дуг, считая его вырожденной дугой.

СВОЙСТВО 1 (дугообразная связность). *Всякую пару точек $x \neq y$ в дендрите X можно соединить единственной дугой, имеющей в качестве концов точки x и y .*

В дальнейшем символом $\gamma(x, y)$ будем обозначать дугу с концами в точках x и y , содержащую эти точки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01755.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X – произвольный континуум, n – порядковое число ω множества целых неотрицательных чисел в их естественном порядке или кардинальное число $\leq c$ (c – мощность континуума). Говорят, что *порядок точки x не превосходит n* ($\text{ord } x \leq n$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует δ -окрестность $U_\delta(x)$ точки x при $0 < \delta < \varepsilon$ такая, что $\text{card}(\partial U_\delta(x)) \leq n$, где $\partial(\cdot)$ – граница множества, а $\text{card}(\cdot)$ – мощность множества. Равенство $\text{ord } x = n$ означает, что $\text{ord } x \leq n$ и соотношение $\text{ord } x \leq m$ не имеет места ни при каком $m \leq n$.

Свойство 2 (регулярность). *Всякий дендрит X есть регулярный континуум, т.е. любая точка $x \in X$ имеет порядок $\leq \omega$.*

Таким образом, всякий подконтинуум дендрита есть дендрит. Дополним свойство регулярности следующими утверждениями.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X – дендрит, содержащий более одной точки. Тогда в X существуют точки первого порядка, называемые концевыми; всюду плотны точки второго порядка; существует не более чем счетное множество точек ветвления (точек порядка большего 2).*

В дальнейшем будем обозначать через $E(X)$ множество концевых точек, а через $R(X)$ – множество точек ветвления дендрита X .

ТЕОРЕМА 2. *Если X – дендрит и для некоторой точки $x \in X$ число компонент множества $X \setminus \{x\}$ конечно, то это число совпадает с $\text{ord } x$.*

Свойство 3. *Пусть X – дендрит, а Y – собственный подконтинуум X . Тогда любая компонента U открытого множества $X \setminus Y$ имеет в X единственную граничную точку $u \in Y$ ($\partial U = u$).*

В настоящей заметке рассматривается класс D дендритов, обладающих следующими свойствами: для любого $X \in D$

- 1) $R(X)$ – замкнутое множество;
- 2) каково бы ни было $x \in R(X)$, число компонент множества $X \setminus \{x\}$ конечно.

Из теорем 1, 2 следует, что если $X \in D$ имеет точки ветвления, то $R(X)$ – разреженное множество, и для любого $x \in R(X)$ число компонент множества $X \setminus \{x\}$ совпадает с $\text{ord } x$, где $\text{ord } x \geq 3$.

Условимся обозначать через $X_i(x)$, $1 \leq i \leq \text{ord } x$, компоненты множества $X \setminus \{x\}$, где x – произвольная точка ветвления X . Приведем необходимые примеры дендритов из множества D .

ПРИМЕР 1. n -од $X = \{z \in \mathbb{C} : z^n \in [0, 1]\}$, где $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $n \geq 3$, имеет единственную точку ветвления O , причем $\text{ord } O = n$.

ПРИМЕР 2. В пространстве $\mathbb{R}^3$, снабженном прямоугольной декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$, укажем дендрит $X \in D$ со счетным множеством точек ветвления. Возьмем произвольную последовательность натуральных чисел $3 \leq n_0 \leq n_1 < \dots < n_j < \dots$. Обозначим через $X_0^{(n_j)}$ n -од в плоскости $x_3 = 0$, где $n = n_j$, $j \geq 0$. Положим

$$X^{(n_j)} = \begin{cases} X_0^{(n_0)} & \text{при } j = 0, \\ \left\{ \left(\frac{x_1}{j}, \frac{x_2}{j}, \frac{1}{j} \right) : (x_1, x_2, 0) \in X_0^{(n_j)} \right\} & \text{при } j \geq 1. \end{cases}$$

Определим дендрит

$$X = X^{(0)} \cup \bigcup_{j=0}^{+\infty} X^{(n_j)}, \quad \text{где } X^{(0)} = \{(0, 0, x_3) : x_3 \in [0, 1]\}.$$

Здесь $R(X) = \{(0, 0, 0)\} \cup \{(0, 0, 1/j)\}_{j \geq 1}$ – замкнутое множество, $\{\text{ord } x\}_{x \in R(X)}$ – неограниченное множество, а $\text{ord } O = n_0 + 1$.

2. Простейшие отображения. Свойства. Формулировки основных результатов. Введем понятие простейшего отображения дендрита в себя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть X – дендрит. Отображение $f: X \rightarrow X$ назовем *простейшим*, если f непрерывно и полный прообраз любой дуги из $f(X)$ есть дуга в X .

Обратим внимание на то, что каждое простейшее отображение является монотонным, в то время как для дендритов с непустым множеством точек ветвления существуют монотонные, но не простейшие, отображения (определение монотонного отображения произвольного связного топологического пространства см. в [16, с. 140]).

Обозначим через $P^0(X)$ множество всех простейших отображений дендрита $X \in D$ в себя. Каково бы ни было $f \in P^0(X)$, при любом $i \geq 1$ $f^i \in P^0(X)$. Укажем, что пример простейшего отображения доставляет поворот n -ода X ($n \geq 3$) на угол $2\pi/n$ с неподвижной точкой O .

Приведенные выше определения позволяют сформулировать основные результаты работы. Произвольное непрерывное отображение дендрита в себя имеет неподвижную точку [17]. Поэтому множество $\text{Per}(f)$ периодических точек отображения $f \in P^0(X)$ непусто. Обозначим через $T(f)$ множество периодов периодических точек отображения $f \in P^0(X)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in P^0(X)$, а $T(f)$ – неограниченное множество. Тогда множество $R(X)$ точек ветвления X счетно.

Наряду со структурой множества периодических точек мы опишем структуру ω -предельного множества $\omega(x, f)$ траектории произвольной точки $x \in X$, множества неблуждающих точек $\Omega(f)$ и топологическую энтропию $h(f)$ отображения $f \in P^0(X)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in P^0(X)$. Тогда

- 1) множество $\text{Per}(f)$ замкнуто;
- 2) для любого $x \in X$ $\omega(x, f)$ – периодическая орбита;
- 3) $\Omega(f) = \bigcup_{x \in X} \omega(x, f) = \text{Per}(f)$;
- 4) $h(f) = 0$.

ТЕОРЕМА 5. 1) Каково бы ни было натуральное число $m \geq 1$, существуют дендрит $X \in D$ со счетным множеством точек ветвления и непрерывное отображение $f: X \rightarrow X$ такое, что

$$h(f) = 0, \quad T(f) = \{1, m, 2m, \dots, jm, \dots\}, \quad j \geq 1.$$

2) Каково бы ни было простое число p , существуют дендрит $X \in D$ со счетным множеством точек ветвления и непрерывное отображение $f: X \rightarrow X$ такое, что

$$h(f) = 0, \quad T(f) = \{p^j\}_{j \geq 0}.$$

Теорема 5 выявляет принципиальные различия в свойствах непрерывных отображений дендритов со счетным множеством точек ветвления и непрерывных отображений их ретрактов – конечных деревьев. Так, произвольное непрерывное отображение конечного дерева в себя имеет множество $T(f)$, содержащее натуральные числа вида $\{mj\}$ при некотором $m \geq 1$ и любом $j \geq 1$, в том и только том случае, когда $h(f) > 0$ [15].

Вопрос Ллибре–Мисюревича о существовании непрерывных отображений, заданных на конечных деревьях, имеющих нулевую топологическую энтропию и множество периодов периодических точек вида $\{p^j\}_{j \geq 0}$, где p – простое число [14], в настоящее время остается открытым.

Для доказательства теорем 3–5 потребуется ряд свойств простейших отображений.

ЛЕММА 1. *Если $f \in P^0(X)$, то для любых точек $x, y \in X$ выполнено равенство $f(\gamma(x, y)) = \gamma(f(x), f(y))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 1 справедливо, если $Y = f(\gamma(x, y))$ – одноточечное множество. Предположим, что Y содержит более одной точки. Тогда $\gamma(x, y)$ – невырожденная дуга. Из компактности X , непрерывности f и свойства 2 следует, что Y – дендрит. Используя определение 3 и свойство 1 дугообразной связности Y , немедленно получаем, что если существует точка $z \in \gamma(x, y) \setminus \{x, y\}$ такая, что $f(z) \in E(Y)$, то выполнено одно из равенств: $f(z) = f(x)$ или $f(z) = f(y)$. Таким образом, $\text{card } E(Y) = 2$, и $Y = \gamma(f(x), f(y))$. Лемма 1 доказана.

Возьмем произвольную периодическую точку x^0 периода $m \geq 1$ отображения $f \in P^0(X)$. Обозначим через $\text{Orb}(x^0, f)$ периодическую орбиту, порожденную точкой x^0 :

$$\text{Orb}(x^0, f) = \{x^0, \dots, x^{m-1}\}, \quad \text{где } x^i = f^i(x^0), \quad 0 \leq i \leq m-1.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $f \in P^0(X)$, $x^0 \in \text{Per}(f)$, m – период x^0 . Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *существует дуга в X , содержащая $\text{Orb}(x^0, f)$;*
- 2) *$m = 1$ или 2.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $f \in P^0(X)$, то $R(X)$ – инвариантное множество.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть $f \in P^0(X)$, а дендрит X гомеоморфен n -оду при некотором $n \geq 3$. Тогда единственная точка ветвления X является неподвижной точкой f .*

ЛЕММА 2. *Пусть $f \in P^0(X)$, а $R(X) \neq \emptyset$. Тогда $R(X) \cap \text{Per}(f) \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инвариантность и замкнутость непустого множества $R(X)$ влекут справедливость включения $\omega(x, f) \subset R(X)$ для ω -предельного множества траектории произвольной точки $x \in R(X)$. Так как $R(X)$ не более чем счетно, получаем, что и $\omega(x, f)$ не более чем счетно. Тогда в силу [18] $\omega(x, f) \cap \text{Per}(f) \neq \emptyset$. Лемма 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть $f \in P^0(X)$, $z^0 \in R(X) \cap \text{Per}(f)$, $m \geq 1$ – период z^0 . Если для некоторой точки $x^0 \in X_{i_1}(z^0)$ справедливо $f^m(x^0) \in X_{i_2}(z^0)$ (i_1, i_2 – произвольные натуральные числа, $1 \leq i_1, i_2 \leq \text{ord } z^0$), то для любой точки $x \in \overline{X_{i_1}(z^0)}$ выполнено $f^m(x) \in \overline{X_{i_2}(z^0)}$, здесь черта означает замыкание множества.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что найдутся компонента $X_{i_1}(z^0)$, $1 \leq i_1 \leq \text{ord } z^0$, и различные точки $x^0, x \in X_{i_1}(z^0)$ такие, что

$$f^m(x^0) \in X_{i_2}(z^0), \quad f^m(x) \in X_{i_3}(z^0), \quad \text{где } i_2 \neq i_3, \quad 1 \leq i_2, i_3 \leq \text{ord } z^0. \quad (1)$$

Тогда $z^0 \in \gamma(f^m(x^0), f^m(x)) = f^m(\gamma(x^0, x))$. Поэтому полный прообраз $f^{-m}(z^0)$ точки z^0 , наряду с z^0 , содержит и некоторую точку $z \in \gamma(x^0, x)$. Так как невырожденная дуга $\gamma(z^0, z)$ содержит одну из точек x или x^0 , из (1) и свойства дугообразной связности дендрита X следует, что $f^{-m}(z^0)$ не является дугой. Полученное противоречие с $f \in P^0(X)$ доказывает следствие 4.

Аналогично следствию 4 доказывается

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $f \in P^0(X)$, $z^0 \in R(X) \cap \text{Per}(f)$, $m \geq 1$ – период z^0 . Тогда для любых различных i_1, i_2 , $1 \leq i_1, i_2 \leq \text{ord } z^0$, справедливо

$$f^m(\overline{X_{i_1}(z^0)}) \cap f^m(\overline{X_{i_2}(z^0)}) = \{z^0\}.$$

Пусть $\gamma(z^0, y^0)$ – произвольная невырожденная дуга в дендрите X , $\varphi: [0, 1] \rightarrow \gamma(z^0, y^0)$ – гомеоморфизм. Тогда φ порождает на $\gamma(z^0, y^0)$ отношение порядка “ $\prec_\varphi$ ” (φ -предшествует).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Каковы бы ни были различные точки $x', x'' \in \gamma(z^0, y^0)$, будем говорить, что $x' \prec_\varphi x''$, если $\varphi^{-1}(x') < \varphi^{-1}(x'')$, где “ $<$ ” – естественное отношение порядка на отрезке $[0, 1]$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $f \in P^0(X)$, $z^0 \in R(X) \cap \text{Per}(f)$, $m \geq 1$ – период z^0 . Тогда каковы бы ни были компонента $X_i(z^0)$ множества $X \setminus \{z^0\}$, $1 \leq i \leq \text{ord } z^0$, и периодическая точка $x^0 \notin \text{Orb}(z^0, f)$, любая невырожденная дуга $\gamma(z^0, z) \subset \overline{X_i(z^0)}$ содержит не более одной точки периодической орбиты $\text{Orb}(x^0, f^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют компонента $X_i(z^0)$ множества $X \setminus \{z^0\}$, $1 \leq i \leq \text{ord } z^0$, периодическая точка $x^0 \notin \text{Orb}(z^0, f)$ и невырожденная дуга $\gamma(z^0, z) \subset \overline{X_i(z^0)}$ такая, что $\gamma(z^0, z)$ содержит не менее двух точек периодической орбиты $\text{Orb}(x^0, f^m)$. Пусть точка $y^0 \in \text{Orb}(x^0, f^m) \cap \gamma(z^0, z)$ такова, что при некотором $m_0 \geq 1$ $y^{m m_0} = f^{m m_0}(y^0) \in \gamma(z^0, y^0) \setminus \{z^0, y^0\}$, а гомеоморфизм $\varphi: [0, 1] \rightarrow \gamma(z^0, y^0)$ удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(0) = z^0$, $\varphi(1) = y^0$. Тогда в силу леммы 1 и определения 4 дуга $\gamma(z^0, y^0)$ инвариантна относительно $f^{m m_0}$ и

$$z^0 \prec_\varphi \dots \prec_\varphi y^{(j+1)m m_0} \prec_\varphi y^{j m m_0} \prec_\varphi \dots \prec_\varphi y^{m m_0} \prec_\varphi y^0, \quad \text{где } j \geq 1.$$

Последнее противоречит тому, что $y^0 \in \text{Per}(f)$. Следствие 6 доказано.

3. Сосуществование периодов периодических точек простейших отображений. Доказательство теоремы 3. Мы начнем с рассмотрения арифметических соотношений между периодами периодических точек простейших отображений n -ода X ($n \geq 3$). Занумеруем каким-либо образом компоненты множества $X \setminus \{O\}$ (например, обозначив через X_i ту компоненту множества $X \setminus \{O\}$, точки которой имеют угловую координату $2\pi(i-1)/n$, $1 \leq i \leq n$).

В силу следствий 3 и 6 справедлива

ЛЕММА 3. Пусть $f \in P^0(X)$, где X — n -од ($n \geq 3$). Тогда для любой периодической орбиты $\text{Orb}(x^0, f)$ периода $m > 1$ выполнено неравенство $m \leq n$, причем точки $\text{Orb}(x^0, f)$ располагаются на m компонентах множества $X \setminus \{O\}$.

Для произвольной периодической орбиты $\text{Orb}(x^0, f)$ периода $m > 1$ введем в рассмотрение индексное множество

$$I(\text{Orb}(x^0, f)) = \{i : \text{Orb}(x^0, f) \cap X_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n\}.$$

Из леммы 3 следует, что $\text{card } I(\text{Orb}(x^0, f)) = m$.

В силу следствий 4, 6 справедлива

ЛЕММА 4. Пусть X — n -од ($n \geq 3$), $\text{Orb}(x^0, f)$ и $\text{Orb}(x_1^0, f)$ — периодические орбиты отображения $f \in P^0(X)$ периодов m_1 и m_2 соответственно, причем $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 > 1$. Тогда $I(\text{Orb}(x^0, f)) \cap I(\text{Orb}(x_1^0, f)) = \emptyset$.

Определим модельное отображение $\tau: X \rightarrow X$, которое будем называть *связкой поворотов* n -ода X ($n \geq 3$). Для этого зададим произвольно r натуральных чисел m_j , $1 \leq j \leq r$, так чтобы $\sum_{j=1}^r m_j = n$. Разобьем X на r подмножеств

$$L^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{m_j} \overline{X_i^{(j)}}, \quad 1 \leq j \leq r,$$

где компоненты $X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_{m_j}^{(j)}$ множества $X \setminus \{O\}$ попарно различны, и

$$L^{(j_1)} \cap L^{(j_2)} = \{O\}, \quad j_1 \neq j_2, \quad 1 \leq j_1, j_2 \leq r.$$

Потребуем, чтобы при любом $x \in X$ выполнялось равенство $\rho(x, O) = \rho(\tau(x), O)$, где ρ — метрика в X . При каждом j , $1 \leq j \leq r$, положим $\tau(\overline{X_{m_j}^{(j)}}) = \overline{X_1^{(j)}}$. Если $m_j > 1$, то каково бы ни было i , $1 \leq i \leq m_j - 1$, положим $\tau(\overline{X_i^{(j)}}) = \overline{X_{i+1}^{(j)}}$.

Подчеркнем, что $\tau \in P^0(X)$ однозначно определяется разбиением множества компонент $X \setminus \{O\}$ на r подмножеств $\{X_1^{(j)}, \dots, X_{m_j}^{(j)}\}_{j=1}^r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Конечное упорядоченное множество M , элементами которого являются натуральные числа, будем называть *допустимым*, если существует простейшее отображение n -ода X ($n \geq 3$) в себя, множество периодов периодических точек которого совпадает с M .

Введение понятия допустимого множества позволяет свести задачу сосуществования периодов периодических точек простейших отображений n -ода к задаче описания совокупности всех допустимых множеств. В такой постановке задача сосуществования периодов периодических точек непрерывных отображений n -ода ранее не рассматривалась (ср., например, с [11], [13]).

ТЕОРЕМА 6. Конечное упорядоченное множество $M = \{m_1, \dots, m_r\}$, где $m_1 < \dots < m_r$ при $r > 1$, допустимо в том и только том случае, когда

$$m_1 = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=2}^r m_j \leq n \quad \text{при} \quad r > 1. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть множество M допустимо, а отображение $f \in P^0(X)$ (X — это n -од, $n \geq 3$) таково, что $T(f) = M$. Тогда в силу следствия 3, леммы 3 и 4 выполнено (2).

2) Пусть выполнено (2). Покажем, что множество M , состоящее из натуральных чисел $m_1, \dots, m_r$ ($m_1 < \dots < m_r$ при $r > 1$) допустимо. Положим

$$r^* = n - \sum_{j=2}^r m_j, \quad r^* \geq 0.$$

Построим разбиение n -ода X ($n \geq 3$) на $r - 1 + r^*$ подмножеств $L^{(j)}$, $2 \leq j \leq r + r^*$, где

$$L^{(j)} = \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{m_j} \overline{X_i}, & j = 2, \\ \bigcup_{i=1}^{m_j} \overline{X_{l+i}}, & l = \sum_{p=2}^{j-1} m_p, \quad 3 \leq j \leq r. \end{cases}$$

Если $r^* > 0$, то при каждом j , $r < j \leq r + r^*$, положим

$$L^{(j)} = \overline{X_{l+j-r}}, \quad l = \sum_{p=2}^r m_p.$$

Указанное разбиение n -ода X однозначно определяет связку поворотов $\tau \in P^0(X)$ такую, что $T(\tau) = M$. Теорема 6 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7. *Каковы бы ни были натуральное число $n \geq 3$ и допустимое множество M , справедливо следующее неравенство:*

$$\text{card } M \leq \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{9 + 8n}}{2} \right\rfloor,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа.

Отметим, что оценка мощности допустимого множества M , указанная в следствии 7, не улучшаема.

Перейдем к рассмотрению простейших отображений дендрита $X \in D$ с произвольным конечным множеством точек ветвления.

ЛЕММА 5. *Пусть $f \in P^0(X)$, где $X \in D$ — произвольный дендрит с непустым конечным множеством точек ветвления $R(X)$. Тогда $R(X)$ состоит из периодических траекторий отображения f .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 5 справедливо, если $\text{card } R(X) = 1$ (следствие 3). Пусть $\text{card } R(X) \geq 2$. Покажем, что $R(X) \setminus \text{Per}(f) = \emptyset$. Предположим противное. Так как $R(X) \cap \text{Per}(f) \neq \emptyset$ (лемма 2) и $R(X)$ конечно, при сделанном предположении найдутся точки $z^0 \in R(X) \cap \text{Per}(f)$ периода $m \geq 1$ и $z_1^0 \in R(X) \setminus \text{Per}(f)$ такие, что $f^m(z_1^0) = z^0$. Так как $\text{ord } z_1^0 \geq 3$, в X существуют две различные невырожденные дуги $\gamma(x, z_1^0)$ и $\gamma(y, z_1^0)$, имеющие друг с другом и дугой $\gamma(z_1^0, z^0)$ единственную общую концевую точку z_1^0 . Поэтому $\gamma(x, z_1^0) \cup \gamma(y, z_1^0)$ есть дуга $\gamma(x, y)$. В силу леммы 1 $f^m(\gamma(z^0, z_1^0)) = \{z^0\}$, $f^m(\gamma(x, y)) = \gamma(f^m(x), f^m(y))$, причем $z^0 \in \gamma(f^m(x), f^m(y))$.

Отсюда следует, что полный прообраз $f^{-m}(\gamma(f^m(x), f^m(y)))$ дуги $\gamma(f^m(x), f^m(y))$ содержит дендрит $\gamma(z^0, z_1^0) \cup \gamma(x, y)$, гомеоморфный триоду. Последнее противоречит тому, что $f \in P^0(X)$. Лемма 5 доказана.

Пусть множество $T(f|R(X))$ периодов периодических точек сужения f на $R(X)$ состоит из натуральных чисел $m_1^0, \dots, m_k^0$, $k \geq 1$, причем $m_1^0 < \dots < m_k^0$ при $k > 1$. Обозначим через $z^0(m_j^0)$ точку множества $R(X)$ с периодом m_j , $1 \leq j \leq k$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $f \in P^0(X)$, где $X \in D$ – произвольный дендрит с непустым конечным множеством точек ветвления $R(X)$. Тогда $m_1^0 < 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $m_1^0 \geq 3$. В силу леммы 1 и следствия 1

$$Y = \bigcup_{i=0}^{m_1^0-2} \gamma(z^i(m_1^0), z^{i+1}(m_1^0))$$

есть инвариантный дендрит с непустым конечным множеством точек ветвления (здесь $z^i(m_1^0) = f^i(z^0(m_1^0))$, $0 \leq i \leq m_1^0 - 1$). Тогда непустое множество $R(Y)$ содержит не более чем $m_1^0 - 1$ точку. Отсюда, используя лемму 5, получаем, что в $R(Y) \subseteq R(X)$ существует периодическая точка периода $\leq m_1^0 - 1$. Последнее невозможно. Следствие 8 доказано.

С каждой точкой $z^0(m_j^0) \in R(X)$ свяжем континуум $X^{(n)}(z^0(m_j^0)) \subset X$, имеющий единственную точку ветвления $z^0(m_j^0)$ и гомеоморфный n -оду при $n = \text{ord } z^0(m_j^0)$, $1 \leq j \leq k$. При этом компонента $X_i(z^0(m_j^0))$, $1 \leq i \leq \text{ord } z^0(m_j^0)$, множества $X \setminus \{z^0(m_j^0)\}$ является также и компонентой множества $X^{(n)}(z^0(m_j^0)) \setminus \{z^0(m_j^0)\}$, если $R(X) \cap X_i(z^0(m_j^0)) = \emptyset$. В противном случае компонентой множества $X^{(n)}(z^0(m_j^0)) \setminus \{z^0(m_j^0)\}$ служит дуга $X_i^{(n)}(z^0(m_j^0))$ из $X_i(z^0(m_j^0))$ такая, что $\text{card}(R(X) \cap X_i^{(n)}(z^0(m_j^0))) = 2$, а концевыми точками $X_i^{(n)}(z^0(m_j^0))$ являются точки множества $R(X)$, причем $z^0(m_j^0)$ – одна из этих точек. В силу леммы 1, следствий 4 и 5

$$f^{m_j^0}|X^{(n)}(z^0(m_j^0)) \in P^0(X^{(n)}(z^0(m_j^0))).$$

Следовательно, корректно определено допустимое множество $M(z^0(m_j^0))$, связанное с континуумом $X^{(n)}(z^0(m_j^0))$, где $n = n(z^0(m_j^0)) = \text{ord } z^0(m_j^0)$, $1 \leq j \leq k$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f \in P^0(X)$, где $X \in D$ – произвольный дендрит с непустым конечным множеством $R(X)$. Тогда

- 1) при $k > 1$ для любого j , $1 \leq j \leq k - 1$, найдется допустимое множество $M(z^0(m_j^0))$, связанное с некоторым континуумом $X^{(n)}(z^0(m_j^0))$, такое, что $m_{j+1}^0 \in m_j^0 \cdot M(z^0(m_j^0))$;
- 2) какова бы ни была компонента $X_i(z^0(m_j^0))$ множества $X \setminus \{z^0(m_j^0)\}$, не содержащая точек ветвления X , для произвольной точки $z \in \text{Per}(f) \cap X_i(z^0(m_j^0))$ периода $t = t(z)$, где $1 \leq j \leq k$, $1 \leq i \leq \text{ord } z^0(m_j^0)$, существует допустимое множество $M(z^0(m_j^0))$, связанное с некоторым континуумом $X^{(n)}(z^0(m_j^0))$, такое, что $t \in m_j^0 \cdot M(z^0(m_j^0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X^{(n)}(z^0(m_j^0))$, $1 \leq j \leq k$, – произвольный определенный выше континуум в X . При $m_j^0 = m_1^0 = 1$ $f|X^{(n)}(z^0(1)) \in P^0(X^{(n)}(z^0(1)))$. Тогда множество $T(f|X^{(n)}(z^0(1)))$ допустимо, и для каждой периодической точки из $X^{(n)}(z^0(1))$ справедливо утверждение теоремы 7. Рассмотрим случай $m_j^0 \geq 2$. Возьмем произвольную точку $z \in \text{Per}(f) \cap X^{(n)}(z^0(m_j^0))$ такую, что $z \notin \gamma(z^p(m_j^0), z^q(m_j^0))$ при любых $p \neq q$, $0 \leq p, q \leq m_j^0 - 1$. Тогда в силу лемм 1, 3, 5 и следствия 5 каждая точка $z^s = f^s(z)$, $1 \leq s \leq m_j^0 - 1$, обладает следующими свойствами:

- 1) $z^s \notin X^{(n)}(z^0(m_j^0))$, но $z^s \in X^{(n(s))}(z^s(m_j^0))$, где $n(s) = \text{ord } z^s(m_j^0)$;
- 2) $\text{card } I(\text{Orb}(z^s, f^{m_j^0})) = \text{card } I(\text{Orb}(z, f^{m_j^0}))$.

Свойство 1) влечет за собой выполнение неравенства $m(z) \geq m_j^0$. Так как

$$f^{m_j^0}|X^{(n)}(z^0(m_j^0)) \in P^0(X^{(n)}(z^0(m_j^0))),$$

найдется допустимое множество $M(z^0(m_j^0))$ такое, что

$$\text{card } I(\text{Orb}(z, f^{m_j^0})) \in M(z^0(m_j^0)).$$

Используя свойство 2), получаем отсюда, что $m(z) \in m_j^0 \cdot M(z^0(m_j^0))$.

Утверждение 2) теоремы 7 справедливо в силу сказанного выше. Пусть $k > 1$, $1 \leq j \leq k - 1$. Возьмем произвольную точку $z^0(m_{j+1}^0) \in R(X)$. Быть может, найдется континуум $X^{(n)}(z^0(m_j^0))$, содержащий $z^0(m_{j+1}^0)$. Так как $m_{j+1}^0 > m_j^0$, используя лемму 4, получаем, что $z^0(m_{j+1}^0) \notin \gamma(z^p(m_j^0), z^q(m_j^0))$ при любых $p \neq q$, $0 \leq p, q \leq m_j^0 - 1$. Следовательно, $m_{j+1}^0 \in m_j^0 \cdot M(z^0(m_j^0))$. Предположим, что не существует континуума $X^{(n)}(z^0(m_j^0))$, содержащего $z^0(m_{j+1}^0)$. Тогда каждая дуга $\gamma(z^0(m_j^0), z^0(m_{j+1}^0))$ содержит более двух точек из $R(X)$. Выберем дугу $\gamma(z^0(m_j^0), z^0(m_{j+1}^0))$ так, чтобы она не содержала точек $\text{Orb}(z^0(m_j^0), f)$, отличных от $z^0(m_j^0)$. Определим инвариантный относительно $f^{m_j^0}$ континуум

$$X^* = \bigcup_{s=0}^{s^*-1} f^{sm_j^0}(\gamma(z^0(m_j^0), z^0(m_{j+1}^0))),$$

здесь $s^*m_j^0$ – наименьшее общее кратное m_j^0 и m_{j+1}^0 . Укажем, что X^* либо не содержит точек ветвления, либо имеет единственную точку ветвления $z^0(m_j^0)$. Кроме того, $f^{m_j^0}|X^* \in P^0(X^*)$. В силу выбора дуги $\gamma(z^0(m_j^0), z^0(m_{j+1}^0))$, леммы 4 и неравенства $m_{j+1}^0 > m_j^0$ для произвольной точки $z \in \text{Per}(f) \cap \gamma(z^0(m_j^0), z^0(m_{j+1}^0))$, $z \neq z^0(m_j^0)$, справедливо

$$I(\text{Orb}(z, f^{m_j^0})) = I(\text{Orb}(z^0(m_{j+1}^0), f^{m_j^0})), \quad \text{card } I(\text{Orb}(z, f^{m_j^0})) > 1,$$

где под $I(\cdot)$ понимается индексное множество периодической орбиты относительно X^* . Пусть точка $z \in R(X) \cap \gamma(z^0(m_j^0), z^0(m_{j+1}^0))$ такова, что дуга $\gamma(z^0(m_j^0), z)$ не содержит точек ветвления X , отличных от $z^0(m_j^0)$ и z . Тогда $\gamma(z^0(m_j^0), z) \subset X^{(n)}(z^0(m_j^0))$ и $z \notin \gamma(z^p(m_j^0), z^q(m_j^0))$ при любых $p \neq q$, $0 \leq p, q \leq m_j^0 - 1$. Следовательно, $m(z) = m_{j+1}^0 \in m_j^0 \cdot M(z^0(m_j^0))$. Теорема 7 доказана.

Теоремы 6, 7, лемма 4 и следствие 8 содержат полную информацию об арифметических соотношениях между периодами периодических точек простейших отображений дендритов из класса D с непустым конечным множеством точек ветвления.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $f \in P^0(X)$, где $X \in D$ – произвольный дендрит с непустым конечным множеством точек ветвления. Тогда $T(f)$ – ограниченное множество.

Таким образом, если $f \in P^0(X)$, а $T(f)$ неограничено, то множество $R(X)$ счетно. Теорема 3 доказана.

4. Доказательство теорем 4 и 5. Начнем с доказательства теоремы 4. Обратим внимание на то, что если множество $R(X)$ счетно, то наряду с периодическими точками отображения $f \in P^0(X)$, $R(X)$ может содержать и непериодические точки f .

ЛЕММА 6. Пусть $f \in P^0(X)$, а $z \in R(X) \setminus \text{Per}(f)$. Тогда не более двух компонент множества $X \setminus \{z\}$ содержат периодические точки f .

Действительно, предположив противное, немедленно получаем, что $z \in \text{Per}(f)$.

Обозначим через $\text{Pois}(f)$ множество устойчивых по Пуассону точек отображения $f \in P^0(X)$.

ЛЕММА 7. Пусть $f \in P^0(X)$, а x^0 – предельная точка множества $\text{Per}(f)$. Тогда $x^0 \in \text{Pois}(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если существует последовательность $\{x_j\}_{j \geq 1} \subset \text{Per}(f)$, сходящаяся к x^0 , и такая, что множество $\{m(x_j)\}_{j \geq 1}$ ограничено, где $m(x_j)$ – (наименьший) период точки x_j , то в силу непрерывности f $x^0 \in \text{Per}(f)$.

2) Будем предполагать, что какова бы ни была последовательность $\{x_j\}_{j \geq 1} \subset \text{Per}(f)$, состоящая из попарно различных точек и сходящаяся к x^0 , множество $\{m(x_j)\}_{j \geq 1}$ неограничено, а $x^0 \notin \text{Per}(f)$. В силу теоремы 3 множество $R(X)$ счетно. Предположим, что $x^0 \notin R(X)$. Зафиксируем произвольное $z^0 \in R(X) \cap \text{Per}(f)$. Тогда найдется компонента $X_i(z^0)$ множества $X \setminus \{z^0\}$, $1 \leq i \leq \text{ord } z^0$, содержащая x^0 . Так как $R(X)$ – замкнутое множество в метрическом пространстве X , при сделанном предположении существует окрестность $U(x^0)$ точки x^0 такая, что $\text{card}(\partial U(x^0)) \leq 2$ и $U(x^0)$ – невырожденная дуга. Имеем $\{x_j\}_{j \geq j_0} \subset U(x^0)$ при некотором $j_0 \geq 1$. Возьмем произвольные $j_1, j_2, j_2 > j_1 \geq j_0$. Предположим для определенности, что $x_{j_2} \in \gamma(x_{j_1}, x^0)$. Так как в $U(x^0)$ нет точек ветвления X , то $\gamma(z^0, x_{j_1}) \cup \gamma(x_{j_1}, x^0)$ есть дуга $\gamma(z^0, x^0)$, содержащая x_{j_2} . Пусть m – наименьшее общее кратное чисел $m(z^0)$, $m(x_{j_1})$ и $m(x_{j_2})$. Тогда ввиду отсутствия точек ветвления в $U(x^0)$ для некоторой дуги $\gamma(z^0, z) \subset \overline{X_i(z^0)}$ справедливо $x_{j_1}, x_{j_2}, x^0, f^m(x^0) \in \gamma(z^0, z)$, здесь

$$z = \begin{cases} x^0, & \text{если } f^m(x^0) \in \gamma(x_{j_2}, x^0), \\ f^m(x^0), & \text{если } x^0 \in \gamma(x_{j_2}, f^m(x^0)). \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $\gamma(z^0, z)$ содержит не менее двух точек $\text{Orb}(x_j, f^m)$ произвольной точки $x_j \in \gamma(x_{j_2}, x^0)$. Это противоречит следствию 6, следовательно, $x^0 \in R(X)$.

3) Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\{y_j\}_{j=1}^{p_0} \subset \text{Per}(f)$, а $O(Y) = \{\text{Orb}(y_j, f)\}_{j=1}^{p_0}$ – конечная $(\varepsilon/3)$ -сеть компакта $\overline{\text{Per}(f)}$, содержащая не менее двух различных точек. Определим инвариантный континуум

$$Y = \bigcup_{y', y'' \in O(Y)} \gamma(y', y'').$$

Тогда множество точек ветвления Y не более чем конечно, и в силу части 2) доказательства $Y \neq X$. Из свойства 3, леммы 6 и следствия 9 вытекает, что существует компонента

U открытого множества $X \setminus Y$ и натуральное число $j^0 \geq 1$ такие, что $\{x_j\}_{j \geq j^0} \subset U$, $x^0 \in U$, $u = \partial U \in \text{Per}(f) \cap Y$. Последнее вместе с леммой 1 и следствием 4 влечет существование натурального $m = m(\varepsilon)$ такого, что m кратно (наименьшему) периоду точки u , и справедливо включение

$$f^m(U) \subset \overline{U}. \quad (3)$$

4) Покажем, что для любых точек $u', u'' \in U \cap \overline{\text{Per}(f)}$ выполнено неравенство

$$\rho(u', u'') < \varepsilon. \quad (4)$$

Действительно, пусть точки $y', y'' \in O(Y)$ таковы, что

$$\text{diam } \gamma(u', y') \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{diam } \gamma(u'', y'') \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

где $\text{diam}(\cdot)$ – диаметр дуги. В частности, $\rho(u, u') \leq \varepsilon/3$, $\rho(u, u'') \leq \varepsilon/3$, так как $u \in \gamma(u', y') \cap \gamma(u'', y'')$. Поэтому $\rho(u', u'') \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$. Тогда, используя (3) и (4), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $m = m(\varepsilon)$ такое, что $\rho(x^0, f^m(x^0)) < \varepsilon$, т.е. $x^0 \in \text{Pois}(f)$. Лемма 7 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть $f \in P^0(X)$, а x^0 – предельная точка множества $\text{Per}(f)$. Тогда $x^0 \in \text{Per}(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $x^0 \notin \text{Per}(f)$. Тогда для любой последовательности $\{x_j\}_{j \geq 1} \subset \text{Per}(f)$, состоящей из попарно различных точек и сходящейся к x^0 , справедливо, что $\{m(x_j)\}_{j \geq 1}$ – неограниченное множество. В силу леммы 7 $x^0 \in R(X) \cap \text{Pois}(f)$. Отсюда, используя инвариантность $R(X)$, получаем, что $\omega(x^0, f) \subset R(X)$, $\omega(x^0, f)$ замкнуто и плотно в себе. Следовательно, любая точка из $\omega(x^0, f)$ есть точка конденсации [19, с. 260, с. 425]. Последнее невозможно, так как счетное множество $R(X)$ не содержит точек конденсации. Следствие 10 доказано.

Таким образом, утверждение 1) теоремы 4 справедливо. Перейдем к доказательству утверждений 2) и 3). Будем предполагать, что $\text{Per}(f) \neq X$ (если $\text{Per}(f) = X$, то утверждения 2) и 3) справедливы). Обозначим через V произвольную компоненту открытого множества $X \setminus \text{Per}(f)$.

ЛЕММА 8. Если $f \in P^0(X)$, то существует дуга $\gamma(x, y) \subset \overline{V}$ такая, что $x \in \text{Per}(f)$ и $f^m(\gamma(x, y)) \subseteq \gamma(x, y)$ при некотором натуральном m , кратном периоду точки x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу леммы 6 $\text{card}(\text{Per}(f) \cap \overline{V}) = 1$ или 2. Если $\text{card}(\text{Per}(f) \cap \overline{V}) = 2$, то утверждение леммы 8 следует из леммы 1.

Пусть теперь x – единственная точка множества $\text{Per}(f) \cap \overline{V}$. В силу леммы 1, следствий 4 и 5 существует натуральное число $m \geq 1$, кратное периоду точки x и такое, что $f^m(\overline{V}) \subseteq \overline{V}$. Предположим, что $\overline{V}$ не содержит дуг, инвариантных относительно отображения f^m . Возьмем произвольную концевую точку $y \neq x$ множества $\overline{V}$. При сделанном предположении $f^m(y) \notin \gamma(x, y)$ и существуют точки $y_1 \in R(X) \cap \gamma(x, y) \cap \gamma(x, f^m(y))$ и $y_2 \in \gamma(x, y_1)$ такие, что $f^m(y_2) = y_1$. Тогда при любом $j \geq 1$ $\gamma(x, y_1) \subseteq f^{mj}(\gamma(x, y_1))$,

$$\rho(x, \omega(y_1, f^m)) \geq \frac{d}{2}, \quad \text{где } d = \text{diam } \gamma(x, y_1). \quad (5)$$

С другой стороны, так как $y_1 \in R(X)$, множество $\omega(y_1, f^m)$ не более чем счетно и $\omega(y_1, f^m) \cap \text{Per}(f) \neq \emptyset$. В силу включения $\omega(y_1, f^m) \subset \bar{V}$ справедливо равенство $\omega(y_1, f^m) \cap \text{Per}(f) = \{x\}$. Последнее противоречит неравенству (5). Лемма 8 доказана.

Справедливость утверждений 2) и 3) теоремы 4 вытекает из леммы 8 и локальной связности X .

Утверждение 4) теоремы 4 является следствием полученных результатов. Действительно, положим для любых $x, y \in \text{Per}(f)$

$$\rho_{mi}(x, y) = \max_{0 \leq j \leq i} \rho(f^{mj}(x), f^{mj}(y)).$$

В силу леммы 7 и следствия 6 справедлива

ЛЕММА 9. Пусть $f \in P^0(X)$, а ε – произвольное положительное число. Тогда

- 1) существует конечная ε -сеть $\{\text{Orb}(y_s, f)\}_{s=1}^p \subset \text{Per}(f)$ компакта $\text{Per}(f)$ в ρ_{mi} -метрике при любом $i = 0, 1, 2, \dots$ и некотором $m = m(\varepsilon)$, одним из делителей которого служит наименьшее общее кратное периодов $m(y_1), \dots, m(y_p)$ точек $y_1, \dots, y_p$ соответственно;
- 2) каково бы ни было $\varepsilon_1, 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, существует конечная ε_1 -сеть $\{\text{Orb}(y_s, f)\}_{s=1}^{p_1} \subset \text{Per}(f)$ ($p_1 \geq p$) компакта $\text{Per}(f)$ в ρ_{mi} -метрике при любом $i = 0, 1, 2, \dots$ и $m(\varepsilon_1) = m(\varepsilon) = m$.

Обозначим через $r_{mi}(\varepsilon)$ минимальное число элементов в конечной ε -сети компакта $\text{Per}(f)$, снабженного ρ_{mi} -метрикой. Тогда в силу леммы 9, работы [20] и утверждений 1), 3) теоремы 4 справедливы равенства

$$mh(f) = h(f^m) = h(f^m | \Omega(f^m)) = h(f^m | \text{Per}(f)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{mi} \ln r_{mi}(\varepsilon) = 0.$$

Теорема 4 доказана полностью.

Приведем утверждение, играющее важную роль в понимании структуры простейших отображений.

СЛЕДСТВИЕ 11. Если X – это n -од ($n \geq 3$), то для любого отображения $f \in P^0(X)$ существует связка поворотов $\tau \in P^0(X)$ такая, что сужение $f | \Omega(f)$ топологически сопряжено сужению τ на некоторое замкнутое инвариантное относительно τ подмножество X .

Пусть m – произвольное натуральное число, p – произвольное простое число, а X – дендрит из примера 2. Сохраним обозначения этого примера и укажем отображения $f_1, f_2 \in P^0(X)$ такие, что $T(f_1) = \{1, mj\}_{j \geq 1}$, $T(f_2) = \{p^j\}_{j \geq 0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Положим в случае 1)

$$n_j = \begin{cases} 3, & \text{если } j = 0, m = 1 \text{ или } 2, \\ m, & \text{если } j = 0, m \geq 3, \\ 2 + j, & \text{если } j \geq 1, m = 1, \\ m(j + 1), & \text{если } j \geq 1, m \geq 2, \end{cases}$$

в случае 2)

$$n_j = \begin{cases} 3, & \text{если } j = 0, p = 2, \\ p, & \text{если } j = 0, p > 2, \\ p^{j+1}, & \text{если } j \geq 1, p \geq 2. \end{cases}$$

Определим отображение $f_i \in P^0(X)$ ($i = 1, 2$), полагая $f_i|X^{(0)} = \text{id}|X^{(0)}$; при $j = 0$, $m = 1$ или 2 , $p = 2$ $f_i|X^{(n_0)} = \tau$, где $\tau: X^{(n_0)} \rightarrow X^{(n_0)}$ – связка поворотов такая, что $T(\tau) = \{1, 2\}$; при $j = 0$, $m, p \geq 3$ $f_i|X^{(n_0)}$ – поворот $X^{(n_0)}$ на угол $2\pi/n_0$; при любых $j, m \geq 1$, $p \geq 2$ $f_i|X^{(n_j)}$ – поворот $X^{(n_j)}$ в плоскости $x_3 = 1/j$ на угол $2\pi/n_j$. Тогда $T(f_1) = \{1, mj\}_{j \geq 1}$, $T(f_2) = \{p^j\}_{j \geq 0}$. В силу утверждения 4) теоремы 4 $h(f_1) = h(f_2) = 0$. Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шарковский А. Н. Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Укр. матем. ж. 1964. Т. 16. № 1. С. 61–71.
- [2] Misiurewicz M. Horseshoes for mappings of the interval // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 1979. V. 27. № 2. P. 167–169.
- [3] Блох А. М. О “спектральном разложении” для кусочно-монотонных отображений отрезка // УМН. 1982. Т. 37. № 3. С. 175–176.
- [4] Ефремова Л. С. Периодические орбиты и степень непрерывного отображения окружности // Дифференциальные и интегральные уравнения. Вып. 2. Горький: ГГУ, 1978. С. 109–115.
- [5] Ефремова Л. С., Рахманкулов Р. Г. Теоремы сосуществования периодических орбит эндоморфизмов окружности // Дифференциальные и интегральные уравнения. Вып. 4. Горький: ГГУ, 1980. С. 116–118.
- [6] Ефремова Л. С. Периодические точки непрерывного отображения окружности // IX Международная конференция по нелинейным колебаниям (Киев, 30.08.81–06.09.81). Т. 2. Киев: ИМ АН УССР, 1984. С. 124–126.
- [7] Малкин М. И. Периодические орбиты, энтропия и множества вращения непрерывных отображений окружности // Укр. матем. ж. 1983. Т. 35. № 3. С. 327–332.
- [8] Block L., Guckenheimer J., Misiurewicz M., Young L. S. Periodic points and topological entropy of one-dimensional maps // Lecture Notes in Math. 1980. V. 819. P. 18–34.
- [9] Bernhardt C. Periodic orbits of continuous mappings of the circle without fixed points // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1981. V. 1. № 4. P. 413–417.
- [10] Alseda L., Llibre J. A note on the set of periods for continuous maps of the circle which have degree one // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 93. № 1. P. 133–138.
- [11] Baldwin St. An extension of Šarkovskii's theorem to the n -od // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1991. V. 11. № 2. P. 249–271.
- [12] Baldwin St. Some limitations toward extending Šarkovskii's theorem to connected linearly ordered spaces // Houston J. Math. 1991. V. 17. № 1. P. 39–53.
- [13] Alseda L., Llibre J., Misiurewicz M. Periodic orbits of maps of Y // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 313. № 2. P. 475–538.
- [14] Llibre J., Misiurewicz M. Horseshoes, entropy and periods for graph maps // Topology. 1993. V. 32. P. 649–664.
- [15] Blokh A. M. Periods implying almost all periods, trees with snowflakes, and zero entropy maps // Nonlinearity. 1992. V. 5. P. 1375–1382.
- [16] Куратовский К. Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969.
- [17] Ayres W. L. Some generalization of the Scherrer fixed point theorem // Fund. Math. 1930. V. 16. P. 332–336.
- [18] Шарковский А. Н. О притягивающих и притягивающихся множествах // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. № 5. С. 1036–1038.
- [19] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
- [20] Динабург Е. И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 2. С. 324–366.