Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Линке, Раздельно непрерывные селекторы, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 209–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:23:00

УДК 515.122.5

РАЗДЕЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫЕ СЕЛЕКТОРЫ

Ю.Э. Линке

Доказана теорема о наличии раздельно непрерывных селекторов у раздельно полунепрерывного снизу и сверху многозначного отображения многих переменных, если область его определения – компакт, а область значений – выпуклое замкнутое подмножество метризуемого выпуклого компакта.

Библиография: 18 названий.

Введение. Селекторы нескольких переменных необходимы, например, в теории дифференциальных включений [1]–[3]. Однако, даже селекторы двух переменных пока мало изучены (см. [4]–[6]), а селекторы большего числа переменных, по-видимому, до сих пор не исследованы. В работе решается задача существования раздельно непрерывных селекторов и предложены методы, сводящие ее к задачам о непрерывных селекторах.

Статья состоит из двух пунктов. В п. 1 объяснены отличия и связи изучаемой задачи и задачи о непрерывном селекторе (точнее о непрерывном селекторе одной переменной). В частности, доказано, что решение исходной задачи может быть получено с помощью решения задачи о непрерывном селекторе специально построенного многозначного отображения. Однако, неметризуемость пространства значений этого многозначного отображения не позволяет дать удовлетворительные решения исходной задачи.

В п. 2 первоначальная задача вновь включена в общую задачу о селекторе (одной переменной), непрерывном на заданной системе множеств. К решению этой задачи привлечена теория сублинейных операторов: методом сублинейных операторов [7] задачи существования искомых селекторов сведены к эквивалентным задачам сублинференцирования сублинейных операторов.

1. Начнем с ряда определений. Пусть K – выпуклый компакт отделимого локально выпуклого пространства Z . Через $\text{comp}(K)$ обозначим совокупность всех непустых выпуклых и компактных подмножеств из K . В $\text{comp}(K)$ рассмотрим две топологии: *топологию Хаусдорфа*, в которой базис окрестностей точки $A \in \text{comp}(K)$ состоит из множеств вида

$$\{B \in \text{comp}(K) : A \subset B + V, B \subset A + V\}, \quad (1)$$

где V – базисная окрестность нуля в Z , и *топологию Вьеториса*, называемую также экспоненциальной или конечной, определяемую множествами

$$\{A \in \text{comp}(K) : A \cap U \neq \emptyset\}, \quad \{A \in \text{comp}(K) : A \subseteq U\}, \quad (2)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00264.

где U – открытые множества в K .

Пусть

$$T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n \quad (3)$$

– прямое произведение хаусдорфовых (отделимых) топологических пространств $T_1, T_2, \dots, T_n$, где $n \geq 1$. Рассмотрим отображение $\Phi: T \rightarrow \text{compr}(K)$, которое, как обычно, называется многозначным отображением T в K , точнее, многозначным отображением n переменных. Если ясно из контекста, то выражение “ n переменных” всюду опускается. Это соглашение относится и к другим определениям, в частности, к понятию “селектор”. Отображение $\varphi: T \rightarrow K$ называется *селектором* Φ , когда для всех $t \in T$ выполнено включение $\varphi(t) \in \Phi(t)$. Если отображение φ непрерывно, то селектор φ называется *непрерывным селектором*.

Для $n \geq 2$ назовем *раздельно непрерывным* селектор, который непрерывен по каждой переменной в отдельности.

Напомним, что многозначное отображение $\Phi: T \rightarrow \text{compr}(K)$ *полунепрерывно снизу* (*сверху*), если для всякого открытого (замкнутого) множества U в K множество $\{t \in T : \Phi(t) \cap U \neq \emptyset\}$ открыто (замкнуто) или, в двойственной формулировке, если для каждого замкнутого (открытого) множества U в K множество $\{t \in T : \Phi(t) \subseteq U\}$ замкнуто (открыто).

Если $n \geq 2$, то стандартным образом введем понятие многозначного отображения *раздельно полунепрерывного снизу* (*сверху*), а также *раздельно непрерывного* в топологии Хаусдорфа или Вьеториса.

ЗАДАЧА 1. Для каких пространств T , выпуклых компактов $K \subseteq Z$ и многозначных отображений $\Phi: T \rightarrow \text{compr}(K)$ при любом выборе $t_0 \in T$ и $k_0 \in \Phi(t_0)$ существуют раздельно непрерывные селекторы φ , удовлетворяющие условию

$$\varphi(t_0) = k_0? \quad (4)$$

Иначе говоря, ищется не одиночный селектор, а целый ансамбль селекторов, целиком заполняющих график многозначного отображения.

В пионерской работе [8] Э. Майкл ввел условие (4) и показал, что для любых T, K выполнение этого условия в задаче о непрерывном селекторе влечет полунепрерывность снизу многозначного отображения. Повторив рассуждения Э. Майкла в поставленной выше задаче, получим, что для всех $T_1, T_2, \dots, T_n$ и для всякого выпуклого компакта K необходимым условием существования раздельно непрерывных селекторов является раздельная полунепрерывность снизу многозначного отображения. Однако, это условие не будет достаточным в отличие от задачи о непрерывном селекторе, где необходимое условие является обычно достаточным (например, в [9] доказано, что это так, если T – паракомпакт, а K – выпуклый метризуемый компакт). Рассмотрим простой

ПРИМЕР. Пусть $K = [-1, 1]$, $T_2 = [0, 1]$, $T_1 = \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ – одноточечная компактификация Александрова натурального ряда $\mathbb{N}$. Занумеруем все рациональные числа в T_2 последовательностью r_n . Определим $\Phi: T_1 \times T_2 \rightarrow \text{compr}(K)$ так, что

$$\Phi(t_1, t_2) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } t_1 = \omega, \\ \left\{\frac{1}{2}\right\}, & \text{если } t_1 = n, t_2 = r_n, \\ [-1, 1] & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (5)$$

Легко проверить, что Φ раздельно полунепрерывно снизу. Покажем, что Φ не имеет раздельно непрерывного селектора. Допустим, что такой селектор $\varphi(t_1, t_2)$ существует.

Тогда найдем открытый интервал I_1 , содержащий точку r_1 , такой, что $\varphi(1, t_2) \geq 1/4$ для $t_2 \in \bar{I}_1$, где черта означает замыкание интервала I_1 . Положим $n_1 = 1$. Далее выберем $n_2 > n_1$, при котором $r_{n_2} \in I_1$. Теперь укажем открытый интервал I_2 , содержащий точку r_{n_2} и целиком лежащий в I_1 , такой, что для всех $t_2 \in \bar{I}_2$ верно неравенство $\varphi(n_2, t_2) \geq 1/4$. Продолжая этот процесс по индукции, построим возрастающую последовательность натуральных чисел n_k , последовательность вложенных открытых интервалов I_k , для которых

$$\varphi(n_k, t_2) \geq \frac{1}{4}, \quad t_2 \in \bar{I}_2. \quad (6)$$

Поэтому существует точка $t_2^0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{I}_k$, в которой неравенство (6) справедливо одновременно для всех номеров $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Переходя к пределу в (6) при $k \rightarrow \infty$ и используя непрерывность селектора по переменной t_1 , получим неравенство $\varphi(\omega, t_2^0) > 0$. С другой стороны, в силу (5) имеем равенство $\varphi(\omega, t_2^0) = 0$. Полученное противоречие доказывает, что Φ не имеет раздельно непрерывных селекторов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отсутствие раздельно непрерывных селекторов и необходимость введения дополнительных условий на многозначное отображение, обеспечивающих решение задачи 1, объясняет также следующая конструкция.

Конструкция. Для простоты ограничимся двумя переменными. Общий случай изучается аналогично. Рассмотрим вместе с многозначным отображением $\Phi: X \times Y \rightarrow \text{comp}(K)$, где X и Y – компакты, две серии многозначных отображений

$$\Phi_x: Y \rightarrow \text{comp}(K), \quad \Phi_y: X \rightarrow \text{comp}(K), \quad (7)$$

определенных равенствами $\Phi_x(y) = \Phi_y(x) = \Phi(x, y)$ для всех $x \in X, y \in Y$. Предположим, что выпуклый компакт K метризуем, а Φ раздельно полунепрерывно снизу. Тогда все многозначные отображения (7), очевидно, полунепрерывны снизу и согласно теореме Майкла о непрерывных селекторах (см., например, [9]) имеют непрерывные селекторы.

Введем следующие многозначные отображения. Через $C_p(Y, K)$ обозначим пространство всех непрерывных отображений Y в K с топологией поточечной сходимости. Очевидно, что $C_p(Y, K) \subseteq C_p(Y, Z)$ и является выпуклым. Пусть ξ есть многозначное отображение X в $C_p(Y, K)$, которое каждой точке $x \in X$ сопоставляет множество всех непрерывных селекторов многозначного отображения Φ_x . Аналогично введем многозначное отображение $\eta: Y \rightarrow C_p(X, K)$.

Очевидно, что значениями многозначных отображений ξ и η являются непустые, выпуклые и замкнутые множества. Полезность введенных отображений ξ и η показывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) *отображение Φ имеет раздельно непрерывный селектор;*
- 2) *отображение ξ имеет непрерывный селектор;*
- 3) *отображение η имеет непрерывный селектор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметрии определения ξ и η достаточно установить эквивалентность первых двух утверждений. Возьмем раздельно непрерывный селектор φ многозначного отображения Φ . Тогда отображение $y \mapsto \varphi(x, y)$ будет непрерывным селектором Φ_x при любых $x \in X$. Поэтому отображение $x \mapsto (y \mapsto \varphi(x, y))$ есть искомым непрерывный селектор ξ . Обратно, если φ – непрерывный селектор ξ , то отображение $(x, y) \mapsto \varphi(x)(y)$ будет раздельно непрерывным селектором Φ . Предложение 1 доказано.

Следующее предложение показывает, что для отображений ξ и η выполнено необходимое условие существования непрерывных селекторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть K – метризуемый выпуклый компакт, а Φ раздельно полунепрерывно снизу. Тогда отображения ξ и η полунепрерывны снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ξ и η равноправны, достаточно проверить полунепрерывность снизу одного из них, например ξ . Рассмотрим поведение отображения ξ в произвольной точке $x_0 \in X$. Предположим, что селектор $\varphi_0 \in \xi(x_0)$ выбран произвольно. Пусть U – окрестность нуля в $C_p(Y, Z)$ вида $U = U(W, y_0) = \{f : f(y_0) \in W\}$, где W – окрестность нуля в Z , а $y_0 \in Y$. Для доказательства полунепрерывности снизу отображения ξ достаточно для любой точки $x_0 \in X$ найти окрестность $V(x_0)$ такую, что при всех $x \in V(x_0)$ имеет место соотношение $\xi(x) \cap (\varphi_0 + U) \neq \emptyset$. В качестве $V(x_0)$ возьмем окрестность точки x_0 , в которой $\Phi(x, y_0) \cap (\varphi_0(y_0) + W) \neq \emptyset$ для всех $x \in V(x_0)$. Существование такой окрестности следует из полунепрерывности снизу Φ по переменной x в точке $y_0 \in Y$. Действительно, окрестность $V(x_0)$ является искомой, потому что для любой точки $x \in V(x_0)$ найдется точка $z_x \in K$, которая в силу последнего соотношения принадлежит как $\Phi(x, y_0)$, так и $\varphi_0(y_0) + W$. Так как $\Phi(x, y)$ полунепрерывно снизу по переменной y при фиксированном x , существует непрерывный селектор φ_x отображения Φ_x такой, что $\varphi_x(y_0) = z_x$. Поэтому для любого $x \in V(x_0)$ найдена общая точка φ_x , которая по определению принадлежит ξ и $\varphi_0 + U$. Таким образом, полунепрерывность снизу отображения ξ установлена и предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично доказывается, что если в условиях предложения 2 дополнительно Φ полунепрерывно сверху, то ξ, η также полунепрерывны сверху.

Итак, задача 1 сведена к задаче о непрерывном селекторе многозначных отображений ξ и η . Для них выполнены необходимые условия существования непрерывных селекторов (предложение 2). Однако, ξ и η могут не иметь непрерывных селекторов, потому что, во-первых, пространства их значений неметризуемы и некомпактны, во-вторых, значения ξ и η в каждой точке тоже некомпактны. В связи с этим применить теоремы о непрерывных селекторах с неметризуемыми пространствами значений (см. [10]–[12]) в такой ситуации вряд ли возможно. С другой стороны, можно поставить дополнительную задачу нахождения компактнозначных отображений, вписанных в ξ и η . Однако, даже при условии решения этой интересной и сложной задачи решение задачи 1 может потребовать весьма жестких условий на компакт T , например метризуемости или вполне экстремальной несвязности.

В следующем пункте задача 1 решена для произвольного компакта, но при дополнительном условии: многозначное отображение раздельно полунепрерывно сверху.

2. В этом пункте изучим исходную задачу, когда

- 1) $T_1, T_2, \dots, T_n$ – компакты, следовательно, по теореме Тихонова и T вида (3) – тоже компакт;
- 2) выпуклый компакт $K \subseteq Z$ метризуем;
- 3) многозначное отображение $\Phi: T \rightarrow \text{compr}(K)$ раздельно полунепрерывно снизу и сверху одновременно.

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. В условиях 1)–3) всякое многозначное отображение $\Phi: T \rightarrow \text{compr}(K)$ имеет раздельно непрерывные селекторы, удовлетворяющие условию (4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1 является простым следствием более общей теоремы 2 (см. ниже).

Рассмотрим обобщение задачи 1.

Пусть T – произвольный компакт, необязательно вида (3). Зададим на нем произвольную систему Ω замкнутых множеств $\omega \in \Omega$. Будем говорить, что отображение,

заданное на T , является Ω -непрерывным, если его сужение на любое множество $\omega \in \Omega$ непрерывно. Аналогичное соглашение применяется в дальнейшем и для других свойств отображений, например для полунепрерывности снизу или сверху многозначных отображений, и т.п. В соответствии с этим селектор, заданный на T , назовем Ω -непрерывным, если отображение φ является Ω -непрерывным.

Сформулируем очевидное обобщение задачи 1.

ЗАДАЧА 2. Для каких компактов T , выпуклых компактов $K \subseteq Z$, семейств Ω и многозначных отображений $\Phi: T \rightarrow \text{сomp}(K)$ существуют Ω -непрерывные селекторы, удовлетворяющие условию (4)?

Основным результатом является

ТЕОРЕМА 2. Пусть T – компакт с любой системой Ω замкнутых множеств, а $K \subseteq Z$ – выпуклый метризуемый компакт. Тогда каждое Ω -полунепрерывное снизу и сверху многозначное отображение $\Phi: T \rightarrow \text{сomp}(K)$ имеет Ω -непрерывные селекторы, удовлетворяющие условию (4).

ЛЕММА. Выпуклый метризуемый компакт K в Z аффинно гомеоморфен выпуклому метризуемому компактному K_1 из сопряженного банахова пространства X' с топологией $\sigma(X', X)$, где X – сепарабельное банахово пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство $C(K)$ непрерывных функций, заданных на K , с топологией равномерной сходимости. Известно [13], что $C(K) = X$ – сепарабельное банахово пространство. Искомым компактом K_1 будет множество мер Дирака $\{\varepsilon_k : k \in K\} \subseteq X'$.

Согласно этой лемме доказательство теоремы 2 достаточно провести в частном случае, когда $Z = X'$ с топологией $\sigma(X', X)$, где X – сепарабельное банахово пространство.

Метод сублинейных операторов. На вербальном уровне этот метод [7] предполагает наличие класса сублинейных операторов $\mathcal{P}$ и его подкласса $\mathcal{L}$ линейных операторов, класса $\mathcal{M}$ многозначных отображений с подклассом $\mathcal{N}$ всех его однозначных отображений и взаимно однозначного отображения между ними. Точнее, взаимно однозначное отображение $\tau: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$ назовем *представлением* $\mathcal{P}$, если

- 1) $\tau(\mathcal{P}) = \mathcal{M}$ и $\tau(\mathcal{L}) = \mathcal{N}$;
- 2) линейный оператор $u \in \mathcal{L}$ входит в субдифференциал ∂P сублинейного оператора $P \in \mathcal{P}$ в том и только том случае, когда $\tau(u)$ является селектором $\tau(P)$.

Классы. Прежде чем ввести классы $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, напомним определение сублинейного оператора и введем одно полуупорядоченное пространство.

Отображение $P: X \rightarrow Y$, где X, Y – векторные пространства, причем Y полуупорядочено с помощью конуса положительных элементов, называется *сублинейным оператором*, если оно субаддитивно и положительно однородно, т.е.

$$P(x_1 + x_2) \leq Px_1 + Px_2, \quad P(\lambda x_1) = \lambda Px_1, \quad \lambda \geq 0, \quad x_1, x_2 \in X.$$

В качестве Y рассмотрим пространство $C_\Omega(T)$ всех вещественнозначных ограниченных и Ω -непрерывных функций, заданных на T . С обычными операциями сложения и умножения на числа оно превращается в векторное пространство. Наделим его топологией равномерной сходимости на всем T и полуупорядочим естественным образом. Тогда $C_\Omega(T)$ является КВ-линеалом ограниченных элементов [14].

Класс $\mathcal{P}$ состоит из всех непрерывных сублинейных операторов $P: X \rightarrow C_\Omega(T)$, где компакт T , система Ω замкнутых подмножеств T и сепарабельное банахово пространство выбраны произвольно. Подкласс $\mathcal{L}$ класса $\mathcal{P}$ состоит из всех линейных непрерывных операторов $u: X \rightarrow C_\Omega(T)$. Пусть $\mathcal{M}$ – класс всех Ω -непрерывных в топологии Хаусдорфа многозначных отображений $\Phi: T \rightarrow \text{conp}(K)$, где компакт T , выпуклый компакт K в $(X', \sigma(X', X))$ и сепарабельное банахово пространство X выбраны произвольно, а $\mathcal{N}$ – подкласс $\mathcal{M}$, состоящий из однозначных отображений T в K .

Для построения отображения τ удобно ввести еще одно определение, которое позволит нам рассматривать вместо $\Phi: T \rightarrow \text{conp}(K)$ многозначное отображение T в X' . Скажем, что *многозначное отображение $\Phi: T \rightarrow X'$ ограничено*, если

$$\sup\{\|x'\| : x' \in \Phi(t), t \in T\} \leq \beta < +\infty. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь $\text{conp}(X')$ – совокупность всех непустых выпуклых компактных в топологии $\sigma(X', X)$ множеств сопряженного пространства X' с топологиями Хаусдорфа и Вьеториса, определяемыми так же, как и для $\text{conp}(K)$ формулами (1) и (2) соответственно. Очевидно, что класс $\mathcal{M}$ можно определить и как класс Ω -непрерывных по Хаусдорфу ограниченных отображений $\Phi: T \rightarrow \text{conp}(X')$.

Представление. Напомним, что линейный непрерывный оператор $u: X \rightarrow Y$ является *опорным* к непрерывному сублинейному оператору $P: X \rightarrow Y$, если для всех $x \in X$ справедливо неравенство $ux \leq Px$. Совокупность всех непрерывных операторов опорных к P называется его *субдифференциалом* и обозначается символом ∂P . Пусть X – произвольное банахово пространство и $P: X \rightarrow C_\Omega(T)$ – любой непрерывный сублинейный оператор. Каждому P сопоставим многозначное отображение Φ_P , определенное формулой

$$t \mapsto \partial(x \mapsto Px(t)), \quad x \in X, \quad (9)$$

и действующее из T в $\text{conp}(X')$.

Отображение P в Φ_P будем рассматривать как *представление τ* . Справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Для любого банахова пространства X отображение $\Phi_P: T \rightarrow \text{conp}(X')$ является Ω -непрерывным в топологии Хаусдорфа и ограниченным. Обратно, каждое Ω -непрерывное в топологии Хаусдорфа и ограниченное отображение $\Phi: T \rightarrow \text{conp}(X')$ порождает формулой*

$$Px(t) = \sup\{\langle x, x' \rangle : x' \in \Phi(t)\}, \quad t \in T, \quad x \in X, \quad (10)$$

непрерывный сублинейный оператор $P: X \rightarrow C_\Omega(T)$, для которого $\Phi_P = \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 3 в частном случае, когда Ω состоит из одного множества T , получена в [15] (доказательство см. в [16]). Общий случай сводится к частному, если вместе с $P: X \rightarrow C_\Omega(T)$ рассмотреть семейство непрерывных сублинейных операторов $P_\omega: X \rightarrow C(\omega)$, заданных как “сужение” оператора P , т.е. $P_\omega x = Px|_\omega$, $x \in X$, и учесть равенство $\tau(P_\omega) = \Phi_P|_\omega$, $\omega \in \Omega$ (см. формулы (9) и (10)). Напомним, что условие ограниченности, когда $\Omega = \{T\}$, следует из непрерывности Φ_P в топологии Хаусдорфа, причем константу β в (8) можно считать равной $\|P\|$ (см. [14], [15]). Далее ясно, что непрерывность сублинейного оператора $P: X \rightarrow C_\Omega(T)$ эквивалентна его ограниченности: $\|P\| < \infty$. Поэтому для Φ_P в качестве константы β вновь можно взять $\|P\|$. Однако, если некоторое многозначное отображение $\Phi: T \rightarrow \text{conp}(X')$ ограничено на каждом компакте $\omega \in \Omega$, то оно вовсе необязательно является ограниченным на всем T . Следовательно, в теореме 3 вместе с условием Ω -непрерывности необходимо и условие ограниченности Φ . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Линейные непрерывные операторы $u: X \rightarrow C_\Omega(T)$, и только они, имеют в качестве представлений однозначные и ограниченные отображения T в X' .*

Следующая простая, но принципиально важная, теорема устанавливает связь между субдифференцируемостью и изучаемой задачей о селекторе. Напомним, что сублинейный оператор называется *субдифференцируемым*, если его субдифференциал есть непустое множество, и *несубдифференцируемым* – в противном случае.

ТЕОРЕМА 4. *Непрерывный сублинейный оператор $P: X \rightarrow C_\Omega(T)$ субдифференцируем тогда и только тогда, когда его представление $\tau(P)$ имеет Ω -непрерывный селектор.*

Доказательство теоремы следует из формул (9), (10) и следствия для любых банаховых пространств.

Перейдем к доказательству теоремы 2, считая теперь во всех предыдущих рассуждениях X сепарабельным банаховым пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим Ω -полунепрерывное снизу и сверху многозначное отображение $\Phi: T \rightarrow \text{comp}(K)$. Используя формулу (2), заключаем, что Φ является Ω -непрерывным в топологии Вьеториса. Учитывая совпадение топологий Хаусдорфа и Вьеториса на $\text{comp}(K)$ [17, с. 208, 254], устанавливаем Ω -непрерывность Φ в топологии Хаусдорфа. Согласно лемме можно считать, что выпуклый компакт K содержится в $Z = X'$, где X – сепарабельное банахово пространство со слабой топологией $\sigma(X', X)$. Так как компакт K в X' ограничен, можно считать, что Φ является ограниченным отображением T в $\text{comp}(X')$. Следовательно, можно применить теорему 3 и представить Φ как $\Phi = \Phi_P = \tau(P)$, где непрерывный сублинейный оператор $P: X \rightarrow C_\Omega(T)$ вычисляется по формуле (10). Как уже отмечалось, $C_\Omega(T)$ является КВ-линеалом ограниченных элементов. Тем самым, $C_\Omega(T)$ – пространство Линденштраусса, и оператор P субдифференцируем [18]. Подчеркнем, что только в этом месте использована по существу сепарабельность банахова пространства X . Пусть $u \in \partial P$. В силу теоремы 4 $\tau(u) = \varphi$ является Ω -непрерывным селектором многозначного отображения Φ . Необходимо добавить, что этот селектор согласно (9) имеет вид

$$\varphi: t \mapsto (x \mapsto ux(t)), \quad x \in X, \quad t \in T. \quad (11)$$

Иными словами, u и φ связаны соотношением

$$ux(t) = \langle x, \varphi(t) \rangle, \quad x \in X, \quad t \in T. \quad (12)$$

Осталось доказать, что найдется Ω -непрерывный селектор, удовлетворяющий условию (4), т.е. для любых точек $t_0 \in T$ и $x'_0 \in K$ требуется указать Ω -непрерывный селектор, для которого верно равенство $\varphi(t_0) = x'_0$. Для этого возьмем субдифференциал ∂P фигурирующего выше непрерывного сублинейного оператора P и отметим, что кроме субдифференцируемости оператора P доказана формула

$$\sup\{ux(t) : u \in \partial P\} = Px(t), \quad x \in X, \quad t \in T \quad (13)$$

(ср. с формулой (2) в [18]). Рассмотрим также множество S всех Ω -непрерывных селекторов многозначного отображения Φ . Между $u \in \partial P$ и $\varphi \in S$ есть взаимно однозначное соответствие, определяемое соотношениями (11) и (12). Поэтому (13) допускает еще одно выражение:

$$\sup\{\langle x, \varphi(t) \rangle : \varphi \in S\} = Px(t), \quad x \in X, \quad t \in T. \quad (14)$$

Для завершения доказательства заметим, что множество селекторов S замкнуто в топологии поточечной сходимости пространства Ω -непрерывных ограниченных отображений T в X' и в каждой точке $t \in T$ множества $S(t) \subseteq X'$ выпуклы. Таким образом, $S(t_0)$ – выпуклый компакт в $\text{conv}(X')$, совпадающий согласно двойственности Минковского и (14) с $\partial(x \mapsto Px(t_0))$, $x \in X$. Стало быть, обязательно найдется $\varphi \in S$ такой, что $\varphi(t_0) = x'_0$. Теорема доказана.

Заключительные замечания. Предлагаемые методы можно использовать и при решении задач о Ω -непрерывном селекторе для неметризуемых выпуклых компактов K . Например, используя [12], теорему 2 можно доказать в предположении метризуемости компакта T , счетности семейства Ω , если K – выпуклый компакт Эберлейна.

Эти методы эффективны, если T не является компактным. Только в этом случае надо предварительно доказать соответствующие теоремы о представлении сублинейных операторов со значениями в пространстве $C_\Omega(T)$.

Не вызывает принципиальных затруднений перенесение этих методов на случай, когда рассматриваются селекторы многих переменных, непрерывные по одним и измеримые или борелевские по другим переменным. Однако, нужны новые теоремы о представлении сублинейных операторов измеримыми и борелевскими отображениями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Aubin I. P., Cellina A. *Differential Inclusions*. Berlin: Springer, 1984.
- [2] Толстоногов А. А. *Дифференциальные включения в банаховом пространстве*. Новосибирск: Наука, 1986.
- [3] Bressan A., Colombo G. Extensions and selections of maps with decomposable values // *Studia Math.* 1988. V. 90. № 1. P. 69–86.
- [4] Kucia A., Nowak A. On Caratheodory type selectors in a Hilbert space // *Ann. Math. Sil.* 1986. № 14. P. 47–52.
- [5] Phan V. C. A density theorem with an application in relaxation of nonconvex-valued differential equations // *J. Math. Anal. Appl.* 1987. V. 124. № 1. P. 1–14.
- [6] Slezak W. Concerning continuous selectors for multifunctions defined on product spaces // *Problemy Mat.* 1987. № 8. P. 31–46.
- [7] Линке Ю. Э. Метод сублинейных операторов и задачи о селекторах // *Докл. РАН*. 1996. Т. 347. № 4. С. 446–448.
- [8] Michael E. Continuous selections. 1 // *Ann. Math.* 1956. V. 63. № 2. P. 361–382.
- [9] Michael E. A selection theorem // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1966. V. 17. P. 1404–1407.
- [10] Corson H. H., Lindenstrauss I. Continuous selections with non-metrizable range // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1966. V. 121. № 2. P. 492–504.
- [11] Hasumi M. A continuous selection theorem for extremally disconnected spaces // *Math. Ann.* 1969. V. 179. № 2. P. 83–89.
- [12] Линке Ю. Э. Сублинейные пространства со значениями в пространствах непрерывных функций // *Докл. АН СССР*. 1976. Т. 228. № 3. С. 540–542.
- [13] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы. Общая теория*. М.: ИЛ, 1962.
- [14] Вулих Б. З. *Введение в теорию полупорядоченных пространств*. М.: Физматгиз, 1961.
- [15] Линке Ю. Э. Об опорных множествах сублинейных операторов // *Докл. АН СССР*. 1972. Т. 207. № 3. С. 531–533.
- [16] Линке Ю. Э. Об опорных множествах сублинейных операторов со значениями в $C(Q)$ // *Оптимизация*. Вып. 8(25). Новосибирск, 1972. С. 52–70.
- [17] Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры*. М.: Наука, 1968.
- [18] Линке Ю. Э. Сублинейные операторы и пространства Линденштраусса // *Докл. АН СССР*. 1977. Т. 234. № 1. С. 26–29.