Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Мельник, Об оценках фрактальной и хаусдорфовой размерностей множеств, инвариантных при многозначных отображениях, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 217–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:38:29

УДК 517.9

ОБ ОЦЕНКАХ ФРАКТАЛЬНОЙ И ХАУСДОРФОВОЙ РАЗМЕРНОСТЕЙ МНОЖЕСТВ, ИНВАРИАНТНЫХ ПРИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

В. С. Мельник

В работе получены оценки хаусдорфовой и фрактальной размерностей множеств $A \subset X$, инвариантных относительно многозначных отображений $F: X \rightarrow 2^X$, действующих из банахова пространства X на множество всех подмножеств X .

Библиография: 8 названий.

При изучении поведения траекторий эволюционных уравнений существенную роль играют аттракторы соответствующих однопараметрических полугрупп (или групп) нелинейных операторов. Важной характеристикой аттракторов систем уравнений в частных производных является их размерность [1]–[4]. Вычисление меры, характеризующей конечномерность динамики рассматриваемой системы, основано на оценках размерностей (топологической, хаусдорфовой, фрактальной) множеств, инвариантных относительно нелинейных преобразований гильбертовых пространств [3], [5], [6].

В данной заметке некоторые результаты О. А. Ладыженской [3], [5] по оценке размерностей обобщаются на случай многозначных отображений, что представляет интерес с точки зрения теории многозначных полудинамических систем [7].

Пусть X – банахово пространство, $\mathcal{F}(X)$ – упорядоченный по включению фильтр конечномерных подпространств X , $\dim_H(A)$ и $\dim_f(A)$ – соответственно хаусдорфова и фрактальная размерности множества $A \subset X$, $F: X \rightarrow 2^X$ – многозначное отображение (2^X – совокупность всех подмножеств пространства X), $\text{Dom } F = \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$.

Напомним определения хаусдорфовой и фрактальной размерностей. Пусть $A \subset X$ и $\mathcal{U}$ – покрытие A шарами $B_{r_i}(x_i)$ радиусов $r_i \leq \delta$ с центрами в точках x_i . Положим

$$\omega_N(\mathcal{U}, \delta, A) = \sum_i r_i^N, \quad \omega_N(\delta, A) = \inf \omega_N(\mathcal{U}, \delta, A),$$

где инфимум берется по всевозможным покрытиям $\mathcal{U}$ множества A шарами, радиусы которых не превосходят δ . Хаусдорфовой мерой множества A размерности N называется число

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_N(\delta, A) = \omega_N(A) = \sup_{\delta \geq 0} \omega_N(\delta, A),$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Украины.

а хаусдорфовой размерностью – число

$$\dim_H(A) = \inf\{N \mid \omega_N(A) < \infty\}.$$

Аналогично определяется *фрактальная размерность* $\dim_f(A)$, с тем лишь отличием, что покрытие $\mathcal{U}$ множества A осуществляется шарами $B_{r_i}(x_i)$ при условии $r_i = \delta$. Очевидно, $\dim_H(A) \leq \dim_f(A)$.

Пусть $\Lambda = \{A_i\}$ – измельчение A , т.е. $A_i \subset A$ и $\bigcup_i A_i = A$, а $\{\Lambda\} = \mathcal{H}$ – некоторая совокупность таких измельчений. Положим

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_{f,\Lambda}(A) &= \inf_i \dim_f(A_i), & \overline{\dim}_{f,\Lambda}(A) &= \sup_i \dim_f(A_i), \\ \underline{\dim}_{f,\mathcal{H}}(A) &= \inf_{\Lambda \in \mathcal{H}} \underline{\dim}_{f,\Lambda}(A), & \overline{\dim}_{f,\mathcal{H}}(A) &= \sup_{\Lambda \in \mathcal{H}} \overline{\dim}_{f,\Lambda}(A) \end{aligned}$$

и аналогично в случае хаусдорфовых размерностей.

Справедливы неравенства

$$\underline{\dim}_{H,\mathcal{H}}(A) \leq \overline{\dim}_{H,\Lambda}(A) \leq \dim_H(A), \quad \underline{\dim}_{f,\mathcal{H}}(A) \leq \overline{\dim}_{f,\Lambda}(A) \leq \dim_f(A). \quad (1)$$

Для любого $A \subset X$ обозначим

$$\|A\|_+ = \sup_{a \in A} \|a\|_X.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многочисленный оператор $F: X \rightarrow 2^X$ называется *f-сплющивающим* на $A \subset X$, если $A \subset \text{Dom } F$ и найдется селектор f многозначного отображения F такой, что

а) существует $l \in \mathbb{R}_+$ такое, что

$$\|F(y_1) - f(y_2)\|_+ \leq l \|y_1 - y_2\|_X \quad \forall y_1, y_2 \in A; \quad (2)$$

б) найдутся $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X)$ ($\dim \mathcal{F} = N$), $\delta \in (0, 1/2)$ и непрерывный проектор $\Pi_{\mathcal{F}}: X \rightarrow \mathcal{F}$, для которых

$$\|(1 - \Pi_{\mathcal{F}})F(y_1) - (1 - \Pi_{\mathcal{F}})f(y_2)\|_+ \leq \delta \|y_1 - y_2\|_X \quad \forall y_1, y_2 \in A. \quad (3)$$

Для $A \subset X$ рассмотрим совокупность пар $\Theta = \{(A_i; F_i)\}$, где $A_i \subset A$ – ограниченное множество, $A = \bigcup_i A_i$ и $A_i \subseteq F_i(A_i)$, а каждое $F_i: X \rightarrow 2^X$ является f_i -сплющивающим на A_i . Такую совокупность Θ будем называть *сплющивающей*. Очевидно, если Θ_1 и Θ_2 – две сплющивающие совокупности, то $\Theta_1 \cup \Theta_2$ также сплющивающая и каждая Θ (лемма Порна) содержится в максимальной Θ_∞ .

Пусть далее $\mathcal{H} = \{\Lambda\}$, где $\Lambda = \{A_i\}$, $\{(A_i; F_i)\} = \Theta$ – сплющивающая совокупность, $\Lambda_\infty = \{A_i^\infty\}$, где $\{(A_i^\infty; F_i^\infty)\} = \Theta_\infty$. В этом случае получаем

$$\underline{\dim}_{f,\mathcal{H}}(A) = \underline{\dim}_{f,\Lambda_\infty}(A), \quad \overline{\dim}_{f,\mathcal{H}}(A) = \overline{\dim}_{f,\Lambda_\infty}(A)$$

(аналогичные равенства выполняются и для хаусдорфовой размерности).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{H} = \{\Lambda\}$, где $\Lambda = \{A_i\}$, и $\{(A_i; F_i)\} = \Theta$ – сплющивающая совокупность для A . Тогда

$$\overline{\dim}_{H, \mathcal{H}}(A) \leq \overline{\dim}_{f, \mathcal{H}}(A) \leq \alpha_0,$$

где

$$\alpha_0 = \sup_{\Lambda} \sup_i \alpha_0(A_i), \quad \alpha_0(A_i) = \inf_{\delta_{1i} \in (0, 1/2 - \delta_i)} \Psi_i(\delta_{1i}),$$

$$\Psi_i(\delta_{1i}) = N_i \ln \left(\frac{\kappa^2 l_i^2}{\delta_{1i}^2} \right) / \ln \left(\frac{1}{4(\delta_{1i} + \delta_i)^2} \right),$$

а δ_i и l_i – константы сплющивания для F_i , κ – постоянная Гаусса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную сплющивающую совокупность Θ и рассмотрим некоторый ее элемент $(A_i; F_i)$. Следуя [3], [5], построим последовательность покрытий $\{U_k^i\}$ множества A_i , где каждое U_k^i состоит из элементов $D_j^{ik} \subset A_i$, $j = 1, \dots, n_i(k)$, диаметры которых $d(D_j^{ik}) \leq \varepsilon_{ik}$, $\varepsilon_{ik} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. С каждым таким покрытием связывается число $m_{\alpha_i}(U_k^i) = m_i(k)\varepsilon_{ik}^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$. Искомая последовательность покрытий $\{U_k^i\}$ конструируется индукцией по k . В качестве U_1^i возьмем множество A_i . Пусть U_k^i уже построено. Так как A_i полуинвариантно относительно F_i , множества $\tilde{D}_j^{ik} = A_i \cap F_i(D_j^{ik})$ также образуют покрытие A_i . Пусть $\Pi_{\mathcal{F}}: X \rightarrow \mathcal{F}$ ($\dim \mathcal{F} = N_i$, пространство $\mathcal{F}$ зависит, вообще говоря, от i) – непрерывный проектор, тогда любой элемент $y \in X$ может быть представлен единственным образом в виде $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in \mathcal{F}$, $y_2 \in (1 - \Pi_{\mathcal{F}})X$. Для некоторого $v_j^{ik} \in D_j^{ik}$ рассмотрим $w_j^{ik} = f_i(v_j^{ik})$, где f_i – селектор отображения F_i , фигурирующий в определении 1. Из оценки (2) для любого $v \in D_j^{ik}$ получаем

$$\|F_i(v) - f_i(v_j^{ik})\|_+ \leq l_i \|v - v_j^{ik}\|_X \leq l_i \varepsilon_{ik}$$

и

$$\|\Pi_{\mathcal{F}} F_i(v) - \Pi_{\mathcal{F}} f_i(v_j^{ik})\|_+ \leq \|F_i(v) - f_i(v_j^{ik})\|_+ \leq l_i \varepsilon_{ik},$$

значит $\tilde{D}_j^{ik}$ лежит в шаре $B_{l_i \varepsilon_{ik}}(w_j^{ik})$ пространства X радиуса $l_i \varepsilon_{ik}$ с центром в точке w_j^{ik} , а проекция $\Pi_{\mathcal{F}} \tilde{D}_j^{ik}$ – в шаре $B_{l_i \varepsilon_{ik}}^{\mathcal{F}}(\Pi_{\mathcal{F}} w_j^{ik})$ пространства $\mathcal{F}$. Как известно [8], шар $B_{l_i \varepsilon_{ik}}^{\mathcal{F}}(\Pi_{\mathcal{F}} w_j^{ik})$ можно покрыть N_i -мерными шарами $B_{\delta_{1i} \varepsilon_{ik}}^{\mathcal{F}, \nu}$ радиуса $\delta_{1i} \varepsilon_{ik}$, $\nu = 1, 2, \dots, d_i(k, j)$, число которых $d_i(k, j)$ не превосходит $(\kappa l_i / \delta_{1i})^{N_i}$, где κ – некоторая абсолютная константа (постоянная Гаусса). Тогда совокупность $(\Pi_{\mathcal{F}}^{-1} B_{\delta_{1i} \varepsilon_{ik}}^{\mathcal{F}, \nu} \cap D_j^{ik})$ образует покрытие U_{k+1}^i , являющееся измельчением U_k^i . Число элементов $n_i(k+1)$ этого покрытия не превосходит $n_i(k) d_i(k, j) \leq n_i(k) (\kappa l_i / \delta_{1i})^{N_i}$. Заметим, что для любых $w_1, w_2 \in \Pi_{\mathcal{F}}^{-1} B_{\delta_{1i} \varepsilon_{ik}}^{\mathcal{F}, \nu} \cap D_j^{ik}$ $\|\Pi_{\mathcal{F}} w_1 - \Pi_{\mathcal{F}} w_2\|_X \leq 2\delta_{1i} \varepsilon_{ik}$ и существуют $v_1, v_2 \in D_j^{ik}$ такие, что $w_1 \in F_i(v_1)$, $w_2 \in F_i(v_2)$ и $\|v_1 - v_2\|_X \leq \varepsilon_{ik}$. Отсюда, дважды применяя оценку (3), заключаем, что $\|(1 - \Pi_{\mathcal{F}})w_1 - (1 - \Pi_{\mathcal{F}})w_2\|_X \leq 2\delta_i \varepsilon_{ik}$, а значит, $\|w_1 - w_2\|_X \leq \delta_{2i} \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{i, k+1}$, где $\delta_{2i} = 2(\delta_{1i} + \delta_i)$. Если $\delta_{1i} \in (0, 1/2 - \delta_i)$, то $\delta_{2i} \in (0, 1)$. Тогда для числа $m_{\alpha_i}(U_{k+1}^i)$ справедлива оценка

$$m_{\alpha_i}(U_{k+1}^i) \leq \eta_i m_{\alpha_i}(U_k^i), \quad (4)$$

где $\eta_i = (\varkappa l_i / \delta_{1i})^{N_i} (2\delta_{2i})^{\alpha_i}$. Выберем α_i из условия $\eta_i < 1$, что эквивалентно неравенству

$$0 > N_i \ln \frac{\varkappa l_i}{\delta_{1i}} - \alpha_i \ln \frac{1}{\delta_{2i}}$$

или

$$\alpha_i > N_i \ln \left(\frac{\varkappa l_i}{\delta_{1i}} \right) / \ln \left(\frac{1}{\delta_{2i}} \right) = N_i \ln \left(\frac{\varkappa^2 l_i^2}{\delta_{1i}^2} \right) / \ln \left(\frac{1}{4(\delta_{1i} + \delta_i)^2} \right) \equiv \Psi_i(\delta_{1i}).$$

Повторяя указанную процедуру измельчения неограниченно, мы построим последовательность покрытий $\{U_k^i\}$ множества A_i такую, что для любого $k = 1, 2, \dots$ выполняется (4) при $\eta_i < 1$, если $\alpha_i > \Psi_i(\delta_{1i})$, $\delta_{1i} \in (0, 1/2 - \delta_i)$. Это означает, что α_i – мера Хаусдорфа множества A_i – равна 0, значит

$$\dim_f(A_i) \leq \alpha_0(A_i) = \inf_{\delta_{1i} \in (0, 1/2 - \delta_i)} \Psi_i(\delta_{1i}).$$

Поэтому утверждение теоремы 1 вытекает из определения $\overline{\dim}_H(A)$ и $\overline{\dim}_{f, \mathcal{H}}(H)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в условиях теоремы 1 пространство X гильбертово. Тогда константа $\alpha_0(A_i)$ определяется из соотношения

$$\alpha_0(A_i) = \inf_{\delta_{1i} \in (0, \sqrt{1/4 - \delta_i^2})} \Psi_i(\delta_{1i}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A – ограниченное подмножество X , полуинвариантное относительно f -сплющивающего многозначного отображения F (т.е. $A \subset F(A)$). Тогда

$$\dim_H(A) \leq \dim_f(A) \leq \alpha_0,$$

где

$$\alpha_0 = \inf_{\delta_1 \in (0, 1/2 - \delta)} \Psi(\delta_1), \quad \Psi(\delta_1) = N \ln \left(\frac{\varkappa^2 l^2}{\delta_1^2} \right) / \ln \left(\frac{1}{4(\delta_1 + \delta)^2} \right).$$

Если при этом пространство X гильбертово, то

$$\alpha_0 = \inf_{\delta_1 \in (0, \sqrt{1/4 - \delta^2})} \Psi(\delta_1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Положим $d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_X$. Приведенные выше утверждения справедливы, если неравенства (2), (3) заменить следующими включениями:

$$\begin{aligned} F(y_1) &\subset B^+(F(y_2), ld(y_1, y_2)) \quad \forall y_1, y_2 \in A, \\ (1 - \Pi_{\mathcal{F}})F(y_1) &\subset B^+((1 - \Pi_{\mathcal{F}})F(y_2), \delta d(y_1, y_2)) \quad \forall y_1, y_2 \in A, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B^+(K, \eta) &= \{y \in X \mid \text{dist}(K, y) \leq \eta\}, \quad l \in \mathbb{R}_+, \quad \delta \in (0, 1), \\ \text{dist}(K, y) &= \sup_{v \in K} d(v, y). \end{aligned}$$

В этом случае

$$\alpha_0(A_i) = \inf_{\delta_{1i} \in (0, (1-\delta_i)/4)} \Psi_i(\delta_{1i}), \quad \Psi_i(\delta_{1i}) = N_i \ln \left(\frac{\varkappa^2 l_i^2}{\delta_{1i}^2} \right) / \ln \left(\frac{1}{4(\delta_{1i}^2 + \delta_i^2)} \right).$$

Если пространство X гильбертово, то

$$\alpha_0(A_i) = \inf_{\delta_{1i} \in (0, \sqrt{1-\delta_i^2}/2)} \Psi_i(\delta_{1i}).$$

Рассмотрим теперь несколько иной подход к оценке хаусдорфовой и фрактальной размерностей, основанный на N -сжимающих многозначных отображениях. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – последовательность неотрицательных чисел, занумерованная в порядке убывания, $w_k(\alpha) = \alpha_1 \cdots \alpha_k$; B_r – шар в X радиуса r с центром в нуле; $\mathcal{E}(\mathcal{F}; \alpha)$ – эллипсоид в $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X)$ ($\dim \mathcal{F} = N$) с центром в нуле и полуосями $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. В общем случае $\alpha_i = \alpha_i(y)$, $\Pi = \Pi(y)$, т.е. каждой точке $y \in X$ соответствует свой эллипсоид и непрерывное отображение $\Pi(y): X \rightarrow \mathcal{F}_y$, где $\mathcal{F}_y \in \mathcal{F}(X)$ и $\dim \mathcal{F}_y = N$. Бицилиндрами в X называются множества вида $\mathcal{E}(\mathcal{F}; \alpha) \oplus B_\delta(1 - \Pi)$, состоящие из элементов $y \in X$, единственным образом представимых в виде $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in \mathcal{E}(\Pi; \alpha)$, $y_2 \in B_\delta(1 - \Pi) \subset (1 - \Pi)X$. Для $A \subset X$ положим

$$\hat{\alpha}_k = \sup_{y \in A} \alpha_k(y), \quad \hat{\omega}_k = \sup_{y \in A} \omega_k(\alpha(y)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $A \subset X$. Многозначное отображение $F: A \rightarrow 2^X$ называется N -сжимающим множество A в X , если существует $r_0 > 0$ такое, что для любого $y \in A$ найдется непрерывный проектор $\Pi(y): X \rightarrow \mathcal{F}_y$ ($\dim \mathcal{F}_y = N$) такой, что при $r < r_0$

$$F((y + B_r) \cap A) \subset F(y) + r(\mathcal{E}(\Pi(y); \alpha(y)) \oplus B_{\delta(y)}(1 - \Pi(y))),$$

где $\alpha(y) = (\alpha_1(y), \dots, \alpha_N(y))$, $\alpha_1(y) \geq \alpha_2(y) \geq \dots \geq \alpha_N(y) \geq \delta(y) > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – компакт в гильбертовом пространстве X , полуинвариантный относительно N -сжимающего многозначного отображения $F: A \rightarrow 2^X$, для любого $y_i \in A$ $F(y_i)$ – компакт в X , $r_0 > 0$ – такое, что $F(y_i)$ можно покрыть $d(i)$ шарами радиусов $r_i \leq r_0$, и существуют $\beta > N$, $k \geq 1$, $l > 0$ такие, что для любого конечного набора $\{y_i\} \subset A$

$$\sum_i r_i^\beta d(i) \leq k \sum_i r_i^\beta + l. \quad (5)$$

Если, кроме того,

$$\hat{\alpha}_i < \infty, \quad \hat{\delta} = \sup_{y \in A} \delta(y) < \frac{1}{2},$$

то

$$\dim_H(A) \leq N \ln \left(C_N (\varepsilon \hat{\delta})^{-1} (k \hat{\omega}_N)^{1/N} \right) / \ln \left(\frac{1}{4 \hat{\delta} \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \right),$$

где ε выбирается из условия $4 \hat{\delta} \sqrt{1 + \varepsilon^2} < 1$ и $C_N = 1 + \sqrt{N}$.

Если же $4 \sqrt{2} C_N (k \hat{\omega}_N)^{1/N} < 1$, то $\dim_H(A) \leq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим измельчающую последовательность покрытий U_k , $k = 0, 1, \dots$, множества A шарами. Пусть U_0 – набор шаров $y_i + B_{r_i}$, $i = 1, \dots, n(U_0)$, $y_i \in A$, $r_i \leq r_0$, объединение которых покрывает A . Тогда в силу полуинвариантности A относительно F совокупность $F((y_i + B_{r_i}) \cap A)$ также образует некоторое покрытие множества A , причем

$$\begin{aligned} F((y_i + B_{r_i}) \cap A) &\subset F(y_i) + r_i(\mathcal{E}(\Pi(y_i); \alpha(y_i)) \oplus B_{\delta(y_1)}(1 - \Pi(y_i))) \\ &\subset F(y_i) + r_i(P(\Pi(y_i); \alpha(y_i)) \oplus B_{\delta(y_1)}(1 - \Pi(y_i))), \end{aligned}$$

где $P(\Pi(y_i); \alpha(y_i))$ – параллелепипед в $\mathcal{F}_{y_i} = \Pi(y_i)X$ ($\dim \mathcal{F}_{y_i} = N$) со сторонами $2\alpha_k(y_i)$, $k = 1, \dots, N$. Покроем $P(\Pi(y_i); \alpha(y_i))$ кубами K^{ij} , $j = 1, \dots, m(i)$, со стороной $2\delta(y_i)\varepsilon/\sqrt{N}$. При этом диаметр $K^{ij} \oplus B_{\delta(y_i)}(1 - \Pi(y_i))$ равен $\gamma_i = 2\delta(y_i)\sqrt{1 + \varepsilon^2}$. Множество $F(y_i)$ компактно, и оно содержится в

$$\bigcup_{\nu=1}^{d(i)} (\xi_{i\nu} + B_{r_i\gamma_i}),$$

где $d(i)$ – конечное число, а $\xi_{i\nu} \in F(y_i)$.

Рассмотрим множество $(F(y_i) + r_i(K^{ij} \oplus B_{\delta(y_1)})) \cap A$ и предположим, что оно непусто. Тогда найдется ν такое, что

$$A_{ij\nu} = ((\xi_{i\nu} + B_{r_i\gamma_i}) + r_i(K^{ij} \oplus B_{\delta(y_1)})) \cap A \neq \emptyset.$$

Множество $A_{ij\nu}$ содержится в шаре $\zeta_{ij\nu} + B_{2r_i\gamma_i}$, где $\zeta_{ij\nu} \in A$, $i = 1, \dots, n(U_0)$, $j = 1, \dots, m(i)$, $\nu = 1, \dots, d(i)$, и совокупность таких шаров образует новое покрытие множества A , которое обозначим через U_1 . Покрытию U_0 соответствует число

$$m_{\beta, r_0}(U_0) = \sum_{i=1}^{n(U_0)} r_i^\beta, \quad \beta > 0,$$

а покрытию U_1 –

$$m_{\beta, 2\gamma r_0}(U_1) = 2^\beta \sum_{i=1}^{n(U_0)} \gamma_i r_i^\beta d(i) m(i).$$

Нетрудно подсчитать [3], [6], что

$$m(i) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{\alpha_k(y_i)\sqrt{N}}{\delta(y_i)\varepsilon} + 1 \right) \leq C_N^N \frac{\omega_N(y_i)}{(\delta(y_i)\varepsilon)^N}, \quad C_N = 1 + \sqrt{N}.$$

С учетом этого неравенства и оценки (5) при $\beta \geq N$ ($\gamma = 2\delta\sqrt{1 + \varepsilon^2} < 1/2$) получаем

$$\begin{aligned} m_{\beta, 2\gamma r_0}(U_1) &= 2^\beta \sum_{i=1}^{n(U_0)} \gamma_i^\beta m(i) r_i^\beta d(i) \leq 2^\beta C_N^N \sum_{i=1}^{n(U_0)} (\gamma_i r_i)^\beta \left(\frac{\omega_N(y_i)}{\delta(y_i)\varepsilon} \right)^N d(i) \\ &\leq 2^\beta C_N^N \widehat{\omega}_N(\varepsilon\widehat{\delta})^{-N} \sum_{i=1}^{n(U_0)} (\gamma_i r_i)^\beta d(i) \\ &\leq 2^\beta C_N^N \widehat{\omega}_N(\varepsilon\widehat{\delta})^{-N} \left(k \sum_{i=1}^{n(U_0)} \gamma_i^\beta r_i^\beta + l \right) \leq \eta m_{\beta, r_0}(U_0) + \sigma, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\eta = 2^\beta k C_N^N \widehat{\omega}_N(\varepsilon \widehat{\delta})^{-N} (2\widehat{\delta}\sqrt{1+\varepsilon^2})^\beta$, $\sigma = 2^\beta l C_N^N \widehat{\omega}_N(\varepsilon \widehat{\delta})^{-N}$. Выберем β из условия $\eta < 1$, т.е.

$$\beta > N \ln(C_N(\varepsilon \widehat{\delta})^{-1} (k\widehat{\omega}_N)^{1/N}) / \ln\left(\frac{1}{4\widehat{\delta}\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right).$$

Таким образом, справедлива оценка (6) с $\eta < 1$ и $\gamma < 1/2$. С помощью U_1 аналогичным образом строим новое покрытие U_2 , для которого

$$m_{\beta, 4\gamma^2 r_0}(U_2) \leq \eta m_{\beta, 2\gamma r_0}(U_1) + \sigma \leq \eta^2 m_{\beta, r_0}(U_0) + \eta\sigma + \sigma.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, убеждаемся, что β -мера хаусдорфова множества A конечна и не превосходит $\sigma/(1-\eta)$, следовательно, $\dim_H(A) \leq \beta$.

Предположим теперь, что $4\sqrt{2}C_N \widehat{\omega}_N^{1/N} < 1$. Тогда $\widehat{\omega}_N^{1/N} < 1/(4\sqrt{2})$. Так как всегда $\widehat{\delta} \leq \widehat{\alpha}_N \leq \widehat{\omega}_N^{1/N} < 1/(4\sqrt{2})$, в формуле (5) можно положить $\varepsilon = 1$, что дает $\dim_H(A) \leq N$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 с $\widehat{\delta} \leq 1/(4\sqrt{2})$. Тогда

$$\dim_f A \leq N \ln(C_N k^{1/N} \kappa_N \widehat{\delta}^{-1}) / \ln\left(\frac{1}{4\sqrt{2}\widehat{\delta}}\right), \quad \kappa_N = \max_{l=0, \dots, N} (\widehat{\omega}_l^{1/N} \widehat{\delta}^{1-l/N}).$$

Если при этом $4\sqrt{2}C_N k^{1/N} \kappa_N < 1$, то $\dim_f(A) \leq N$.

Доказательство строится аналогично доказательству теоремы 2 с той лишь разницей, что покрытия U_k состоят из шаров с фиксированными радиусами. Так покрытие U_0 состоит из набора $y_i + B_{r_0}$, $i = 1, \dots, n(U_0)$, и ему соответствует число $m_{\beta, r_0}(U_0) = r_0^\beta n(U_0)$. Кроме того, параллелепипед $P(\Pi(y_i); \alpha(y_i))$ покрывается кубами K^{ij} со стороной $2\widehat{\delta}/\sqrt{N}$, и их число оценивается так:

$$m(i) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{\alpha_k(i)\sqrt{N}}{\widehat{\delta}} + 1 \right) \leq C_N^N \frac{\omega_{l(i)}\alpha(y_i)}{\widehat{\delta}^{l(i)}} \leq C_N^N \frac{\widehat{\omega}_{l(i)}}{\widehat{\delta}^{l(i)}},$$

где индекс $l(i)$ выбирается из условий

$$\alpha_1(y_i) \geq \dots \geq \alpha_{l(i)}(y_i) > \widehat{\delta} \geq \alpha_{l(i)+1}(y_i) \quad \text{и} \quad l(i) = \begin{cases} N, & \text{если } \widehat{\delta} < \alpha_N(y_i), \\ 0, & \text{если } \widehat{\delta} \geq \alpha_1(y_i), \end{cases}$$

причем $\omega_0 = 1$. При этом покрытие U_1 состоит из элементов вида $\xi_{ij\nu} + B_{2r_0\gamma}$, где $\xi_{ij\nu} \in A$, r_0 – радиусы элементов U_0 , $i = 1, \dots, n(U_0)$, $j = 1, \dots, m(i)$, $\nu = 1, \dots, d(i)$.

Таким образом, при $\beta \geq N$

$$\begin{aligned} m_{\beta, 2\gamma r_0}(U_1) &= \sum_{i=1}^{n(U_0)} (2\gamma)^\beta r_0^\beta m(i) d(i) \leq 2^\beta C_N^N \sum_{i=1}^{n(U_0)} (\gamma r_0)^\beta d(i) \frac{\widehat{\omega}_{l(i)}}{\widehat{\delta}^{l(i)}} \\ &\leq 2^\beta C_N^N \widehat{\delta}^{-N} \kappa_N^N \sum_{i=1}^{n(U_0)} (\gamma r_0)^\beta d(i) \leq \eta m_{\beta, r_0}(U_0) + s, \end{aligned}$$

где $\eta = (4\sqrt{2})^\beta k \widehat{\delta}^{\beta-N} (C_N \kappa_N)^N$, $s = 2^\beta l (C_N \kappa_N)^N \widehat{\delta}^{-N}$.

Снова выбираем β так, чтобы $\eta < 1$, т.е.

$$\beta > N \ln(C_N k^{1/N} \kappa_N \widehat{\delta}^{-1}) / \ln\left(\frac{1}{4\sqrt{2}\widehat{\delta}}\right).$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На основании утверждений теорем 2, 3 и формулы (1) можно аналогично теореме 1 получить соответствующие оценки, используя разбиение $A = \bigcup_i A_i$, где каждому A_i соответствует N_i -сжимающий оператор $F_i: A_i \rightarrow 2^X$, относительно которого множество A_i полуинвариантно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных включений. М.: Наука, 1989.
- [2] Ладыженская О. А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 25–60.
- [3] Ладыженская О. А. Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Вып. 19. Записки научн. семин. ЛОМИ. 1987. Т. 163. С. 105–129.
- [4] Вишик М. И., Чепыжов В. В. Аттракторы неавтономных динамических систем и оценка их размерности // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 141–143.
- [5] Ладыженская О. А. Некоторые дополнения и уточнения к моим публикациям по теории аттракторов для абстрактных полугрупп // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Вып. 21. Записки научн. семин. ЛОМИ. 1990. Т. 182. С. 102–112.
- [6] Douady A., Oesterlé J. Dimension de Hausdorff des attracteurs // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1980. V. 290. № 24. P. 1135–1138.
- [7] Иваненко В. И., Мельник В. С. Вариационные неравенства и стабилизация нелинейных распределенных систем // Докл. АН УССР. Сер. А. 1989. № 2. С. 67–70.
- [8] Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М., 1948.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, г. Киев

Поступило

25.05.93

Исправленный вариант

24.04.97