Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Р. Каюмов, Точные оценки интегральных средних для трех классов областей, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 510–516

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:17:32

УДК 517.54

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ ТРЕХ КЛАССОВ ОБЛАСТЕЙ

И. Р. Каюмов

В работе доказана точная оценка

$$\int_0^{2\pi} |F'(e^{i\theta})|^p d\theta \leq \sqrt{\pi} 2^{1+p} \frac{\Gamma(1/2 + p/2)}{\Gamma(1 + p/2)}, \quad p > -1,$$

где F – конформное отображение области $D^- = \{\zeta: |\zeta| > 1\}$ на внешность выпуклой кривой, $F'(\infty) = 1$. При $p = 1$ этот результат принадлежит Поля и Шифферу. Получены также несколько обобщений этой оценки при других геометрических предположениях о строении области $F(D^-)$.

Библиография: 15 названий.

Как обычно, обозначим через S класс аналитических и однолистных в круге $D = \{|z| < 1\}$ функций f с нормировкой $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, а через Σ – класс аналитических и однолистных во внешности единичного круга $D^- = \{|\zeta| > 1\}$ функций F с разложением

$$F(\zeta) = \zeta + a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \dots$$

в окрестности точки $\zeta = \infty$. Через K обозначим подкласс функций класса S , которые отображают круг на почти-выпуклую область в смысле Каплана [1].

Используя известные результаты Бернштейна [2], Ленг [3] доказал следующее утверждение, которое является обобщением результатов, полученных Клуня, Дюреном и МакГреггем [4], [5].

Пусть Φ – выпуклая неубывающая функция на $(-\infty, +\infty)$. Тогда для любой $f \in K$ и любых $0 < r < 1$ выполнено следующее неравенство:

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\log |f'(re^{i\theta})|) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \Phi(\log |k'(re^{i\theta})|) d\theta,$$

где $k(z) = z/(1-z)^2$ – функция Кёбе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00168.

В классе Σ аналогичные вопросы оказались более сложными. А именно, не установлен даже точный порядок роста при $R \rightarrow 1$ величины

$$\int_{|\zeta|=R} |F'(\zeta)|^p d\theta, \quad -2 < p < 2.$$

Как показали Макаров [6], Карлесон и Джонс [7], сложность этой проблемы связана с тем, что граница области $F(D^-)$ для экстремальной функции должна иметь фрактальную структуру.

Лучшие верхние оценки этой величины принадлежали Поммеренке [8]. В 1999 г. Бертильсону [9] удалось их слегка улучшить. Лучшие нижние оценки при $|p| < 1$ получены в работах автора [10], [11] (в этих работах даются оценки снизу для ограниченных однолистных функций, что влечет нижние оценки для функций класса Σ).

В данной работе мы докажем аналоги теоремы Ленга для трех подклассов однолистных функций.

Пусть Γ – выпуклая кривая на плоскости. Предположим, что размер кривой фиксирован условием на внешний конформный радиус: $\rho(\infty, D_\Gamma) = \rho$, где D_Γ – внешность Γ . Множество всех таких кривых обозначим через $C_\rho = \{\Gamma\}$.

В известной монографии Полия и Сегё [12, с. 38] была поставлена следующая проблема: найти точную оценку длины выпуклой кривой через внешний конформный радиус ρ . Полия и Шиффер [13] доказали следующее утверждение.

Для любой $\Gamma \in C_\rho$ имеют место точные оценки

$$2\pi\rho \leq l(\Gamma) \leq 8\rho. \quad (1)$$

Здесь $l(\Gamma)$ – длина кривой Γ .

Отметим, что оценка снизу $l(\Gamma) \geq 2\pi\rho$ доказывается просто, и равенство имеет место лишь для окружности. Доказательство правого неравенства из (1) было проведено в [2] с помощью вариационного метода для многоугольников. Случай произвольных выпуклых областей получался путем предельного перехода. В данной работе другим методом мы докажем более общий результат, который содержит в себе результат Полия и Шиффера как частный случай.

Через Σ_0 обозначим класс, содержащий функции из Σ , которые отображают внешность круга на внешность выпуклого множества.

Теперь сформулируем наш основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F \in \Sigma_0$ и $\Psi(z)$ – произвольная аналитическая в круге $\{|z-1| < 1\}$ функция. Тогда для любого $R > 1$ выполнено следующее неравенство:

$$\int_{|\zeta|=R} |\Psi(F'(\zeta))|^2 d\theta \leq \int_{|\zeta|=R} \left| \Psi\left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) \right|^2 d\theta, \quad \zeta = Re^{i\theta}.$$

В частности, при $p > -1$ для любой функции $F \in \Sigma_0$ имеет место точная оценка

$$\int_0^{2\pi} |F'(e^{i\theta})|^p d\theta \leq \sqrt{\pi} 2^{1+p} \frac{\Gamma(1/2 + p/2)}{\Gamma(1 + p/2)}.$$

В обоих неравенствах равенство достигается, например, для функции Жуковского $F(\zeta) = \zeta - 1/\zeta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В отличие от Ленга, мы не пользуемся симметризацией, а опираемся на следующий принцип мажорации для аналитических функций. А именно, рассмотрим функции $f(z)$ и $g(z)$, аналитичные в круге D , причем $f(0) = g(0)$. Функция $f(z)$ называется *подчиненной* функции $g(z)$, если $f(z) = g(\varphi(z))$, где $\varphi(z)$ аналитична в D , $|\varphi| < 1$ в D и $\varphi(0) = 0$ (см. [14, с. 356]). Справедливо следующее утверждение, принадлежащее Литтлвуду.

ЛЕММА 1 [14, с. 357]. Пусть f подчинена g и $f(0) = 0$. Тогда для любого $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Известно, что для функций класса Σ_0 справедливо неравенство Голузина (см. например [1]):

$$|F' - 1| < 1,$$

что влечет следующее представление

$$F'(\zeta) = 1 + \phi(\zeta), \quad \zeta \in D^-,$$

где функция ϕ обладает свойствами: $|\phi(\zeta)| < 1$ для $\zeta \in D^-$ и в окрестности точки $\zeta = \infty$ имеет разложение $\phi(\zeta) = d_2/\zeta^2 + d_3/\zeta^3 + \dots$.

Переходя к кругу D с помощью замены $\zeta = 1/z$, имеем $F'(1/z) = 1 + \psi(z)$, где $\psi(z) = d_2 z^2 + d_3 z^3 + \dots$ — аналитическая в круге D функция, область значений которой лежит также в D .

Введем функцию $g(z) = \Psi(1 + \psi(z/R)) - \Psi(1)$, которая, очевидно, подчинена функции $\Psi(1 + z/R^2) - \Psi(1)$ в силу леммы Шварца [14, с. 319]. Без ограничения общности можно считать, что $\Psi(1)$ является вещественным числом.

Применяя к g лемму 1 и переходя к пределу при $r \rightarrow 1$, получаем

$$\int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| \Psi\left(1 + \frac{e^{i\theta}}{R^2}\right) - \Psi(1) \right|^2 d\theta,$$

что эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |\Psi(F'(Re^{-i\theta}))|^2 d\theta + 2\Psi(1) \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \Psi(F'(Re^{-i\theta})) d\theta + 2\pi\Psi(1)^2 \\ & \leq \int_0^{2\pi} \left| \Psi\left(1 + \frac{e^{i\theta}}{R^2}\right) \right|^2 d\theta + 2\Psi(1) \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \Psi\left(1 + \frac{e^{i\theta}}{R^2}\right) d\theta + 2\pi\Psi(1)^2. \end{aligned}$$

По теореме о среднем для гармонических функций вторые слагаемые в левой и правой частях последнего неравенства совпадают. Поэтому получаем

$$\int_0^{2\pi} |\Psi(F'(Re^{-i\theta}))|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| \Psi\left(1 + \frac{e^{i\theta}}{R^2}\right) \right|^2 d\theta.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство

$$\int_{|\zeta|=R} |\Psi(F'(\zeta))|^2 d\theta \leq \int_{|\zeta|=R} \left| \Psi\left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) \right|^2 d\theta$$

с учетом следующего соотношения, легко проверяемого на основании равенства Парсеваля:

$$\int_0^{2\pi} \left| \Psi\left(1 + \frac{e^{i\theta}}{R^2}\right) \right|^2 d\theta = \int_{|\zeta|=R} \left| \Psi\left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) \right|^2 d\theta.$$

Заметим, что непосредственное применение леммы Литтлвуда к функции $\Psi(F'(1/z))$ дало бы лишь неточную оценку.

Для доказательства второго утверждения теоремы 1 положим $\Psi_p(z) = z^{p/2}$, где ветвь фиксирована условием $\Psi_p(1) = 1$. Применяя первую часть теоремы 1 и переходя к пределу при $R \rightarrow 1$ на основании теоремы Рисса [14, с. 390], получаем

$$\int_0^{2\pi} |F'(e^{i\theta})|^p d\theta \leq 2^{2+p} \int_0^{\pi/2} \cos^p \theta d\theta = 2^{1+p} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

где B – бета-функция Эйлера. Доказательство легко завершается теперь применением известного соотношения между гамма- и бета-функциями.

Полагая $p = 1$, получаем результат Поля и Шиффера.

При $R > \sqrt{2} + 1$ теорему 1 можно усилить следующим образом. Обозначим через $\Sigma^* \subset \Sigma$ класс звездных функций, т.е. функций, которые отображают круг на внешность звездного множества. Ясно, что $\Sigma_0 \subset \Sigma^*$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k} \in \Sigma^*$ и $\Psi(z)$ – произвольная аналитическая в круге $\{|z-1| < 3-2\sqrt{2}\}$ функция. Тогда для любого $R \geq \sqrt{2} + 1$ выполнено следующее неравенство:

$$\int_{|\zeta|=R} |\Psi(F'(\zeta))|^2 d\theta \leq \int_{|\zeta|=R} \left| \Psi\left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) \right|^2 d\theta, \quad \zeta = Re^{i\theta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО такое же, как и у теоремы 1, поскольку для функций класса Σ^* при $|\zeta| \geq \sqrt{2} + 1$ выполнено неравенство [14, с. 514]

$$|F'(\zeta) - 1| \leq \frac{1}{|\zeta|^2}.$$

Заметим также, что без дополнительных предположений на функцию Ψ или F , число $\sqrt{2} + 1$ не может быть заменено на меньшее. Это следует из точности оценки Голузина (см. [14, с. 514]).

Теперь перейдем к рассмотрению аналогичных вопросов в более широких классах однолистных функций. Бертильсон [9, с. 111] показал, что для достаточно малых r , зависящих от p , выполнено неравенство

$$\int_{|z|=r} |f'(z)|^p d\theta \leq \int_{|z|=r} |k'(z)|^p d\theta$$

для всех $f \in S$ при условии, что $C_n \neq 0$ для каждого $n \geq 0$, где C_n — коэффициенты ряда Тейлора для функции $1/k'(z)^p$.

Мы рассмотрим более общий вопрос для функций класса S_R , который состоит из функций класса S , тейлоровские коэффициенты которых вещественны.

Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция Φ аналитична в окрестности 1 и $\Phi(1) \neq 0$. Тогда найдется положительное число r_Φ такое, что

$$\sup_{f \in S_R} \int_{|z|=r} |\Phi(f'(z))| d\theta = \int_{|z|=r} |\Phi(k'_\pm(z))| d\theta$$

для любого $r \leq r_\Phi$, где $k_\pm(z) = z/(1 \pm z)^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\Phi(z) = \Psi^2(z)$. Далее вводя новую функцию $F(z) = \Psi(z) - \Psi(1)$, имеем

$$\int_{|z|=r} |\Psi(f'(z))|^2 d\theta = \int_{|z|=r} |F(f'(z))|^2 d\theta + 2\pi |\Psi(1)|^2.$$

Таким образом, нам нужно доказать, что

$$\sup_{f \in S_R} \int_{|z|=r} |F(f'(z))|^2 d\theta \leq \int_{|z|=r} |F(k'_\pm(z))|^2 d\theta,$$

где функция F аналитична в окрестности 1 и $F(1) = 0$. Заметим, что последнее условие в силу известной леммы Шварца влечет существование абсолютных положительных констант C_1 и r_1 таких, что для любой функции $f \in S_R$ выполнено неравенство

$$|F(f'(z))| \leq C_1 r^n, \quad r < r_1, \quad (2)$$

где n — наименьшее натуральное число такое, что $F^{(n)}(1) \neq 0$.

Пусть $f \in S_R$. Тогда f представима в виде [14]

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2} \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)},$$

где φ является аналитической в круге D функцией и $|\varphi(z)| \leq |z|$, $z \in D$. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi'(0) = a \geq 0$. Известное неравенство Бибераха

влечет оценку для a : $0 \leq a \leq 1$. Введем функцию $g_a(z) = z/(1 - az)^2$ и рассмотрим разность

$$\begin{aligned} |f(z) - g_a(z)| &= |z| \left| \frac{1}{1 - z^2} \frac{1 + \varphi}{1 - \varphi} - \frac{1}{1 - z^2} \frac{1 + az}{1 - az} + \frac{z^2(1 - a^2)}{(1 - z^2)(1 - az)^2} \right| \\ &\leq \frac{2|z||\varphi - az|}{|1 - z^2||1 - \varphi(z)||1 - az|} + \frac{|z|^3(1 - a^2)}{|1 - z^2||1 - az|^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим, теперь, разность

$$|\varphi(z) - az| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \right|.$$

Известно [14], что $|a_k| \leq (1 - a^2)$. Отсюда, $|\varphi - az| \leq (1 - a^2)r^2/(1 - r)^2$. Следовательно, найдутся положительные постоянные C_2, r_2 такие, что

$$|f(z) - g_a(z)| \leq C_2(1 - a^2)r^3, \quad r \leq r_2.$$

Полученное неравенство влечет существование положительных констант C_3, r_3 таких, что

$$|f'(z) - g'_a(z)| \leq C_3(1 - a^2)r^2, \quad r \leq r_3.$$

Отсюда следует, что существуют положительные C_4, r_4 такие, что

$$|F(f'(z)) - F(g'_a(z))| \leq C_4(1 - a^2)r^{n+1}, \quad r \leq r_4. \quad (3)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} |F(f'(z))|^2 d\theta &\leq \int_{|z|=r} |F(f'(z)) - F(g'_a(z))|^2 d\theta \\ &+ 2 \int_{|z|=r} |F(f'(z)) - F(g'_a(z))| |F(g'_a(z))| d\theta + \int_{|z|=r} |F(g'_a(z))|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Теперь, применяя неравенства (2) и (3), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} |F(f'(z))|^2 d\theta &\leq C_4^2 r^{2n+2} (1 - a^2)^2 + 2C_4(1 - a^2)C_1 r^{2n+1} \\ &+ \left| \frac{F^{(n)}(1)}{n!} \right|^2 (2ar)^{2n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|^2 (ra)^{2k}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\int_{|z|=r} |F(g'_a(z))|^2 d\theta = \left| \frac{F^{(n)}(1)}{n!} \right|^2 (2ar)^{2n} + \sum_{k=2}^{\infty} |b_k|^2 (ra)^{2k}.$$

Используя стандартные методы геометрической теории функций комплексного переменного, нетрудно убедиться, что $|b_k| \leq C_5 k^2$, где C_5 – абсолютная константа.

Максимизируя правую часть в (4) по параметру a , приходим к выводу, что при достаточно малых r максимум достигается в точке $a = 1$ (для этого достаточно убедиться, что в точках локальных экстремумов эта функция ведет себя как $O(r^{2n+n/(n-1)})$ при малых r).

Интересно отметить, что r_Φ может быть строго меньше 1, даже в случае, когда Φ аналитична во всей плоскости за исключением 0, т.е. на всей области значений производных функций из класса S . Из результатов Карлесона и Макарова [15] следует, что в случае, когда $\Phi(z) = z^p$, $-2 < p < 1/3$, выполнена оценка $r_\Phi < 1$. Заметим также, что в [10] установлено, что константу $1/3$ можно увеличить до 0.34.

В заключение хочу выразить благодарность Ф.Г. Авхадиеву за полезные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // УМН. 1975. Т. 30. № 4 (184). С. 3–60.
- [2] Baernstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization // Acta Math. 1974. V. 133. P. 139–169.
- [3] Leung Y. J. Integral means of the derivatives of some univalent functions // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. P. 289–294.
- [4] Clunie J., Duren P. L. Addendum: An arclength problem for close-to-convex functions // J. London Math. Soc. 1966. V. 41. P. 181–182.
- [5] MacGregor T. H. Applications of extreme point theory to univalent functions // Michigan Math. J. 1972. V. 19. P. 361–376.
- [6] Makarov N. G. Fine structure of harmonic measure // St. -Petersbg. Math. J. 1999. V. 10. № 2. P. 217–268.
- [7] Carleson L., Jones P. W. On coefficient problems for univalent functions and conformal dimension // Duke Math. J. 1992. V. 66. № 2. P. 169–206.
- [8] Pommerenke Ch. Boundary Behaviour of Conformal Maps. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [9] Bertilsson D. On Brennan's Conjecture in Conformal Mapping. Doctoral Thesis. Stockholm: Royal Institute Technology, 1999.
- [10] Kayumov I. R. Lower estimates for the integral means spectrum // Complex Variables. 2001. V. 44. P. 165–171.
- [11] Kayumov I. R. Lower estimate for the integral means spectrum for $p = -1$ // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 130. № 4. P. 1005–1007.
- [12] Поля Г., Серё Г. Изопериметрические неравенства математической физики. М.: Физматлит, 1962.
- [13] Pólya G., Shiffer M. Sur la représentation conforme de l'extérieur d'une courbe fermée convexe // C. R. Acad. Sci. Paris. 1959. V. 248. № 20. P. 2837–2839.
- [14] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [15] Carleson L., Makarov N. G. Some results connected with Brennan's conjecture // Ark. Mat. 1994. V. 32. P. 33–62.