Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Нурсултанов, О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 235–247

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:52:46

УДК 517.518.47

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Е. Д. Нурсултанов

В работе доказаны теоремы о мультипликаторах рядов Фурье в L_p , где условия зависят от параметра p . Построен пример, показывающий существенность этих условий. Библиография: 13 названий.

Введение. Пусть $f(x)$ – функция из $L_p(\mathbb{T}^n)$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (1)$$

– ее ряд Фурье по тригонометрической системе $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$, A – конечное подмножество $\mathbb{Z}^n = \{k = (k_1, \dots, k_n) : k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}$.

Пусть $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – последовательность комплексных чисел. Будем говорить, что $\lambda \in \mathbf{m}_p$, т.е. λ является *мультипликатором Фурье* в L_p , если для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$ с рядом Фурье (1) найдется функция $f_\lambda \in L_p(\mathbb{T}^n)$, ряд Фурье которой совпадает с рядом (1) и оператор $T_\lambda f = f_\lambda$ ограничен в $L_p(\mathbb{T}^n)$. Класс $\mathbf{m}_p$ является линейным пространством с нормой $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p} = \|T_\lambda\|_{L_p \rightarrow L_p}$.

Истоком теории мультипликаторов рядов Фурье является теорема М. Рисса [1], в которой показано, что характеристическая функция χ_I отрезка I из $\mathbb{Z}$ является мультипликатором в $L_p[0, 2\pi)$, причем $\|\chi_I\|_{\mathbf{m}_p} \leq c$, постоянная c не зависит от выбора отрезка I .

В 1939 году Марцинкевич [2] получил следующую теорему о мультипликаторах рядов Фурье.

ТЕОРЕМА (Марцинкевич). Пусть $1 < p < \infty$, последовательность вещественных чисел $\lambda = \{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ удовлетворяет условию

$$F_0(\lambda) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| + |\lambda_{-k} - \lambda_{-k-1}| \right) + \sup_{m \in \mathbb{Z}} |\lambda_m| < \infty.$$

Тогда λ – мультипликатор в $L_p[0, 2\pi)$ и $\|\lambda_m\|_{L_p} \leq c F_0(\lambda)$.

В теореме Марцинкевича условия на последовательность λ одинаковы для всех $1 < p < \infty$, т.е. не зависят от параметра p . Возникает задача о получении достаточных условий принадлежности λ пространству $\mathbf{m}_p$, существенно зависящих от параметра p . Эта проблема достаточно широко обсуждалась в книге И. Стейна [3].

В данной работе получены теоремы о мультипликаторах рядов Фурье, в которых условия зависят от p . Построен пример, показывающий точность этих теорем по параметру p .

1. Об ограниченности частичных сумм рядов Фурье. Пусть $f(x)$ – функция из $L_p(\mathbb{T}^n)$, A – конечное подмножество $\mathbb{Z}^n$. Тригонометрический многочлен

$$S_A(f) = \sum_{k \in A} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

назовем *частичной суммой ряда Фурье* функции $f(x)$, соответствующей множеству индексов A .

Если A – отрезок (т.е. параллелепипед) в $\mathbb{Z}^n$, то, как следует из теоремы М. Рисса,

$$\|S_A(f)\|_p \leq C \|f\|_p, \quad (2)$$

где C зависит только от параметра p . Если в качестве A берутся произвольные множества, постоянная C в (2) зависит от геометрических свойств множества A , размерности n и параметра p . Если A – многоугольник в $\mathbb{Z}^n$, исследованию константы C посвящены работы [4]–[10]. В этом пункте исследуется зависимость константы C из (2) от структурных свойств множества A , а именно, от представления множества в виде объединения некоторых “элементарных” множеств (отрезков, гармонических отрезков).

Пусть $B = \{n, n+1, \dots, n+l\}$ – отрезок в $\mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$, $d > l$. Множество вида $I = \bigcup_{k=0}^N [B + kd] = \bigcup_{k=0}^N \{m + kd : m \in B\}$ назовем *гармоническим отрезком* в $\mathbb{Z}$, а множество $J = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [B + kd]$ – *гармоническим интервалом* в $\mathbb{Z}$. Тогда множество вида $I = I_1 \times \dots \times I_n$, где I_i – гармонические отрезки в $\mathbb{Z}$, называется *гармоническим отрезком* в $\mathbb{Z}^n$, а множество $J = J_1 \times \dots \times J_n$, где J_i – гармонические интервалы в $\mathbb{Z}$, называется *гармоническим интервалом* в $\mathbb{Z}^n$.

Ясно, что всякий отрезок в $\mathbb{Z}^n$ является гармоническим отрезком в $\mathbb{Z}^n$.

Пусть $J = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} (B + md)$ – гармонический интервал, $I_k = \bigcup_{m \in Q_k} (B + md)$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность гармонических отрезков, соответствующих гармоническому интервалу J и последовательности отрезков $Q_k = \{m \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq |m_j| \leq k, j = 1, \dots, n\}$. Здесь $m = (m_1, \dots, m_n)$, $d = (d_1, \dots, d_n)$, $md = (m_1 d_1, \dots, m_n d_n)$.

Хорошо известно следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $d \in \mathbb{N}$. Тогда

$$D_m = \frac{1}{d} \sum_{r=0}^{d-1} e^{i2\pi r m/d} = \begin{cases} 1, & m \text{ кратно } d, \\ 0, & m \text{ не кратно } d. \end{cases}$$

ЛЕММА 2. Пусть $B = B_1 \times \dots \times B_n$ – отрезок в $\mathbb{Z}^n$, $Q_k = \{m \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq |m_j| \leq k, j = 1, \dots, n\}$, $k \in \mathbb{N}$,

$$I_k = \bigcup_{r \in Q_k} (B + rd) = \bigcup_{r \in Q_k} (B_1 + r_1 d_1) \times \dots \times (B_n + r_n d_n)$$

– последовательность гармонических отрезков в $\mathbb{Z}^n$, сходящаяся к гармоническому интервалу J .

Если

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(m) e^{imx} \in L_p[0, 2\pi],$$

то последовательность частичных сумм

$$S_{I_k}(f) = \sum_{m \in I_k} \widehat{f}(m) e^{imx}$$

сходится в $L_p(\mathbb{T}^n)$ к функции

$$\begin{aligned} S_J(x) &= \frac{1}{d} \sum_{0 \leq r \leq d-1} f\left(x + \frac{2\pi r}{d}\right) D_B\left(\frac{2\pi r}{d}\right) \\ &= \frac{1}{d_1} \cdots \frac{1}{d_n} \sum_{r_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{d_n-1} f\left(x_1 + \frac{2\pi r_1}{d_1}, \dots, x_n + \frac{2\pi r_n}{d_n}\right) D_B\left(\frac{2\pi r_1}{d_1}, \dots, \frac{2\pi r_n}{d_n}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $D_B(x) = \sum_{m \in B} e^{imx}$ – ядро Дирихле, соответствующее отрезку B из $\mathbb{Z}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $S_J(x)$ принадлежит пространству $L_p(\mathbb{T}^n)$, как конечная линейная комбинация функций из $L_p(\mathbb{T}^n)$. Покажем, что ее коэффициенты Фурье совпадают с коэффициентами Фурье $\widehat{f}(m)$ функции $f(x)$ при $m \in J = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ и равны 0 при $m \notin J$. Имеем

$$\begin{aligned} S_J(x) &= \frac{1}{d} \sum_{0 \leq r \leq d-1} f\left(x + \frac{2\pi r}{d}\right) D_B\left(\frac{2\pi r}{d}\right) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{1}{d} \sum_{0 \leq r \leq d-1} e^{2\pi r m/d} D_B\left(\frac{2\pi r}{d}\right) \right) \widehat{f}(m) e^{imx} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} b_m \widehat{f}(m) e^{imx}. \end{aligned}$$

Таким образом, необходимо показать, что

$$b_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m \in J, \\ 0 & \text{при } m \notin J. \end{cases} \quad (4)$$

Несложные вычисления дают

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{d} \sum_{0 \leq r < d} e^{2\pi r m/d} \sum_{k \in B} e^{-i2\pi r k/d} = \sum_{k \in B} \frac{1}{d} \sum_{0 \leq r < d} e^{i2\pi r(m-k)/d} \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{d_j} \sum_{k_j \in B_j} \sum_{r_j=0}^{d_j} e^{i2\pi r_j(m_j - k_j)/d_j}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что $m_j - k_j$ может быть кратно числу d_j лишь при одном $k_j^0 \in B_j$, так как $|B_j| < d_j$. Таким образом, если найдется $k_j^0 \in B_j$ такое, что $m_j - k_j^0$ будет кратно d_j , то по лемме 1

$$\frac{1}{d_j} \sum_{r_j=0}^{d_j} e^{i2\pi r_j(m_j - k_j^0)/d_j} = 1.$$

Но кратность $m_j - k_j^0$ числу d_j при $k_j^0 \in B_j$ означает представление $m_j \in k_j^0 + s d_j$, $s \in \mathbb{Z}$. Это, в свою очередь, может произойти лишь в случае $m_j \in \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} (B_j + s d_j) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^j$.

Если же $m_j \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^j$, т.е. $m_j - k_j$ не кратно d ни при каком $k_j \in B_j$, то согласно лемме 1

$$\frac{1}{d_j} \sum_{r_j=0}^{d_j} e^{i2\pi r_j(m_j - k_j^0)/d_j} = 0.$$

Это доказывает формулу (4), поскольку

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^1 \times \cdots \times \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = J.$$

Следовательно, рядом Фурье функции $S_J(x)$ является

$$\sum_{m \in J} \hat{f}(m) e^{imx},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оператор, определенный равенством (3), является интегральной суммой, соответствующей равномерному разбиению тора $\mathbb{T}^n$, интеграла

$$S_B(f, x) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x+y) D_B(y) dy, \quad (5)$$

являющегося, в свою очередь, частичной суммой ряда Фурье, соответствующей параллелепипеду $B \in \mathbb{Z}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нетрудно убедиться (анализируя доказательство), что в неравенствах теоремы об ограниченности частичной суммы и теоремы Литтлвуда–Пэли при $1 < p < 2$ (см. [1], [5]) соответствующие константы ограничены числом $p'C$, где $p' = p/(p-1)$, т.е. константы растут при $p \rightarrow 1$ не быстрее, чем $(p-1)^{-1}$. Этот факт используется нами в дальнейшем.

ЛЕММА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, J – гармонический интервал. Оператор $S_J(f)$ из леммы 2 является оператором (p, p) -сильного типа и верно неравенство

$$\|S_J(f)\|_{L_p} \leq p'C \|f\|_{L_p},$$

где константа C не зависит от p , J и $f \in L_p$.

Доказательство проводится так же, как и для частичных сумм (5). Следует только следить за константами в соответствующих неравенствах (см. замечания 1 и 2).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, I – произвольный гармонический отрезок в $\mathbb{Z}^n$, $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$. Тогда

$$\|S_I(f)\|_{L_p} \leq p'^2 C \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)},$$

где C не зависит от p , f и I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J – гармонический интервал в $\mathbb{Z}^n$ такой, что $J \cap I = I$. Тогда найдется отрезок Q в $\mathbb{Z}^n$ такой, что $J \cap Q = I$. Следовательно, $S_I(f)(x) = S_Q(S_J(f))(x)$. Поэтому, учитывая замечание 2, леммы 2 и 3, имеем

$$\|S_I(f)\|_{L_p} = \|S_Q(S_J(f))\|_{L_p} \leq p' C_1 \|S_J(f)\| \leq p'^2 C_2 \|f\|_{L_p}.$$

Следствие доказано.

Пусть $\Delta_k = \{m \in \mathbb{Z}^n : 2^{|k_j|} \leq m_j \text{ sign } k_j < 2^{|k_j|+1}, j = 1, \dots, n\}, k \in \mathbb{Z}^n$. Тогда $\mathbb{Z}^n$ можно представить в виде $\mathbb{Z}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} \Delta_k$. Это представление называется *двоичным разложением решетки* $\mathbb{Z}^n$.

Конечное множество I из $\mathbb{Z}^n$ будем называть *гармоническим отрезком типа Сидона*, если найдутся гармонический интервал J_0 и последовательность векторов $\{r_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ из $\mathbb{Z}^n$ такие, что для любого $k \in \mathbb{Z}^n$

$$I \cap \Delta_k = (J_0 - r_k) \cap \Delta_k. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так как гармонический интервал по каждому декартову направлению имеет свой период, если для $r_k = \{r_1^k, \dots, r_n^k\}$ выполнено (6), то для векторов $(r_1^k + d_1 m_1, \dots, r_n^k + d_n m_n), m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ также имеет место соотношение (6).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Любой гармонический отрезок является гармоническим отрезком типа Сидона.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть A – множество Сидона в $\mathbb{Z}^n$, т.е. $A = \{(b_1^k, \dots, b_n^k)\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{Z}^n$ таково, что

$$\left| \frac{b_j^{k+1}}{b_j^k} \right| \geq \alpha > 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда любое конечное подмножество этого множества можно представить в виде объединения гармонических отрезков типа Сидона, причем их количество зависит только от α . Так, если $\alpha \geq 2$, то любое конечное подмножество A есть гармонический отрезок типа Сидона.

Множество всех гармонических отрезков типа Сидона обозначим через S_0 .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p < \infty, I \in S_0$. Если $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$, то

$$\|S_I(f)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \leq C p'^4 \|f\|_{L_p},$$

где константа C не зависит от p , гармонического отрезка I и функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – гармонический отрезок, $\Delta_{k_1}, \dots, \Delta_{k_N}$ – элементы двоичного разбиения $\mathbb{Z}^n$, с которыми I имеет непустое пересечение. Тогда, учитывая определение гармонического отрезка типа Сидона и замечание 3, нетрудно показать, что найдутся гармонический интервал J_0 , векторы с целочисленными координатами $r_1 = (r_1^1, \dots, r_n^1), \dots, r_N = (r_1^N, \dots, r_n^N)$ такие, что

- 1) $S_I(f_{k_j}) = S_{J_0}(e^{ir_j x} f_{k_j})$, где $S_B = \sum_{m \in B} \hat{f}(m) e^{imx}, f_{k_j} = S_{\Delta_{k_j}}(f), j = 1, \dots, N$;
- 2) множества $\Delta_{k_j} + r_j, j = 1, \dots, N$, являются подмножествами различных элементов двоичного разбиения пространства $\mathbb{Z}^n$.

Пусть

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^N e^{ir_j x} f_{k_j}(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|S_I(f)\|_{L_p} &= \left\| \sum_{j=1}^N S_I(f_{k_j}) \right\|_{L_p} = \left\| \sum_{j=1}^N S_{J_0}(e^{ir_j x} f_{k_j}) \right\|_{L_p} \\ &= \left\| S_{J_0} \left(\sum_{j=1}^N e^{ir_j x} f_{k_j} \right) \right\|_{L_p} = \|S_{J_0}(f_0)\|_{L_p}. \end{aligned}$$

Из леммы 3 следует, что

$$\|S_I(f)\|_{L_p} = \|S_{J_0}(f_0)\|_{L_p} \leq c p'^2 \|f_0\|_{L_p}.$$

Учитывая выбор векторов $r_1, \dots, r_N$, из теоремы Литтлвуда–Пэли и замечания 2 имеем

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{L_p} &\leq p'^3 c_1 \left\| \left(\sum_{j=1}^N |e^{ir_j x} S_{\Delta_{k_j}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p} \\ &\leq p'^3 c_2 \left\| \left(\sum_{j=1}^N |S_{\Delta_{k_j}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p} \leq p'^4 c \|f\|_{L_p}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. Пусть оператор T представим в виде суммы линейных операторов:

$$T = \sum_{j=1}^N T_j,$$

где каждый оператор удовлетворяет следующим условиям:

- а) $\|T_j\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq p'^\alpha D$ при $1 < p \leq 2$, где D не зависит от p ;
- б) $\|T\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq D$.

Тогда при $1 < p \leq 2$

$$\|Tf\|_{L_p} \leq c_p D (N(\ln N)^\alpha)^{|1/p-1/p'|} \|f\|_{L_p},$$

т.е. $\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq c_p D (N(\ln N)^\alpha)^{|1/p-1/p'|}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < p_0 \leq 1 + 1/4$. Тогда из условий леммы имеем

$$\|Tf\|_{L_{p_0}} \leq \sum_{j=1}^N \|T_j f\|_{L_p} \leq D p_0'^\alpha N \|f\|_{L_{p_0}}, \quad (7)$$

т.е. норма оператора $T: L_{p_0} \rightarrow L_{p_0}$ не больше чем $D p_0'^\alpha N$. С другой стороны, норма оператора $T: L_2 \rightarrow L_2$ не больше чем D . Согласно методу комплексной интерполяции получаем, что $T: L_p \rightarrow L_p$, где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/2$, причем верна оценка

$$\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq D(p_0'^\alpha N)^{1-\theta}.$$

Теперь оценим выражение $(p_0'^\alpha N)^{1-\theta}$, считая $1 < p_0 < 5/4$. Имеем

$$(p_0'^\alpha N)^{1-\theta} \leq 16(x^{-\alpha} N^{1+x})^{1/p-1/p'},$$

где $x = 2/(p' - 2)$. Минимизируя по x из $(0, 1]$, получим, что минимум достигается при $x = [(\ln N)/\alpha]^{-1}$. Поэтому

$$\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq c_p D [(\ln N)^\alpha N]^{1/p-1/p'} \quad \text{при } 1 + \frac{\alpha}{2 \ln N + \alpha} \leq p \leq 2.$$

Пусть теперь $1 < p \leq 1 + \alpha/(2 \ln N + \alpha)$, следовательно, $p' \geq 1 + (2 \ln N)/\alpha \geq (2 \ln N)/\alpha$. Из неравенства (7) имеем

$$\begin{aligned} \|T\|_{L_p \rightarrow L_p} &\leq p' N D = p' N^{1/p-1/p'} N^{2/p'} D \leq p' N^{1/p-1/p'} e^\alpha D \\ &\leq p' N^{1/p-1/p'} (e \ln N)^{\alpha(1/p-1/p')} D. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть A – конечное подмножество $\mathbb{Z}^n$. Его всегда можно представить в виде конечного объединения непересекающихся отрезков из S :

$$A = \bigcup_{j=1}^l I_j, \quad (8)$$

причем не единственным образом. Через $[A]$ обозначим наименьшее число гармонических отрезков типа Сидона, входящих в представление (8), т.е.

$$[A] = \min \left\{ l : A = \bigcup_{j=1}^l I_j, I_j \cap I_i = \emptyset \text{ при } i \neq j, I_j \in S \right\}.$$

Здесь минимум берется по всевозможным представлениям вида (8).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, A – конечное подмножество $\mathbb{Z}^n$. Тогда имеет место оценка

$$\|S_A(f)\|_{L_p(\mathbb{T}^n)} \leq c([A](\ln[A])^4)^{|1/p-1/p'|} \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^n)},$$

где c зависит только от параметра p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I_1, \dots, I_{[A]}$ – последовательность отрезков из S таких, что

$$A = \bigcup_{j=1}^{[A]} I_j,$$

т.е. $I_1, \dots, I_{[A]}$ определяют оптимальное представление вида (8) множества A .

Из теоремы 1 следует, что существует константа c , не зависящая от функции f и от чисел j и p , такая, что для частичных сумм $S_{I_j}(f)$ имеет место неравенство

$$\|S_{I_j}(f)\|_{L_p} \leq p'^4 c \|f\|_{L_p}.$$

Из равенства Парсеваля вытекает неравенство

$$\|S_A(f)\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2}.$$

Следовательно, операторы $T_j = S_{I_j}(f)$, $j = 1, \dots, [A]$, и $T = \sum_{j=1}^{[A]} T_j$ удовлетворяют условиям леммы 4. Отсюда следует утверждение теоремы при $1 < p < 2$. Оставшийся случай $2 < p < \infty$ вытекает из свойств симметрии оператора взятия частичной суммы.

2. Мультипликаторы рядов Фурье.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$ и для вещественной последовательности $\lambda = \{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ выполнено

$$F_p^1(\lambda) = \sup_k \sum_{r=1}^{|Q_k|} (\lambda_r^* - \lambda_{r+1}^*) ([A_r](\ln[A_r])^4)^{|1/p-1/p'|} + |\lambda_{|Q_k|}^*| < \infty,$$

где $Q_k = \{m \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq |m_j| \leq k, j = 1, \dots, n\}$, $\{\lambda_r^*\}_{r=1}^{|Q_k|}$ – невозрастающая перестановка (учитывающая знак) последовательности $\{\lambda_m\}_{m \in Q_k}$, $A_r = \{m \in Q_k : \lambda_m > \lambda_r^*\}$. Тогда $\lambda \in \mathbf{m}_p$ и $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p} \leq c_p F_p^1(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим преобразование Абеля и неравенство Минковского:

$$\left\| \sum_{m \in Q_k} \lambda_m a_m e^{imx} \right\|_{L_p} \leq \sum_{r=1}^{|Q_k|} (\lambda_r^* - \lambda_{r+1}^*) \|S_{A_r}(f)\|_{L_p} + \lambda_{|Q_k|}^* \|S_{Q_k}(f)\|_{L_p},$$

где $S_{A_r}(f) = \sum_{m \in A_r} a_m e^{imx}$.

Используя теорему 2, получим

$$\left\| \sum_{m \in Q_k} \lambda_m a_m e^{imx} \right\|_{L_p} \leq c_p \left(\sum_{r=1}^{|Q_k|} (\lambda_r^* - \lambda_{r+1}^*) ([A_r](\ln[A_r])^4)^{|1/p-1/p'|} + |\lambda_{|Q_k|}^*| \right) \|f\|_p.$$

Теорема доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $1 < p < \infty$ и $\lambda = \{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ – последовательность комплексных чисел из ℓ_r , где $1/r = |1/2 - 1/p|$. Тогда $\lambda \in \mathbf{m}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $2 < p < \infty$. Применим последовательно неравенство Харди–Литтлвуда и неравенство Гёльдера:

$$\left\| \sum_{k=-N}^N \lambda_k a_k e^{ikx} \right\|_{L_p} \leq c \|\lambda a\|_{\ell_{p'}} \leq c \|a\|_{\ell_2} \cdot \|\lambda\|_{\ell_r} \leq c \|f\|_{L_2} \cdot \|\lambda\|_{\ell_r} \leq c_p \|f\|_{L_p} \cdot \|\lambda\|_{\ell_r}.$$

Случай $1 < p \leq 2$ следует из соотношения $\mathbf{m}_p = \mathbf{m}_{p'}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < \infty$, $1/r = |1/p - 1/2|$. Если последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что

$$F_p^2(\lambda) = \inf_{\mu=\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}} \sup_m \left(|\mu_{2^{m+1}}| + \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\mu_k - \mu_{k+1}| + |\lambda_k - \mu_k| k^{1/r-1} \right) < \infty,$$

то $\lambda \in \mathbf{m}_p$ и $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p} \leq c_p F_p^2(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\mu_k\}$ – произвольная последовательность, удовлетворяющая условию

$$\sup_m \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\mu_k - \mu_{k+1}| + |\mu_{2^{m+1}}| \right) < \infty. \quad (9)$$

Для этой последовательности выполняется условие теоремы Марцинкевича о мультипликаторах, поэтому $\mu \in \mathbf{m}_p$. Так как пространство $\mathbf{m}_p$ линейно, $\lambda \in \mathbf{m}_p$ тогда и только тогда, когда $\lambda - \mu \in \mathbf{m}_p$. Из леммы 5 следует, что если $\lambda - \mu \in \ell_r$, $1/r = |1/p - 1/2|$, то $\lambda - \mu \in \mathbf{m}_p$, откуда

$$\sup_m \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\lambda_k - \mu_k| k^{1/r-1} < \infty.$$

Из условия теоремы следует, что существует последовательность μ^0 , удовлетворяющая (9), такая, что

$$\sup_m \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\lambda_k - \mu_k^0| k^{1/r-1} < \infty,$$

т.е. $\lambda - \mu^0 \in \mathbf{m}_p$. Поэтому $\lambda \in \mathbf{m}_p$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < p < \infty$, $1/r = |1/p - 1/2|$. Если последовательность действительных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что

$$F_p^3(\lambda) = \inf_{\mu} \left(\sup_N \sum_{k=1}^N (\mu_k^* - \mu_{k+1}^*) ([A_k] (\ln[A_k])^4)^{|1/p-1/p'|} + \sup_k (|\lambda_k - \mu_k^*|) k^{1/r} \right) < \infty,$$

где $A_k = \{m : \mu_m \geq \mu_k^*\}$, то $\lambda \in \mathbf{m}_p$ и $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_p} \leq c_p F_p^3(\lambda)$.

Доказательство проводится с использованием теоремы 2 и леммы 5, аналогично доказательству теоремы 4.

Покажем, что условия на параметры в теоремах 2–5 точны.

ЛЕММА 6. Пусть $1 < p < \infty$. Существует последовательность $\lambda_N = \{\lambda_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $N = 2, 3, \dots$, такая, что

- а) $\|\lambda_N\|_{\mathbf{m}_p} \geq c_p N^{|1/2-1/p|}$;
- б) $F_p^1(\lambda_N) \leq c_p N^{|1/2-1/p|} (\ln N)^{4|1/p-1/p'|}$;
- в) $F_p^2(\lambda_N) \leq c_p N^{|1/2-1/p|}$;
- г) $F_p^3(\lambda_N) \leq c_p N^{|1/2-1/p|}$,

где F_p^1, F_p^2, F_p^3 – функционалы из теорем 3–5 соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $2 < p < \infty$. Случай $1 < p < 2$ следует из $F_p^1 = F_{p'}^1$, $F_p^2 = F_{p'}^2$, $F_p^3 = F_{p'}^3$ и $\mathbf{m}_p = \mathbf{m}_{p'}$, где $p' = p/(p-1)$.

Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n\}$, заданную рекуррентно: $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_{2k} = \varepsilon_k$, $\varepsilon_{2k+1} = (-1)^k \varepsilon_k$.

Дж. Брихарт и Л. Карлицц [11] показали, что для этой последовательности имеет место оценка

$$\left| \sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon_m e^{imx} \right| \leq c N^{1/2}, \quad x \in [0, 2\pi). \quad (10)$$

Для построения λ_N воспользуемся леммой, доказанной М. И. Дьяченко [12].

ЛЕММА 7 [12]. Пусть $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ – возрастающая последовательность тех натуральных чисел, для которых $\varepsilon_{m_k} = -1$. Тогда $m_{k+1} - m_k \leq 5$ при $k = 1, \dots, n$.

Пусть последовательность $\{m_k\}$ из леммы, т.е. $\varepsilon_{m_k} = -1$. Рассмотрим последовательность $\lambda_N = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, где

$$\lambda_k = \begin{cases} -1 & \text{при } k \in \{m_j : 1 \leq m_j \leq N, j = 1, \dots, N\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Согласно лемме 7

$$n \geq \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \varepsilon_k \right| = \left| \sum_{1 \leq m_k \leq n} \varepsilon_{m_k} \right| \geq \frac{n}{5}, \quad n = 1, \dots, N,$$

следовательно,

$$5^{-1} \leq n^{-1} \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \varepsilon_k \right|. \quad (11)$$

Тогда при $p \geq 2$ из [13, теорема 3] следует

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varepsilon_k e^{im_k x} \right\|_p^p \geq c \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} \bar{a}_n^p, \quad \text{где } \bar{a}_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n \lambda_k \varepsilon_k,$$

следовательно,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varepsilon_k e^{ikx} \right\|_p \geq 5^{-1} c N^{1/p'}.$$

Поэтому, принимая во внимание (11),

$$\|\lambda_N\|_{\mathbf{m}_p} \geq \frac{\left\| \sum_{k=1}^N \lambda_k \varepsilon_k e^{ikx} \right\|_p}{\left\| \sum_{k=1}^N \varepsilon_k e^{ikx} \right\|_p} \geq cN^{|1/2-1/p|}.$$

б) Пусть $B_N = \{m_j : 1 \leq m_j \leq N\}$. Так как любое множество натуральных чисел из отрезка $[1, N]$ можно представить в виде объединения не более чем $2N^{1/2}$ конечных арифметических прогрессий, имеем $[B_N] \leq 2N^{1/2}$. Тогда

$$\begin{aligned} F_p^1(\lambda) &= \sum_{r=1}^N |\lambda_r^* - \lambda_{r+1}^*| ([A_r](\ln[A_r])^4)^{|1/p-1/p'|} \leq ([B_N](\ln[B_N])^4)^{|1/p-1/p'|} \\ &\leq c_1 (N^{1/2}(\ln N)^4)^{|1/p-1/p'|} = c_1 N^{|1/2-1/p|} (\ln N)^{4|1/p-1/p'|}. \end{aligned}$$

в) Из определения функционала $F_p^2(\lambda)$ следует

$$F_p^2(\lambda) \leq \sup_m \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\lambda_k| k^{1/r-1} \leq \sum_{k=1}^N |\lambda_k| k^{1/r-1} \leq cN^{|1/2-1/p|}.$$

г) Как и в предыдущем неравенстве, имеем

$$F_p^3(\lambda) \leq \sup_m \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\lambda_k| k^{1/r-1} \leq cN^{|1/2-1/p|}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $2 < p < \infty$. Существует последовательность $\lambda = \{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ такая, что

- а) $\lambda \in \mathbf{m}_p$ и для любого $\varepsilon > 0$ $\lambda \notin \mathbf{m}_{p+\varepsilon}$;
- б) $F_p^1(\lambda) < \infty$;
- в) $F_p^2(\lambda) < \infty$;
- г) $F_p^3(\lambda) < \infty$;
- д) $F_0(\lambda) = \infty$.

Здесь F_p^1, F_p^2, F_p^3 – функционалы из теорем 3–5, а F_0 – функционал из теоремы Марцинкевича.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_N = \{\lambda_k^N\}_{k=1}^\infty$, $N = 2, 3, \dots$, – последовательности из леммы 6. Положим

$$\lambda = \sum_{N=2}^\infty \lambda_N (N^{3/2-1/p} (\ln N)^{10})^{-1}.$$

Тогда из леммы 6 с учетом полуаддитивности функционалов F_p^1, F_p^2, F_p^3 имеем

$$\begin{aligned} F_p^1(\lambda) &\leq \sum_{N=2}^\infty F_p^1(\lambda_N) (N^{3/2-1/p} (\ln N)^{10})^{-1} \leq \sum_{N=2}^\infty \frac{1}{N (\ln N)^{10}} < \infty, \\ F_p^2(\lambda) &\leq \sum_{N=2}^\infty \frac{1}{N (\ln N)^{10}} < \infty, \quad F_p^3(\lambda) \leq \sum_{N=2}^\infty \frac{1}{N (\ln N)^{10}} < \infty, \\ \|\lambda\|_{\mathbf{m}_p} &\leq \sum_{N=2}^\infty \frac{1}{N (\ln N)^{10}} < \infty. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ $\|\lambda\|_{\mathbf{m}_{p+\varepsilon}} = \infty$. Пусть $\varepsilon_N = \{\varepsilon_k^N\}_{k=1}^\infty$, где ε_k^N при $k \leq N$ совпадают с элементами последовательности Шапиро и равны 0 при $k > N$. Рассмотрим последовательность

$$a = \sum_{N=2}^{\infty} \varepsilon_N (N^{3/2} (\ln N)^{10})^{-1} = \left\{ \varepsilon_k \sum_{N=k+1}^{\infty} (N^{3/2} (\ln N)^{10})^{-1} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

и соответствующую функцию

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \sum_{N=k+1}^{\infty} (N^{3/2} (\ln N)^{10})^{-1} e^{ikx} \\ &= \sum_{N=2}^{\infty} (N^{3/2} (\ln N)^{10})^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_k e^{ikx}. \end{aligned}$$

Тогда из неравенства (10) следует, что

$$\|f_0\|_{L_p} \leq \sum_{N=2}^{\infty} (N^{3/2} (\ln N)^{10})^{-1} \left\| \sum_{k=1}^N \varepsilon_k e^{ikx} \right\|_{L_p} \leq c \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N (\ln N)^{10}} < \infty.$$

С другой стороны,

$$f_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{N=m_k}^{\infty} (N^{3/2-1/p} (\ln N)^{10})^{-1} \sum_{N=m_k}^{\infty} (N^{3/2} (\ln N)^{10})^{-1} e^{im_k x}.$$

Из [13, теорема 3] имеем

$$\|f_\lambda\|_{p+\varepsilon}^{p+\varepsilon} \geq \sum_{k=1}^{\infty} k^{p+\varepsilon-2} \bar{a}_k^{p+\varepsilon},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_k &= \frac{1}{k} \sum_{1 \leq m_k \leq k} \sum_{N=m_k}^{\infty} (N^{3/2-1/p} (\ln N)^{10})^{-1} \sum_{N=m_k}^{\infty} (N^{3/2} (\ln N)^{10})^{-1} \\ &\sim \frac{1}{k} \left| \sum_{1 \leq m_k \leq k} \frac{1}{m_k^{1-1/p} (\ln m_k)^{20}} \right|. \end{aligned}$$

Из леммы 7 следует

$$\bar{a}_k \sim \frac{k^{1/p}}{k (\ln k)^{20}} = \frac{1}{k^{1-1/p} (\ln k)^{20}}, \quad k \geq 2,$$

откуда следует расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p+\varepsilon-2} \bar{a}_k^{p+\varepsilon} \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{\varepsilon/p-1}}{(\ln k)^{20(p+\varepsilon)}} = \infty,$$

что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [2] Marcinkiewicz J. Sur les multiplicateurs des séries de Fourier // *Studia Math.* 1939. V. 8. P. 78–91.
- [3] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [4] Бабенко К. И. О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних. Препринт № 52. М.: ИПМ АН СССР, 1971.
- [5] Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. 1 // *УМН.* 1976. Т. 31. № 6. С. 28–83.
- [6] Митягин Б. С. О мультипликаторах-идемпотентах в симметрических функциональных пространствах // *Функцион. анализ и его прилож.* 1972. Т. 6. № 3. С. 81–82.
- [7] Митягин Б. С., Никишин Е. М. О расходимости спектральных разложений в среднем и почти всюду // *Докл. АН СССР.* 1973. Т. 212. № 3. С. 551–552.
- [8] Cordoba A. Geometric Fourier Analysis // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble).* 1982. V. 32. P. 215–226.
- [9] Юдин В. А. Сферические суммы рядов Фурье в L_p // *Матем. заметки.* 1989. Т. 46. № 2. С. 145–146.
- [10] Дьяченко М. И. Нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов в пространствах L_p // *Матем. сб.* 1993. Т. 184. № 3. С. 3–20.
- [11] Brillhart J., Carlitz L. Note on the Shapiro polynomials // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1970. V. 25. P. 114–118.
- [12] Дьяченко М. И. О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // *Матем. сб.* 1986. Т. 129. № 1. С. 55–72.
- [13] Нурсултанов Е. Д. Сетевые пространства и оценки коэффициентов Фурье по тригонометрической системе // *Сборник “Теория приближений и вложений функциональных пространств”.* Караганда, 1994. С. 121–127.

Институт прикладной математики Республики Казахстан, г. Караганда
E-mail: nursult@ipm.karaganda.su

Поступило
26.04.96
Исправленный вариант
15.04.97