Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Олийнык, О свободных полугруппах автоматных преобразований, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 248–259

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:19:41

УДК 512.534.3

О СВОБОДНЫХ ПОЛУГРУППАХ АВТОМАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. С. Олийник

Установлено, что подмножество свободных k -порожденных подполугрупп полугруппы всех автоматных преобразований над конечным алфавитом является множеством второй категории (в смысле категорного подхода Бэра) в множестве всех k -порожденных подполугрупп. Указана континуальная серия пар автоматных преобразований, порождающих свободную полугруппу ранга 2; установлен критерий, когда такая полугруппа является конечно-автоматной.

Библиография: 15 названий.

1. Введение

Автоматные преобразования, полугруппы и группы автоматных преобразований нашли широкое применение в различных разделах современной алгебры (см., например, обзор [1]). Целый ряд работ разных авторов посвящен исследованию строения группы автоматных подстановок над конечным алфавитом. Согласно [2] группа автоматных подстановок над алфавитом A разлагается в сплетение по бесконечной последовательности (в смысле [3]) симметрических групп $S(A)$. Она может быть реализована так же, как группа автоморфизмов дерева, группа изометрий метрического пространства Бэра и др. Это позволяет достаточно подробно изучить ее строение. Аналогично, полугруппа всех автоматных преобразований над алфавитом A разлагается в сплетение по бесконечной последовательности полугрупп (в смысле [4]). Однако, подробное изучение свойств и строения этой полугруппы не проводилось.

Яркие результаты о группе автоматных подстановок получены в работах С. В. Алёшина [5] и [6]. В частности, в [6] построен пример автоматов, которые задают преобразования, порождающие свободную группу ранга 2 (полное доказательство пока не опубликовано). Следует отметить, что в связи с известной альтернативой Титса [7] задаче исследования множества свободных подгрупп в различных группах преобразований уделялось достаточно внимания. Так, в работах Д. Эпштейна [8], Д. Диксона [9] и М. Бхаттачаржи [10] доказано, что “большинство” конечно порожденных подгрупп соответственно в группах Ли, симметрических группах на бесконечных множествах и сплетениях по бесконечным последовательностям нетривиальных групп являются свободными. В связи с этими результатами Р. И. Григорчук поставил задачу – развить методику построения свободных подгрупп и свободных полугрупп (конечно-) автоматных преобразований и исследовать свойства множества таких подполугрупп или подгрупп.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международной программы поддержки образования в отрасли точных наук (ISSEP), грант GSU 051341.

В данной работе приводится частичное решение этой задачи. А именно, устанавливается, что подмножество свободных k -порожденных подполугрупп полугруппы всех автоматных преобразований является множеством второй категории (в смысле категорного подхода Бэра) в множестве всех k -порожденных подполугрупп, т.е. можно говорить, что “большинство” конечно порожденных подполугрупп полугруппы всех автоматных преобразований является свободным.

Указана континуальная серия пар автоматных преобразований, порождающих свободную полугруппу ранга 2; установлен критерий, когда такая полугруппа будет конечно-автоматной. В терминах сплетений выделяется специальный класс автоматных преобразований, 2-элементные подмножества которого могут порождать свободную полугруппу, и приводятся достаточные условия такой порождаемости.

2. Полугруппа автоматных преобразований

2.1. Пусть A – алфавит, $|A| = n \geq 2$, A^* и A^∞ – множества всех соответственно конечных и бесконечных слов над A . Для любого инициального автомата $\mathcal{V} = (A, Q, A, \varphi, \psi, q_0)$ с входным и выходным алфавитом A , алфавитом состояний Q , функцией переходов φ , функцией выходов ψ и начальным состоянием q_0 определено преобразование множества A^* , задаваемое этим автоматом.

А именно, если Λ – пустое слово из A^* , $\alpha \in A^*$, $a \in A$, то, определив для произвольного $q \in Q$ $\overline{\varphi}(q, \Lambda) = q$, $\overline{\varphi}(q, \alpha a) = \varphi(\overline{\varphi}(q, \alpha), a)$, имеем $\Lambda^{\mathcal{V}} = \Lambda$, $(\alpha a)^{\mathcal{V}} = \alpha^{\mathcal{V}} \psi(\overline{\varphi}(q_0, \alpha), a)$, т.е. если $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_m$, $a_i \in A$, $1 \leq i \leq m$, то

$$\alpha^{\mathcal{V}} = \psi(q_0, a_1) \psi(\overline{\varphi}(q_0, a_1), a_2) \cdots \psi(\overline{\varphi}(q_0, a_1 \cdots a_{m-1}), a_m).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Преобразование множества A^* , задаваемое некоторым автоматом $\mathcal{V}$, называется *автоматным преобразованием* над алфавитом A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [11]. *Преобразование $f: A^* \rightarrow A^*$ будет автоматным (над алфавитом A) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- 1) *из того что слово $\alpha \in A^*$ имеет длину t , следует, что и слово $f(\alpha)$ имеет длину t ;*
- 2) *если для слов α и β из A^* вида $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_m$, $\beta = b_1 b_2 \cdots b_m$, $a_i, b_i \in A$, $1 \leq i \leq m$, имеют место равенства $a_i = b_i$, $1 \leq i \leq s$, при некотором s , $1 \leq s \leq m$, то для их образов $f(\alpha) = a'_1 a'_2 \cdots a'_m$ и $f(\beta) = b'_1 b'_2 \cdots b'_m$ выполнено $a'_i = b'_i$, $1 \leq i \leq s$.*

Если определено автоматное преобразование f множества A^* , то определено и преобразование $\overline{f}$ множества A^∞ , которое также будем называть автоматным.

А именно, если $\overline{\alpha} \in A^\infty$, $\overline{\alpha} = a_1 a_2 \cdots a_m \cdots$, то при любом $i \geq 1$ для слова $a_1 a_2 \cdots a_i$ из A^* определено $f(a_1 a_2 \cdots a_i)$, причем по условию 2) предложения 1 слово $f(a_1 a_2 \cdots a_i)$ является началом слова $f(a_1 a_2 \cdots a_i a_{i+1})$ при любом $i \geq 1$. Следовательно, $\overline{f}(\overline{\alpha})$ может быть определено как бесконечное слово над алфавитом A , для которого началом длины i является $f(a_1 a_2 \cdots a_i)$.

Пусть f_1 и f_2 – автоматные преобразования множеств A^* и A^∞ , задаваемые соответственно автоматами $\mathcal{V}_1 = (A, Q_1, A, \varphi_1, \psi_1, q_{01})$ и $\mathcal{V}_2 = (A, Q_2, A, \varphi_2, \psi_2, q_{02})$. Тогда произведение этих преобразований $f_1 f_2$, определяемое как суперпозиция $f_2(f_1)$, также является автоматным и может быть задано автоматом $\mathcal{V} = (A, Q, A, \varphi, \psi, q_0)$, где $Q = Q_1 \times Q_2$, $q_0 = (q_{01}, q_{02})$,

$$\begin{aligned} \varphi((q_1, q_2), a) &= (\varphi_1(q_1, a), \varphi_2(q_2, \psi_1(q_1, a))), \\ \psi((q_1, q_2), a) &= \psi_2(q_2, \psi_1(q_1, a)), \end{aligned} \quad (q_1, q_2) \in Q, \quad a \in A.$$

Таким образом, все автоматные преобразования над алфавитом A образуют полу-группу с единицей (тождественное преобразование), которую будем обозначать AT_n . Эта полугруппа действует как на множестве A^* , так и на A^∞ , т.е. можно рассматривать две полугруппы преобразований: (AT_n, A^*) и (AT_n, A^∞) .

2.2. Пусть (S_i, M_i) – бесконечная последовательность полугрупп S_i , действующих на множествах M_i , $i \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Сплетением* по бесконечной последовательности полугрупп преобразований (S_i, M_i) , $i \in \mathbb{N}$, называется полугруппа S всех преобразований s множества $M = \prod_{i \in \mathbb{N}} M_i$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) для любой последовательности $y = (y_1, y_2, \dots)$ значение k -й координаты ее образа $y^s = (y'_1, y'_2, \dots)$ зависит лишь от k первых координат y ;
- 2) при фиксированных $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ преобразование множества M_k , определяемое равенством $\hat{s}_k(y_k) = y'_k$, содержится в S_n .

Мы будем обозначать сплетение по бесконечной последовательности полугрупп (S_i, M_i) , $i \in \mathbb{N}$, символом $\wr_{i \in \mathbb{N}} S_i$.

Символом $\bar{x}_k$ обозначим начало длины k последовательности $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots)$ из A^∞ , т.е. $\bar{x}_k = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$. Элементы полугруппы $\wr_{i \in \mathbb{N}} S_i$ можно задавать бесконечными последовательностями, называемыми *таблицами*, которые имеют вид

$$u = [f_1, f_2(x_1), \dots, f_k(\bar{x}_{k-1}), \dots], \quad (1)$$

где $f_1 \in S_1$, $f_k(\bar{x}_{k-1}) = f_k(x_1, \dots, x_{k-1})$ – произвольное отображение из $\prod_{i=1}^{k-1} M_i$ в полугруппу S_k , $k = 2, 3, \dots$. При этом k -ю координату таблицы u будем обозначать $[u]_k$.

Сплетения по бесконечным последовательностям полугрупп являются частным случаем более общей конструкции сплетений по бесконечным частично упорядоченным множествам, которая была предложена вначале для групп [12], а затем распространена на полугруппы [4].

Отметим некоторые элементарные свойства этой конструкции.

С каждой последовательностью полугрупп преобразований $(S_1, M_1), (S_2, M_2), \dots$ можно связать новую последовательность, состоящую из k -итерированных сплетений этих полугрупп. k -итерированное сплетение полугрупп $(S_1, M_1), \dots, (S_k, M_k)$ состоит из всевозможных таблиц вида (1), имеющих длину k : $[f_1, f_2(x_1), \dots, f_k(\bar{x}_{k-1})]$. При любом k определен эпиморфизм $\varphi_k: \wr_{i=1}^{k+1} S_i \rightarrow \wr_{i=1}^k S_i$, задаваемый равенством

$$\varphi_k([f_1, f_2(x_1), \dots, f_k(\bar{x}_{k-1}), f_{k+1}(\bar{x}_k)]) = [f_1, f_2(x_1), \dots, f_k(\bar{x}_{k-1})].$$

Тем самым, задается обратный спектр полугрупп преобразований $(\wr_{i=1}^{k+1} S_i, \varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Предельная полугруппа обратного спектра $(\wr_{i=1}^{k+1} S_i, \varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ изоморфна, как полугруппа преобразований, сплетению $\wr_{i \in \mathbb{N}} S_i$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Сплетение по бесконечной последовательности полугрупп преобразований является внутренне ассоциативной конструкцией, т.е. для любой последовательности (S_i, M_i) , $i \in \mathbb{N}$, при произвольном $k \in \mathbb{N}$ сплетения $(\wr_{i=1}^k S_i) \wr (\wr_{i=k+1}^\infty S_i)$ и $\wr_{i \in \mathbb{N}} S_i$ подобны, как полугруппы преобразований.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любого выбора подполугрупп P_i из S_i сплетение $\iota_{i \in \mathbb{N}} S_i$ содержит подполугруппу $\iota_{i \in \mathbb{N}} P_i$.

Если при каком-то $k \in \mathbb{N}$ $S_k = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_{k\lambda}$ и $S(\lambda)$ – сплетение по последовательности $(S_1, M_1), \dots, (S_{k-1}, M_{k-1}), (S_{k\lambda}, M_k), (S_{k+1}, M_{k+1}), \dots$, причем все полугруппы S_i ($i \in \mathbb{N}$), $S_{k\lambda}$ ($\lambda \in \Lambda$) с единицей, то $\iota_{i \in \mathbb{N}} S_i = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S(\lambda)$.

Если $|M_i| < \infty$ при $i \leq k-1$ и $S_k = \langle S_{k\lambda}, \lambda \in \Lambda \rangle$, то $\iota_{i \in \mathbb{N}} S_i = \langle S_{k\lambda}, \lambda \in \Lambda \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Полугруппа преобразований $(\iota_{i \in \mathbb{N}} S_i, \prod_{i \in \mathbb{N}} M_i)$ транзитивна в том и только том случае, когда каждая из полугрупп S_i транзитивно действует на множестве M_i , $i \in \mathbb{N}$.

Доказательства этих предложений вполне аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для сплетений групп, поэтому мы их опускаем.

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Полугруппа (AT_n, A^∞) изоморфна, как полугруппа преобразований, сплетению по бесконечной последовательности симметрических полугрупп T_n степени n :

$$(AT_n, A^\infty) \simeq (\iota_{i \in \mathbb{N}} T_n^{(i)}, \prod_{i \in \mathbb{N}} A),$$

где $T_n^{(i)} = T_n$, $i \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как имеет место естественное биективное соответствие между множеством A^∞ всех бесконечных слов над алфавитом A и бесконечной декартовой степенью множества A , можно считать, что сплетение $\iota_{i \in \mathbb{N}} T_n^{(i)}$ действует на множестве A^∞ . Сплетение полных симметрических полугрупп T_n состоит из преобразований, удовлетворяющих лишь условию 1) определения 2. Но это условие выполняется для автоматных над алфавитом A преобразований и только для них, откуда и получаем требуемое утверждение.

Согласно предложению 6 автоматные преобразования над A можно задавать таблицами вида

$$u = [f_1, f_2(x_1), \dots, f_k(\bar{x}_{k-1}), \dots], \quad \text{где } f_1 \in T_n, \quad f_k: A^{k-1} \rightarrow T_n.$$

Координаты произведения uv таблиц

$$u = [f_1, f_2(x_1), \dots, f_k(\bar{x}_{k-1}), \dots] \in AT_n, \quad v = [g_1, g_2(x_1), \dots, g_k(\bar{x}_{k-1}), \dots] \in AT_n$$

выражаются через координаты u и v равенством

$$[uv]_k = f_k(\bar{x}_{k-1})g_k(x_1^{f_1}, x_2^{f_2(x_1)}, \dots, x_{k-1}^{f_{k-1}(\bar{x}_{k-2})}). \quad (2)$$

Таблица $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon, \dots]$, где ε – тождественное преобразование из T_n , является единицей в AT_n .

Далее мы часто будем отождествлять автоматное преобразование с таблицей, которая его определяет. По таблице можно также строить информационное дерево преобразования (см. [11]) и автомат, его задающий.

3. Большинство подполугрупп в AT_n свободны

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Таблицу $u \in AT_n$ вида

$$u = [f_1, f_2(x_1), \dots, f_m(\bar{x}_{m-1}), \varepsilon, \dots, \varepsilon, \dots], \quad f_m(\bar{x}_{m-1}) \neq \varepsilon, \quad (3)$$

будем называть *короткой* длины m .

Продолжением короткой таблицы (3) назовем любую таблицу $v \in AT_n$ вида

$$v = [f_1, f_2(x_1), \dots, f_m(\bar{x}_{m-1}), g(\bar{x}_m), \dots].$$

Определим на полугруппе AT_n метрику d , полагая для любых $u, v \in AT_n$

$$d(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } u = v, \\ 2^{-m(u, v)} & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4)$$

где $m(u, v)$ – наименьший номер такой, что $[u]_{m(u, v)+1} \neq [v]_{m(u, v)+1}$.

Очевидно, (AT_n, d) – метрическое пространство с неархимедовой метрикой. Открытый шар этого пространства с центром в точке u радиуса 2^{-m} , $m \geq 0$, будем обозначать через $B(u, m)$.

Тогда таблица v будет продолжением короткой таблицы u длины m , если $v \in B(u, m)$.

ЛЕММА 1. *Полугрупповая операция на AT_n непрерывна в метрике (4), причем метрическое пространство (AT_n, d) является полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u, v \in AT_n$, $m \in \mathbb{N}$. Если для некоторых $u_1, v_1 \in AT_n$ первые m координат u и u_1 , а также v и v_1 , совпадают, то совпадают и первые m координат uv и u_1v_1 . Отсюда следует непрерывность полугрупповой операции в метрике (4).

Пусть $\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ – произвольная фундаментальная последовательность точек метрического пространства (AT_n, d) . Это означает, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует короткая таблица v_m длины $k_m \geq m$ такая, что лишь конечное число членов последовательности $\{u_i\}$ не является ее продолжением. При этом v_m будет продолжением $v_{m'}$, когда $m \geq m'$. Для последовательности коротких таблиц $\{v_m : m \in \mathbb{N}\}$ существует единственная таблица u , являющаяся продолжением v_m при любом $m \in \mathbb{N}$. Она определяется покоординатно равенствами $[u]_j = [v_m]_j$, где m – наименьшее число такое, что $k_m \geq j$. Тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = u$, т.е. для последовательности $\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ существует предел. Так как фундаментальная последовательность $\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ произвольна, это означает, что пространство (AT_n, d) полно. Лемма доказана.

Зафиксируем некоторое k и рассмотрим AT_n^k . Распространим теперь метрику d на множество AT_n^k , полагая

$$d(u, v) = \max\{d(u_i, v_i) : 1 \leq i \leq k\},$$

где $u = (u_1, \dots, u_k)$, $v = (v_1, \dots, v_k) \in AT_n^k$. По лемме 1 (AT_n^k, d) – полное метрическое пространство. Открытый шар этого пространства с центром в точке u радиуса 2^{-m} будем, как и прежде, обозначать $B(u, m)$.

Напомним, что подмножество метрического пространства называется *нигде не плотным*, если его дополнение содержит открытое плотное подмножество. Объединение счетного числа нигде не плотных множеств называется *тощим* (или *множеством первой категории*). Теорема Бэра о категории утверждает, что в полном метрическом пространстве дополнение тощего множества плотно. В частности, пространство не может быть представлено в виде объединения счетного семейства тощих множеств (см., например, [13]).

Для кортежа $u = (u_1, \dots, u_k) \in AT_n^k$ символом $\langle u \rangle$ будем обозначать подполугруппу AT_n , порожденную его компонентами.

3.2. Пусть $X = (X_1, \dots, X_k)$ – образующие свободной полугруппы $\text{FS}(X)$ ранга k . Если $w = w(X)$ – некоторое слово из этой полугруппы, то $w(u)$ – значение этого слова на кортеже u .

Рассмотрим следующие подмножества из AT_n^k :

$$F = \{u : \langle u \rangle \simeq \text{FS}(X)\}, \quad F(w_1, w_2) = \{u : w_1(u) \neq w_2(u)\},$$

где w_1, w_2 – некоторые слова из $\text{FS}(X)$.

ЛЕММА 2. $F = \bigcap_{w_1 \neq w_2} F(w_1, w_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кортеж u не содержится в F тогда и только тогда, когда между его компонентами имеются нетривиальные соотношения. Если $w_1(u) = w_2(u)$ одно из них, то u не содержится в $F(w_1, w_2)$, а следовательно, и в $F = \bigcap_{w_1 \neq w_2} F(w_1, w_2)$. Отсюда следует требуемое равенство.

ЛЕММА 3. Для любых $w_1, w_2 \in \text{FS}(X)$, $w_1 \neq w_2$, подмножество $F(w_1, w_2)$ открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображения $u \mapsto w_1(u)$ и $u \mapsto w_2(u)$ непрерывны в силу леммы 1. Поэтому $F(w_1, w_2)$ является дополнением множества $AT_n^k \setminus F(w_1, w_2)$, которое замкнуто вследствие непрерывности этих отображений. Следовательно, само оно открыто, и утверждение леммы доказано.

ЛЕММА 4. Пусть $w_1(X) = X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_l}$, $w_2(X) = X_{\beta_1} X_{\beta_2} \dots X_{\beta_r}$ ($l, r \geq 0$, $l + r > 0$) – различные слова из $\text{FS}(X)$. Для произвольных коротких таблиц $u_1, \dots, u_k$ длины t существуют короткие таблицы $v_1, \dots, v_k$ длины $t + \max\{l, r\}$, являющиеся их продолжениями, такие, что $w_1(v_1, \dots, v_k) \neq w_2(v_1, \dots, v_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $w_1(u_1, \dots, u_k) \neq w_2(u_1, \dots, u_k)$, то продолжения $v_1, \dots, v_k$ требуемой длины таблиц $u_1, \dots, u_k$ могут быть произвольными. Пусть $u_1, \dots, u_k$ – короткие таблицы такие, что $w_1(u_1, \dots, u_k) = w_2(u_1, \dots, u_k)$. Предположим для определенности, что $r \geq l$, и обозначим через $s - 1$ длину общего начала слов w_1 и w_2 . Тогда s – наименьшее число такое, что w_1 и w_2 различаются в s -й позиции, $1 \leq s \leq l + 1$. Пусть $\pi = (a', a'')$ – транспозиция символов $a', a'' \in A$, $a' \neq a''$. Продолжим таблицы $u_1, \dots, u_k$ до коротких таблиц $u'_1, \dots, u'_k$ длины $t + s - 1$ произвольным образом. Для всех i , $1 \leq i \leq k$, координаты их продолжений

$$v_i = [u'_i]_1, \dots, [u'_i]_{m+s-1}, f_{m+s}^{(i)}(\bar{x}_{m+s-1}), \dots, f_{m+r}^{(i)}(\bar{x}_{m+r-1}), \varepsilon, \dots]$$

с $(m + s)$ -й по $(m + r)$ -ю определяем следующими соглашениями. Если выполнено условие $i = \beta_{s+j}$, то функция $f_{m+s+j}^{(i)}$ принимает значение π на всех кортежах вида $(a_1, \dots, a_{m+s+t}, a'')$, где $a_1, \dots, a_{m+s+t}$ – произвольные элементы из A , $t = \max\{j - 2, -1\}$, и значение ε на всех остальных кортежах; если же $i \neq \beta_{s+j}$, то $f_{m+s+j}^{(i)}$ на всех кортежах принимает единичное значение. Так определенные таблицы $v_1, \dots, v_k$ являются короткими длины $m + r$ и продолжениями $u_1, \dots, u_k$ соответственно.

Убедимся, что они являются искомыми, т.е. выполнено $w_1(v_1, \dots, v_k) \neq w_2(v_1, \dots, v_k)$. Достаточно проверить, что таблицы $w_1(v_1, \dots, v_k)$ и $w_2(v_1, \dots, v_k)$ по-разному действуют хотя бы на одно слово над алфавитом A . Покажем, что для слова $\bar{a}' = a' a' \dots$ имеет место неравенство $\bar{a}'^{w_1(v_1, \dots, v_k)} \neq \bar{a}'^{w_2(v_1, \dots, v_k)}$. В самом деле, в слове $\bar{a}'^{v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_s}}$ $(m + s)$ -ю позицию занимает буква a' , а в слове $\bar{a}'^{v_{\beta_1} \dots v_{\beta_s}}$ на этом месте стоит a'' . Согласно определению таблиц $v_1, \dots, v_k$ отсюда получаем, что на $(m + s + 1)$ -м месте в

слове $\bar{a}'^{v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_s} v_{\alpha_{s+1}}}$ находится a' , а на этом же месте в слове $\bar{a}'^{v_{\beta_1} \cdots v_{\beta_s} v_{\beta_{s+1}}}$ стоит a'' . Продолжая те же рассуждения, на $(r-s)$ -м шаге получаем, что на $(m+r)$ -м месте в словах $\bar{a}'^{v_{\alpha_1} \cdots v_{\alpha_l}}$ и $\bar{a}'^{v_{\beta_1} \cdots v_{\beta_r}}$ находятся a' и a'' соответственно, т.е. требуемое неравенство выполнено. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Подмножество F плотно в AT_n^k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = (u_1, \dots, u_k) \in AT_n^k$ и $m \in \mathbb{N}$. Построим $v = (v_1, \dots, v_k) \in B(u, m)$ так, чтобы $v \in F$. Рассмотрим множество $W = \{(w_{i_1}, w_{j_1}), (w_{i_2}, w_{j_2}), \dots\}$ всевозможных пар различных слов из $FS(X)$. Пусть l_t – длина более длинного слова из t -й пары. Рассмотрим короткие таблицы $v_1^{(0)}, \dots, v_k^{(0)}$ длины m такие, что $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, \dots, v_k^{(0)}) \in B(u, m)$. Это значит, что выполняются равенства $[v_i^{(0)}]_j = [u_i]_j$ для всех i, j , $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$. Для этого набора таблиц и пары (w_{i_1}, w_{j_1}) по лемме 4 построим короткие таблицы $v_1^{(1)}, \dots, v_k^{(1)}$ длины $m + l_1$, которые являются продолжениями таблиц $v_1^{(0)}, \dots, v_k^{(0)}$, так, чтобы $w_{i_1}(v_1^{(1)}, \dots, v_k^{(1)}) \neq w_{j_1}(v_1^{(1)}, \dots, v_k^{(1)})$. Затем продолжим набор $v_1^{(1)}, \dots, v_k^{(1)}$ до набора коротких таблиц $v_1^{(2)}, \dots, v_k^{(2)}$ длины $m + l_1 + l_2$ так, чтобы выполнялось неравенство $w_{i_2}(v_1^{(2)}, \dots, v_k^{(2)}) \neq w_{j_2}(v_1^{(2)}, \dots, v_k^{(2)})$. Выполнив эти построения для всех элементов W , получим таблицы $v_1, \dots, v_k$. Так как два продолжения одного и того же набора коротких таблиц длины m находятся на расстоянии, не превышающем 2^{-m} , выполнено $v = (v_1, \dots, v_k) \in B(u, m)$. Поскольку неравенства $w_{i_t}(u'_1, \dots, u'_k) \neq w_{j_t}(u'_1, \dots, u'_k)$ сохраняются для любых продолжений $v'_1, \dots, v'_k$ таблиц $u'_1, \dots, u'_k$, то неравенства $w_{i_t}(v) \neq w_{j_t}(v)$ выполняются для всех $t \geq 1$. Следовательно, $v \in F$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Подмножество $AT_n^k \setminus F$ является тощим в AT_n^k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых различных слов w_1 и w_2 из $FS(X)$ по лемме 2 имеем $F \subseteq F(w_1, w_2)$. Отсюда, учитывая теорему 1 и лемму 3, получаем, что $F(w_1, w_2)$ открыто и плотно в AT_n^k . Следовательно, $AT_n^k \setminus F(w_1, w_2)$ нигде не плотно. Так как

$$AT_n^k \setminus F = AT_n^k \setminus \bigcap_{w_1 \neq w_2} F(w_1, w_2) = \bigcup_{w_1 \neq w_2} (AT_n^k \setminus F(w_1, w_2)),$$

$AT_n^k \setminus F$ представимо в виде объединения счетного семейства нигде не плотных подмножеств, т.е. является тощим. Теорема доказана.

4. Конструкция континуального семейства свободных полугрупп в AT_p

Предположим, что $|A| = p$ – простое число, и отождествим A с полем $\mathbb{Z}_p$ вычетов по модулю p . Пусть C_p – циклическая группа сдвигов $x \mapsto x + a$ на множестве $\mathbb{Z}_p$. Группа AG_p всех обратимых преобразований из AT_p разлагается в сплетение по бесконечной последовательности симметрических групп над алфавитом A и, следовательно, является проконечной группой. Поэтому можно говорить о ее силовских p -подгруппах, которые все сопряжены [14]. Силовская p -подгруппа P_∞ группы AG_p изоморфна сплетению по бесконечной последовательности циклических групп подстановок $(C_p, \mathbb{Z}_p)$ и действует на $\mathbb{Z}_p^\infty$. Так как C_p естественно отождествляется с аддитивной группой поля $\mathbb{Z}_p$, элементы группы P_∞ задаются наборами вида (1), координаты которых есть функции над $\mathbb{Z}_p$ от соответствующего числа переменных. Следовательно, можно считать, что они являются редуцированными многочленами, т.е. $f_1 \in \mathbb{Z}_p$, $f_k(\bar{x}_{k-1}) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_{k-1}] / \mathcal{J}_{k-1}$, где $\mathcal{J}_{k-1}$ – идеал в $\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_{k-1}]$, порожденный многочленами $x_1^p - x_1, \dots, x_{k-1}^p - x_{k-1}$.

Поскольку групповая операция в C_p записывается аддитивно, действие таблицы u вида (1) на произвольную последовательность $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \in \mathbb{Z}_p^\infty$ определяется равенством

$$\bar{\alpha}^u = (\alpha_1 + f_1, \alpha_2 + f_2(\alpha_1), \alpha_3 + f_3(\alpha_1, \alpha_2), \dots). \quad (5)$$

Согласно (5) правило (2) умножения таблиц в этом случае переписывается в виде

$$[uv]_k = f_k(\bar{x}_{k-1}) + g_k(x_1 + f_1, x_2 + f_2(x_1), \dots, x_{k-1} + f_{k-1}(\bar{x}_{k-2})), \quad (6)$$

а единичной будет таблица $\varepsilon = [0, 0, \dots]$.

Свободные 2-порожденные подполугруппы в группе P_∞ строятся следующим образом.

Пусть сначала $p \neq 2$. Зафиксируем некоторую последовательность $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots) \in \mathbb{Z}_p^\infty$ и зададим таблицы $u, v \in P_\infty$, полагая

$$u = [0, 0, \alpha_1 x_2 + x_1, \alpha_2 x_3 + x_2, \dots, \alpha_k x_{k+1} + x_k, \dots],$$

$$v = [0, 0, \alpha_1 x_2 + x_1^2, \alpha_2 x_3 + x_2^2, \dots, \alpha_k x_{k+1} + x_k^2, \dots].$$

Обозначим через $F(\bar{\alpha})$ полугруппу, порожденную таблицами u и v . Условимся считать, что для редуцированного многочлена f запись $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_t})$ означает, что он может явно зависеть лишь от указанных неизвестных, т.е. множество тех неизвестных, от которых он явно зависит, содержится в $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$.

Нам понадобятся два вспомогательных утверждения о виде многочленов – координат таблиц из $F(\bar{\alpha})$.

ЛЕММА 5. *Для любого натурального $m \geq 2$ при $k > 2m$ имеют место соотношения*

$$[u^m]_k = x_{k-2m} + f_k^{(m)}(x_{k-2m+1}, \dots, x_{k-1}), \quad (7)$$

$$[v^m]_k = \overline{2^{m-1}} x_{k-2m}^2 x_{k-2m+2} \cdots x_{k-4} x_{k-2} + g_k^{(m)}(x_{k-2m}, \dots, x_{k-1}), \quad (8)$$

где $\overline{2^{m-1}}$ – вычет числа 2^{m-1} по модулю p , а многочлен $g_k^{(m)}$ не содержит одночлена $x_{k-2m}^2 x_{k-2m+2} \cdots x_{k-4} x_{k-2}$.

Доказательство проведем индукцией по числу m . Достаточно проверить соотношение (8), соотношение (7) проверяется вполне аналогично.

База индукции – случай $m = 2$. Согласно равенству (6) k -я координата таблицы v^2 при $k > 4$ имеет вид

$$\begin{aligned} & (\alpha_{k-2} x_{k-1} + x_{k-2}^2) + \alpha_{k-2}(x_{k-1} + \alpha_{k-3} x_{k-2} + x_{k-3}^2) + (x_{k-2} + \alpha_{k-4} x_{k-3} + x_{k-4}^2)^2 \\ & = 2x_{k-4}^2 x_{k-2} + g_k^{(2)}(x_{k-4}, \dots, x_{k-1}), \end{aligned}$$

т.е. записывается в требуемом виде.

Шаг индукции. При $k > 2m$ имеем

$$[v^m]_k = [v^{m-1}]_k + \alpha_{k-2}(x_{k-1} + [v^{m-1}]_{k-1}) + (x_{k-2} + [v^{m-1}]_{k-2})^2.$$

По предположению индукции многочлены $[v^{m-1}]_k$ и $\alpha_{k-2}(x_{k-1} + [v^{m-1}]_{k-1})$ не зависят от x_{k-2m} , т.е. их сумма является многочленом $\tilde{f}(x_{k-2m+1}, \dots, x_{k-1})$, а $[v^{m-1}]_{k-2}$ имеет вид

$$[v^{m-1}]_{k-2} = \overline{2^{m-2}} x_{k-2m}^2 x_{k-2m+2} \cdots x_{k-4} + g_{k-2}^{(m-1)}(x_{k-2m}, \dots, x_{k-3}).$$

Поэтому многочлен $(x_{k-2} + [v^{m-1}]_{k-2})^2$ записывается в виде суммы монома $\overline{2^{m-1}} \times x_{k-2m}^2 x_{k-2m+2} \cdots x_{k-4} x_{k-2}$ и некоторого многочлена $\tilde{g}(x_{k-2m}, \dots, x_{k-2})$, его не содержащего. Теперь, полагая $g_k^{(m)} = \tilde{f} + \tilde{g}$, получаем соотношение (8).

ЛЕММА 6. Пусть $w(X_1, X_2)$ – произвольное нетривиальное слово из свободной полугруппы $\text{FS}(X_1, X_2)$, t – его длина. Тогда при $k > 2t$ справедливо соотношение

$$[w(u, v)]_k = \overline{2^{l-1}} x_{k-2m}^{1+\varepsilon_1} x_{k-2m+2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{k-4}^{\varepsilon_{m-1}} x_{k-2}^{\varepsilon_m} + h_k^{(w)}(x_{k-2m}, \dots, x_{k-1}),$$

где l – количество вхождений буквы X_2 в слово w ,

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{если на } i\text{-й позиции в } w \text{ стоит } X_2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq t, \quad (9)$$

а многочлен $h_k^{(w)}$ не содержит монома $x_{k-2m}^{1+\varepsilon_1} x_{k-2m+2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{k-4}^{\varepsilon_{m-1}} x_{k-2}^{\varepsilon_m}$.

Кроме того, если слово w заканчивается буквой X_1 , то многочлен $h_k^{(w)}$ не содержит мономов вида $x_{k-2m}^{\alpha_1} x_{k-2}^{\alpha_2} x_{k_1}^{\alpha_3} \cdots x_{k_s}^{\alpha_{s+2}}$ ни при каких $s \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_3, \dots, \alpha_{s+2} \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по длине слова w . Для слов длины 1 утверждение верно согласно определению таблиц u и v . Пусть $|w| > 1$ и слово w заканчивается буквой X_1 , т.е. имеет вид $\tilde{w}(X_1, X_2)X_1$. Тогда при $k > 2t$

$$[w(u, v)]_k = [\tilde{w}(u, v)]_k + \alpha_{k-2}(x_{k-1} + [\tilde{w}(u, v)]_{k-1}) + (x_{k-2} + [\tilde{w}(u, v)]_{k-2}).$$

По предположению индукции $[\tilde{w}(u, v)]_k + \alpha_{k-2}(x_{k-1} + [\tilde{w}(u, v)]_{k-1})$ является многочленом от переменных $x_{k-2m+2}, \dots, x_{k-1}$, поэтому не содержит мономов, указанных в условии леммы. Далее,

$$[\tilde{w}(u, v)]_{k-2} = \overline{2^{l-1}} x_{k-2m}^{1+\varepsilon_1} x_{k-2m+2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{k-4}^{\varepsilon_{m-1}} + h_k^{(\tilde{w})}(x_{k-2m}, \dots, x_{k-3}),$$

т.е. не зависит от x_{k-2} и не может содержать мономов вида $x_{k-2m}^{\alpha_1} x_{k-2}^{\alpha_2} x_{k_1}^{\alpha_3} \cdots x_{k_s}^{\alpha_{s+2}}$ ни при каких $s \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_3, \dots, \alpha_{s+2} \geq 0$. Значит, $[w(u, v)]_k$ есть сумма монома $\overline{2^{l-1}} x_{k-2m}^{1+\varepsilon_1} x_{k-2m+2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{k-4}^{\varepsilon_{m-1}}$ и многочлена требуемого вида. Этот моном можно записать в виде $\overline{2^{l-1}} x_{k-2m}^{1+\varepsilon_1} x_{k-2m+2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{k-4}^{\varepsilon_{m-1}} x_{k-2}^{\varepsilon_m}$, положив $\varepsilon_m = 0$.

Если слово w заканчивается буквой X_2 , все рассуждения вполне аналогичны, поэтому такой случай рассматривать не будем. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Полугруппа $F(\overline{\alpha})$ свободна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что для двух произвольных различных слов $w_1(X_1, X_2)$ и $w_2(X_1, X_2)$ из свободной полугруппы $\text{FS}(X_1, X_2)$ их значения на (u, v) не совпадают. В силу леммы 5 таблицы u и v имеют бесконечный порядок, т.е. достаточно рассмотреть только нетривиальные слова w_1 и w_2 . Возможны два случая.

1) Слова w_1 и w_2 имеют различную длину. Предположим, что $|w_1| > |w_2|$ и $|w_1| = t$. Тогда по лемме 6 для $k > 2t$ имеем

$$[w_1(u, v)]_k = \overline{2^{l-1}} x_{k-2m}^{1+\varepsilon_1} x_{k-2m+2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{k-4}^{\varepsilon_{m-1}} x_{k-2}^{\varepsilon_m} + h_k^{(w_1)}(x_{k-2m}, \dots, x_{k-1}),$$

где l – количество вхождений X_2 в w_1 , $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq t$, а $h_k^{(w_1)}$ не содержит монома $x_{k-2m}^{1+\varepsilon_1} x_{k-2m+2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{k-4}^{\varepsilon_{m-1}} x_{k-2}^{\varepsilon_m}$, т.е. многочлен $[w_1(u, v)]_k$ явно зависит от неизвестного x_{k-2m} . С другой стороны, по лемме 6 $[w_2(u, v)]_k$ от него не зависит. Следовательно, $[w_1(u, v)]_k \neq [w_2(u, v)]_k$, и значения w_1 и w_2 на (u, v) различны.

2) Слова u и v имеют одинаковую длину m . Можно считать, что их последние буквы различны, т.е. $w_1(X_1, X_2) = \tilde{w}_1(X_1, X_2)X_1$, $w_2(X_1, X_2) = \tilde{w}_2(X_1, X_2)X_2$. По лемме 6 при $k > 2m$ многочлен $[w_1(u, v)]_k$ не содержит мономов вида $x_{k-2m}^{\alpha_1} x_{k-2}^{\alpha_2} x_{k_1}^{\alpha_3} \dots x_{k_s}^{\alpha_{s+2}}$ ни при каких $s \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_3, \dots, \alpha_{s+2} \geq 0$, а в многочлене $[w_2(u, v)]_k$ встречается моном $x_{k-2m}^{1+\varepsilon_1} x_{k-2m+2}^{\varepsilon_2} \dots x_{k-4}^{\varepsilon_{m-1}} x_{k-2}$ с коэффициентом 2^{l-1} (l – число вхождений X_2 в w_2 , а $\varepsilon_i = 1$ или 0 в зависимости от того, стоит ли на i -й позиции в w_2 буква X_2 или нет, $1 \leq i \leq m-1$). Следовательно, $[w_1(u, v)]_k \neq [w_2(u, v)]_k$, и значения w_1 и w_2 на кортеже (u, v) снова различны. Теорема доказана.

Пусть теперь $p = 2$. Таблицы u и v определим по последовательности $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}_2^\infty$ следующим образом:

$$u = [0, 0, 0, \alpha_1 x_3 + x_1, \alpha_2 x_4 + x_2, \dots, \alpha_k x_{k+2} + x_k, \dots],$$

$$v = [0, 0, 0, \alpha_1 x_3 + x_1 x_2, \alpha_2 x_4 + x_2 x_3, \dots, \alpha_k x_{k+2} + x_k x_{k+1}, \dots].$$

Как и раньше, обозначим через $F(\bar{\alpha})$ полугруппу, порожденную этими таблицами.

ТЕОРЕМА 4. *Полугруппа $F(\bar{\alpha})$ свободна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w(X_1, X_2)$ – нетривиальное слово из $\text{FS}(X_1, X_2)$, m – его длина. Рассуждая, как в лемме 6, можно показать, что при $k > 3m$ многочлен $[w(u, v)]_k$ содержит моном $x_{k-3m}^{\varepsilon_1} x_{k-3m+1}^{\varepsilon_2} x_{k-3m+4}^{\varepsilon_3} x_{k-3m+7}^{\varepsilon_4} \dots x_{k-5}^{\varepsilon_{m-1}} x_{k-2}^{\varepsilon_m}$, где ε_i задаются формулой (9). При этом, если w заканчивается буквой X_1 , то $[w(u, v)]_k$ не содержит мономов, в которых одновременно встречаются неизвестные x_{k-3m} и x_{k-2} . Затем, как и в доказательстве теоремы 3, рассмотрим два различных нетривиальных слова w_1 и w_2 из $\text{FS}(X_1, X_2)$. Если $|w_1| > |w_2|$, $|w_1| = m$, то при $k > 3m$ многочлен $[w_1(u, v)]_k$ зависит от переменной x_{k-3m} , а $[w_2(u, v)]_k$ от нее не зависит. Если же $|w_1| = |w_2| = m$, то, считая для определенности, что w_1 заканчивается буквой X_1 , а w_2 – буквой X_2 , получаем при $k > 3m$, что $[w_1(u, v)]_k$ содержит моном, в котором одновременно встречаются неизвестные x_{k-3m} и x_{k-2} , а в $[w_2(u, v)]_k$ таких мономов нет. Следовательно, для любых слов $w_1, w_2 \in \text{FS}(X_1, X_2)$ в таблицах $w_1(u, v)$ и $w_2(u, v)$ всегда найдутся различные координаты, т.е. значения w_1 и w_2 на кортеже (u, v) не совпадают. Это и означает, что $F(\bar{\alpha})$ свободна. Теорема доказана.

Напомним, что автоматное преобразование $u \in AT_n$ называется *конечно-автоматным*, если его можно задать конечным автоматом. Произведение конечно-автоматных преобразований снова будет конечно-автоматным, т.е. все конечно-автоматные преобразования образуют подполугруппу в AT_n , которую обозначим FAT_n . Подполугруппы из FAT_n естественно называть *полугруппами конечно-автоматных преобразований*.

Если автоматное преобразование u задано таблицей вида (1), то для произвольных $m \in \mathbb{N}$ и набора $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in A^m$ можно определить таблицу

$$[f_{m+1}(a_1, a_2, \dots, a_m), \dots, f_{m+k}(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}), \dots],$$

которая также содержится в AT_n . Будем называть эту таблицу $(\bar{a}, m)$ -*остатком* таблицы u . С помощью этого понятия легко формулируется критерий конечно-автоматности преобразований из AT_n .

ЛЕММА 7. *Автоматное преобразование из AT_n , которое задается таблицей u , является конечно-автоматным в том и только том случае, когда таблица u имеет лишь конечное число различных $(\bar{a}, m)$ -остатков для всех $m \in \mathbb{N}$, $\bar{a} \in A^m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для автоматных подстановок доказательство приведено в [15]. Общий случай ничем не отличается.

ТЕОРЕМА 5. *Полугруппа $F(\bar{\alpha})$ будет полугруппой конечно-автоматных преобразований тогда и только тогда, когда, начиная с некоторого места, последовательность $\bar{\alpha}$ является периодической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся случаем $p \neq 2$. При $p = 2$ рассуждения вполне аналогичны.

Необходимость. Пусть последовательность $\bar{\alpha}$ непериодическая с предпериодом, т.е. среди последовательностей $(\alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+k}, \dots)$, $m \geq 1$, бесконечно много различных. Покажем, что таблица

$$u = [0, 0, \alpha_1 x_2 + x_1, \alpha_2 x_3 + x_2, \dots, \alpha_k x_{k+1} + x_k, \dots]$$

имеет бесконечно много различных остатков. Действительно, каждый ее остаток имеет вид $[\alpha, \alpha_m x_1 + \beta, \alpha_{m+1} x_2 + x_1, \dots, \alpha_{m+k} x_{k+1} + x_k, \dots]$ при некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$. Поскольку среди последовательностей $(\alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+k}, \dots)$, $m \geq 1$, бесконечно много различных, то и различных остатков у таблицы u бесконечно много, т.е. по лемме 7 она не конечно-автоматна.

Достаточность. Если последовательность $\bar{\alpha}$ периодическая, начиная с некоторого места, т.е. имеет вид $(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{l+m}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{l+m}, \dots)$ при каких-то $l \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$, то таблицы u, v имеют конечное число различных остатков. В самом деле, в этом случае любой остаток таблицы u имеет вид

$$\begin{aligned} &[\alpha, \alpha_i x_1 + \beta, \alpha_{i+1} x_2 + x_1, \dots, \alpha_{l+m} x_{l+m-i+1} + x_{l+m-i}, \\ &\alpha_{l+1} x_{l+m-i+2} + x_{l+m-i+1}, \dots, \alpha_{l+m} x_{l+2m-i+1} + x_{l+2m-i}, \\ &\alpha_{l+1} x_{l+2m-i+2} + x_{l+2m-i+1}, \dots, \alpha_{l+m} x_{l+3m-i+1} + x_{l+3m-i}, \dots] \end{aligned}$$

при некоторых $i \in \{1, \dots, l+m\}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$. Отсюда получаем, что различных остатков у нее не больше чем $(l+m)p^2$. Аналогично, таблица v имеет не больше чем $(l+m)p^2$ различных остатков. Следовательно, по лемме 7 полугруппа $F(\bar{\alpha})$ порождается конечно-автоматными преобразованиями, т.е. является полугруппой конечно-автоматных преобразований. Теорема доказана.

Пусть $\chi = \{m_1, m_2, \dots\}$ – бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что $m_k < k$ при $k > 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Таблицу $u = [f_1, f_2(x_1), \dots, f_k(\bar{x}_{k-1}), \dots] \in P_\infty$ назовем χ -треугольной, если существует номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $k \geq k_0$ координаты u имеют вид

$$f_k(\bar{x}_{k-1}) = \begin{cases} \tilde{f}_k(x_{k-m_k+1}, \dots, x_{k-1}) + x_{k-m_k}^{l_k}, & l_k \geq 1, & \text{при } p > 2, \\ \tilde{f}_k(x_{k-m_k+1}, \dots, x_{k-1}) + x_{k-m_k-1} x_{k-m_k}^{\varepsilon_k}, & \varepsilon_k \in \{0, 1\}, & \text{при } p = 2, \end{cases}$$

причем многочлен $\tilde{f}_k \equiv 0$, если $m_k = 1$.

χ -треугольную таблицу будем называть χ -диагональной, если при $k \geq k_0$ последовательность $\{m_k\}$ не возрастает.

Следующее утверждение является обобщением теорем 3 и 4.

ТЕОРЕМА 6. Если $p \neq 2$, то χ -диагональные таблицы u, v , в которых первые $k_0 - 1$ координат произвольны, а последующие определяются равенствами

$$\begin{aligned} [u]_k &= \tilde{f}_k(x_{k-m_k+1}, \dots, x_{k-1}) + x_{k-m_k}, \\ [v]_k &= \tilde{f}_k(x_{k-m_k+1}, \dots, x_{k-1}) + x_{k-m_k}^2, \end{aligned} \quad k \geq k_0,$$

порождают свободную полугруппу.

Если $p = 2$, то χ -диагональные таблицы u, v , первые $k_0 - 1$ координат которых произвольны, а последующие определяются равенствами

$$\begin{aligned} [u]_k &= \tilde{f}_k(x_{k-m_k+1}, \dots, x_{k-1}) + x_{k-m_k-1}, \\ [v]_k &= \tilde{f}_k(x_{k-m_k+1}, \dots, x_{k-1}) + x_{k-m_k-1}x_{k-m_k}, \end{aligned} \quad k \geq k_0,$$

порождают свободную полугруппу.

Поскольку доказательство этой теоремы отличается от доказательства теорем 3 и 4 только техническими деталями, мы его опускаем.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В. И. Сушанскому за постоянную помощь и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 57. М.: ВИНТИ, 1990. С. 5–177.
- [2] Заровный В. П. Автоматные подстановки и сплетения групп // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. № 3. С. 562–565.
- [3] Kaloujnine L. A., Beleckij P. M., Fejnberg V. Z. Kranzprodukte. Leipzig: Teubner, 1987.
- [4] Wells C. Some applications of the wreath product construction // Amer. Math. Monthly. 1976. V. 83. P. 317–338.
- [5] Алёшин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Матем. заметки. 1972. Т. 11. № 3. С. 319–328.
- [6] Алёшин С. В. Свободная группа конечных автоматов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1983. № 4. С. 12–14.
- [7] Tits J. Free subgroups in linear groups // J. Algebra. 1972. V. 20. P. 250–270.
- [8] Epstein D. B. A. Almost all subgroups of a Lie group are free // J. Algebra. 1971. V. 19. P. 261–262.
- [9] Dixon J. D. Most finitely generated permutation groups are free // Bull. London Math. Soc. 1990. V. 22. P. 222–226.
- [10] Bhattacharjee M. The ubiquity of free subgroups in certain inverse limits of groups // J. Algebra. 1995. V. 172. P. 134–146.
- [11] Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
- [12] Holland W. C. The characterization of generalized wreath product // J. Algebra. 1969. V. 13. P. 152–172.
- [13] Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. М.: Высшая школа, 1979.
- [14] Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.
- [15] Сушанський В. І. Стандартні підгрупи групи ізометрій метричного простору цілих p -адичних чисел // Вісник КДУ. Сер. матем., мех. 1988. № 30. С. 100–107.