Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Е. Панов, Классификация с точностью до кобордизма многообразий, несущих простое действие группы $\mathbb{Z}/p$, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 260–268

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1272>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:23:27

УДК 515.164.24

КЛАССИФИКАЦИЯ С ТОЧНОСТЬЮ ДО КОБОРДИЗМА МНОГООБРАЗИЙ, НЕСУЩИХ ПРОСТОЕ ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ $\mathbb{Z}/p$

Т. Е. Панов

Получено полное описание множества классов кобордизма квазикомплексных многообразий с действием группы $\mathbb{Z}/p$, множество неподвижных точек которого имеет тривиальное нормальное расслоение, в терминах коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов и в терминах характеристических чисел. Установлена связь с другими работами в данном направлении, где рассматриваемая проблема была решена в различных частных случаях.

Библиография: 7 названий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем действие группы $\mathbb{Z}/p$ на квазикомплексном многообразии M^{2n} *простым*, если множество неподвижных точек представляет собой объединение конечного числа подмногообразий, имеющих тривиальное нормальное расслоение, и *сильно простым*, если кроме того наборы весов (собственных чисел дифференциала отображения, соответствующего образующей $\rho \in \mathbb{Z}/p$, в неподвижных точках) одинаковы для всех неподвижных подмногообразий одной размерности.

В работе получена полная классификация классов кобордизма $\sigma \in \Omega_U$, в которых содержатся многообразия, несущие простое действие группы $\mathbb{Z}/p$ в терминах коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов (теорема 1) и в терминах характеристических чисел (теорема 2, следствие 2).

Для сильно простых действий $\mathbb{Z}/p$ проблема классификации была полностью решена Коннером и Флоридом в работе [1] (сильно простое действие в смысле определения 1 называлось в [1] *действием $\mathbb{Z}/p$, множество неподвижных точек которого имеет тривиальное нормальное расслоение*). Обратим внимание на то, что даже в случае действия с изолированными неподвижными точками понятия простого и сильно простого действия отличаются (соответствующие примеры приведены в работе). Результаты Коннера и Флойда получены в качестве следствия в данной работе. В то же время методы, используемые в [1], судя по всему, не позволяют получить наш, более общий, результат.

Начиная с работы [2], для решения задач, связанных с действиями $\mathbb{Z}/p$, использовалась теория формальных групп, которая вошла в топологию благодаря формальной группе геометрических кобордизмов. Рассматриваемая проблема впервые четко сформулирована в работе [3], где была получена формула, выражающая класс кобордизма $\text{mod } p$ многообразия M^{2n} с простым действием $\mathbb{Z}/p$ через инварианты действия (см.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01404.

формулу (7)). Фактически, первые результаты по этой проблеме получены в работе [4] и, в частности, результат, сформулированный у нас как следствие 3. В [4], как и в этой работе, используется описание множества классов кобордизмов, представленных многообразиями с простым действием $\mathbb{Z}/p$ как Ω_U -модуля, натянутого на некоторую систему коэффициентов степенной системы, определяемой формальной группой геометрических кобордизмов. Новый набор образующих этого Ω_U -модуля, введенный нами, позволил решить классификационную задачу в терминах характеристических чисел.

Итак, пусть на квазикомплексном многообразии M^{2n} действует преобразование g простого периода $p > 2$ (т.е. $g^p = \text{id}$), так что множество неподвижных точек представляет собой объединение подмногообразий с тривиальными нормальными расслоениями (например, лишь изолированные неподвижные точки), т.е. задано простое $\mathbb{Z}/p$ -действие. Пусть множество неподвижных точек преобразования g представляет собой объединение неподвижных подмногообразий классов $\lambda_j \in \Omega_U$, имеющих веса $(x_k^{(j)}) \in (\mathbb{Z}/p)^*$ (т.е. неединичные собственные числа дифференциала отображения g в неподвижных точках) в тривиальных нормальных расслоениях к ним. Эти данные определяют класс кобордизма многообразия M^{2n} в Ω_U с точностью до элементов из $p\Omega_U$ (см. [3]), так как в любом классе кобордизмов из $p\Omega_U$, очевидно, имеется многообразие, допускающее действие $\mathbb{Z}/p$ (переставляющее компоненты связности) без неподвижных точек.

Каждому неподвижному подмногообразию класса $\lambda_j \in \Omega_U$ с весами $(x_1^{(j)}, \dots, x_{m_j}^{(j)})$, $2m_j + \dim \lambda_j = 2n$, соответствует *инвариант Коннера–Флойда*

$$\alpha_{2m_j-1}(x_1^{(j)}, \dots, x_{m_j}^{(j)}) \in U_{2m_j-1}(B\mathbb{Z}/p)$$

(см. [2]). Кольцо кобордизмов $U^*(B\mathbb{Z}/p)$ имеет вид $U^*(B\mathbb{Z}/p) = \Omega_U[[u]]/[u]_p = 0$, где $[u]_p = p\Psi^p(u) - p$ -я степень в формальной группе геометрических кобордизмов (см. [3]). Из того что $D(\alpha_i(1, \dots, 1)) = u^{n-i}$, где D – оператор двойственности Пуанкаре–Атья между $U_*(L_p^{2n-1})$ и $U^*(L_p^{2n-1})$, следует, что Ω_U -модуль $\tilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ порождается элементами $\alpha_{2i-1}(1, \dots, 1)$ и соотношениями

$$0 = \frac{[u]_p}{u} \cap \alpha_{2i-1}(1, \dots, 1), \quad (1)$$

где “ $\cap$ ” – оператор “высечения” Чеха, $u^k \cap \alpha_{2i-1}(1, \dots, 1) = \alpha_{2(i-k)-1}(1, \dots, 1)$.

В [5] было доказано, что

$$\alpha_{2k-1}(x_1, \dots, x_k) = \left(\prod_{j=1}^k \frac{u}{[u]_{x_j}} \right) \cap \alpha_{2k-1}(1, \dots, 1). \quad (2)$$

Расширив систему образующих модуля $\tilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ элементами $\alpha_{2k-1}(x_1, \dots, x_k)$ для $x_j \neq 1 \bmod p$ и добавив к соотношениям (1) соотношения (2), получим $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -свободную резольвенту модуля $\tilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ (здесь $\mathbb{Z}_{(p)}$ – кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p , которое можно рассматривать как кольцо p -адических чисел):

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \tilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p) \longrightarrow 0,$$

где F_0 – свободный $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модуль, натянутый на образующие $\alpha_{2k-1}(x_1, \dots, x_k)$, F_1 – свободный $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модуль соотношений, натянутый на соотношения

$$a(x_1, \dots, x_k) = \alpha_{2k-1}(x_1, \dots, x_k) - \left(\prod_{j=1}^k \frac{u}{[u]_{x_j}} \right) \cap \alpha_{2k-1}(1, \dots, 1),$$

$$a_k = \frac{[u]_p}{u} \cap \alpha_{2k-1}(1, \dots, 1).$$

Каждое простое действие $\mathbb{Z}/p$ на M^{2n} задает соотношение между элементами $\alpha_{2k-1}(x_1, \dots, x_k)$ в $\tilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$. В силу определения элементов $\tilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ как классов бордизмов многообразий со свободным действием группы $\mathbb{Z}/p$ верно и обратное: каждое соотношение в $\tilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ вида

$$\sum_j \lambda_j \alpha_{2m_j-1}(x_1^{(j)}, \dots, x_{m_j}^{(j)}) = 0, \quad \lambda_j \in \Omega_U, \quad 2m_j + \dim \lambda_j = 2n,$$

реализуется на некотором многообразии M^{2n} с простым действием $\mathbb{Z}/p$ (M^{2n} получается из “пленки” со свободным действием $\mathbb{Z}/p$, натянутой на объединение многообразий $\lambda_j \times S^{2m_j-1}$, соответствующей соотношению в $\tilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$, путем приклеивания $\lambda_j \times D^{2m_j}$), причем класс кобордизма M^{2n} в Ω_U определен однозначно с точностью до элементов $p\Omega_U$. Таким образом, определен гомоморфизм реализации

$$\Phi: F_1 \rightarrow \Omega_U/p\Omega_U = \Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p,$$

ставящий в соответствие соотношению между $\alpha_{2k-1}(x_1, \dots, x_k) \in \tilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ класс кобордизмов $\text{mod } p$ многообразия, на котором это соотношение реализуется в указанном выше смысле. В силу результатов Коннера и Флойда (см. [1], а также [4]) для базисных соотношений из F_1 имеем

$$\begin{aligned} \Phi(a(x_1, \dots, x_k)) &= \left\langle \prod_{i=1}^k \frac{u}{[u]_{x_i}} \right\rangle_k \text{ mod } p \in \Omega_U/p\Omega_U, \\ \Phi(a_k) &= - \left\langle \frac{[u]_p}{u} \right\rangle_k \text{ mod } p \in \Omega_U/p\Omega_U, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot \rangle_k$ означает коэффициент при u^k . Отсюда следует, что $\text{Im } \Phi = \tilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$, где $\tilde{\Lambda}(1) = \Lambda^+(1) \cdot \Omega_U$ есть Ω_U -модуль, натянутый на положительную часть $\Lambda^+(1)$ кольца коэффициентов $\Lambda(1)$ степенной системы $[u]_k$. Гомоморфизм Φ поднимается до гомоморфизмов $\Phi: F_1 \rightarrow \tilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ или $\Phi: F_1 \rightarrow \tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, где $\tilde{\Lambda}_p(1)$ есть Ω_U -модуль, натянутый на $\Lambda^+(1)$ и p .

Таким образом, задача об описании множества классов кобордизмов многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ сводится к описанию $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$ -модуля $\tilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$ или $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модулей $\tilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ и $\tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, которые также являются идеалами в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$ и $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ соответственно.

Пусть

$$[u]_k = ku + \sum_{n \geq 1} \alpha_n^{(k)} u^{n+1},$$

$\alpha_n^{(k)} \in \Omega_U^{-2n}$ – коэффициенты степенной системы.

ТЕОРЕМА 1. В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модуля $\tilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ можно взять следующие коэффициенты $\alpha_n \in \Omega_U^{-2n}$:

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1, \\ \alpha_n^{(p)}, & \text{если } n \text{ делится на } p-1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где p_1 – простой первообразный корень $\text{mod } p$ (т.е. p_1 – образующая циклической группы $(\mathbb{Z}/p)^*$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы Дирихле следует, что среди всех первообразных корней $\bmod p$ имеются простые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим вначале коэффициенты $\alpha_n^{(r)}$, где r не является простым. Пусть $r = p_1 q$, где p_1 – простое число. Так как $[x]_r = [[x]_{p_1}]_q$, имеем

$$\begin{aligned} rx + \sum_n \alpha_n^{(r)} x^{n+1} &= q[x]_{p_1} + \sum_n \alpha_n^{(q)} ([x]_{p_1})^{n+1} \\ &= p_1 qx + q \sum_n \alpha_n^{(p_1)} x^{n+1} + \sum_n \alpha_n^{(q)} \left(p_1 x + \sum_m \alpha_m^{(p_1)} x^{m+1} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим $\alpha_n^{(r)} = P(\alpha_1^{(p_1)}, \dots, \alpha_n^{(p_1)}, \alpha_1^{(q)}, \dots, \alpha_n^{(q)})$, где P – некоторый полином с целыми коэффициентами (без свободного члена). Отсюда получаем представление

$$\alpha_n^{(r)} = \lambda_1 \alpha_1^{(p_1)} + \dots + \lambda_n \alpha_n^{(p_1)} + \mu_1 \alpha_1^{(q)} + \dots + \mu_n \alpha_n^{(q)}, \quad \lambda_i, \mu_i \in \Omega_U.$$

Таким образом, коэффициенты $\alpha_n^{(r)}$, $r = p_1 q$, можно исключить из системы образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модуля $\tilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Если q снова не является простым, то повторяем эту процедуру, и т.д. В итоге получаем систему образующих модуля $\tilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, состоящую лишь из коэффициентов $\alpha_n^{(p_1)}$ с простыми p_1 . Среди всех простых p_1 имеется выделенное простое число p . Далее покажем, что эту систему образующих можно сузить до системы (3).

Вначале заметим, что в размерности 1 (т.е. в Ω_U^{-2}) в качестве образующей $\tilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ можно взять $\alpha_1^{(p_1)}$, где p_1 – простой первообразный корень $\bmod p$. Действительно, пусть p_2 – любое простое число. Тогда $[x]_{p_2} = [[x]_{p_1}]_{p_2}$, т.е.

$$\begin{aligned} p_1 p_2 x + p_1 \sum_n \alpha_n^{(p_2)} x^{n+1} + \sum_n \alpha_n^{(p_1)} \left(p_2 x + \sum_m \alpha_m^{(p_2)} x^{m+1} \right)^{n+1} \\ = p_2 p_1 x + p_2 \sum_n \alpha_n^{(p_1)} x^{n+1} + \sum_n \alpha_n^{(p_2)} \left(p_1 x + \sum_m \alpha_m^{(p_1)} x^{m+1} \right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Приравнивая коэффициенты при x^2 , получим $p_1 \alpha_1^{(p_2)} + p_2^2 \alpha_1^{(p_1)} = p_2 \alpha_1^{(p_1)} + p_1^2 \alpha_1^{(p_2)}$, т.е. $(p_1 - p_1^2) \alpha_1^{(p_2)} = (p_2 - p_2^2) \alpha_1^{(p_1)}$. Так как p_1 – первообразный корень, $p_1 - p_1^2$ обратимо в $\mathbb{Z}_{(p)}$. Значит, $\alpha_1^{(p_2)} = \lambda \alpha_1^{(p_1)}$, где $\lambda \in \mathbb{Z}_{(p)} \subset \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, т.е. для любого p_2 коэффициент $\alpha_1^{(p_2)}$ выражается через $\alpha_1^{(p_1)}$.

Допустим, мы доказали, что система (3) коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$ (т.е. α_i – коэффициент при x^{i+1} в $[x]_{p_1}$, если i не делится на $p-1$, и коэффициент при x^{i+1} в $[x]_p$, если i делится на $p-1$) является системой образующих $\tilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ до размерности $n-1$, т.е. при любом $k \leq n-1$ и любом q имеется представление $\alpha_k^{(q)} = \lambda_1^{(q)} \alpha_1 + \dots + \lambda_k^{(q)} \alpha_k$, $\lambda_i^{(q)} \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Докажем, что такое представление имеется и для $\alpha_n^{(q)}$. Из сказанного выше следует, что достаточно ограничиться простыми q . Пусть вначале n не делится на $p-1$, т.е. $\alpha_n = \alpha_n^{(p_1)}$, где p_1 – первообразный корень $\bmod p$, и пусть p_2 – произвольное простое число. Приравняем в (4) коэффициенты при x^{n+1} :

$$p_1 \alpha_n^{(p_2)} + p_2^{n+1} \alpha_n^{(p_1)} + \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_{n-1} \alpha_{n-1} = p_2 \alpha_n^{(p_1)} + p_1^{n+1} \alpha_n^{(p_2)} + \nu_1 \alpha_1 + \dots + \nu_{n-1} \alpha_{n-1}$$

(мы разложили все коэффициенты $\alpha_k^{(p_1)}, \alpha_k^{(p_2)}, k < n$, по образующим $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, т.е. $\mu_i, \nu_i \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$). Отсюда

$$p_1(1 - p_1^n)\alpha_n^{(p_2)} = (p_2 - p_2^{n+1})\alpha_n^{(p_1)} + (\nu_1 - \mu_1)\alpha_1 + \dots + (\nu_{n-1} - \mu_{n-1})\alpha_{n-1}. \quad (5)$$

Так как p_1 – первообразный корень mod p и n не делится на $p - 1$, то $p_1(1 - p_1^n)$ обратимо в $\mathbb{Z}_{(p)}$. Тогда из (5) получаем выражение $\alpha_n^{(p_2)}$ через $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ и $\alpha_n = \alpha_n^{(p_1)}$ с коэффициентами в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.

Пусть теперь n делится на $p - 1$. Сделаем вначале несколько предварительных замечаний. Известно, что Ω_U является кольцом полиномов: $\Omega_U = \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, $a_n \in \Omega_U^{-2n}$. Кольцо Ω_U является кольцом коэффициентов (универсальной) формальной группы геометрических кобордизмов, а кольцом коэффициентов логарифма этой формальной группы является кольцо $\Omega_U(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[b_1, b_2, \dots, b_n, \dots]$,

$$b_n = \frac{\mathbb{CP}_n}{n+1}, \quad g(u) = u + \sum_n \frac{\mathbb{CP}_n}{n+1} u^{n+1}.$$

При этом в кольцах $\Omega_U, \Omega_U(\mathbb{Z})$ можно выбрать мультипликативные образующие $\{a_i^*\}, \{b_i^*\}$ так, что вложение $\iota_0: \Omega_U \rightarrow \Omega_U(\mathbb{Z})$ задается следующим образом:

$$\iota_0(a_i^*) = \begin{cases} p \cdot b_i^*, & \text{если } i = p^k - 1 \text{ для некоторого } k, \\ b_i^*, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть B^+ – положительная часть кольца $B = \Omega_U(\mathbb{Z})$. Тогда $(B^+)^2$ – разложимые элементы в $\Omega_U(\mathbb{Z})$. При вложении $\iota_0: \Omega_U \rightarrow \Omega_U(\mathbb{Z})$ коэффициенты $\alpha_n^{(p)}$ ряда $[x]_p$ переходят в элементы $(p - p^{n+1})b_n + (B^+)^2$. Таким образом, коэффициенты $\alpha_{p^k-1}^{(p)}$ можно взять за мультипликативные образующие кольца $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ в размерностях $p^k - 1$. В размерностях $l \neq p^k - 1$ имеем $\alpha_l^{(p)} \in p\Omega_U$, т.е. $\alpha_l^{(p)}$ делится на p в Ω_U .

Перепишем соотношение (4), подставляя p вместо p_1 :

$$\begin{aligned} & pp_2x + p \sum_m \alpha_m^{(p_2)} x^{m+1} + \sum_m \alpha_m^{(p)} (p_2x + \alpha_1^{(p_2)} x^2 + \alpha_2^{(p_2)} x^3 + \dots)^{m+1} \\ &= p_2px + p_2 \sum_m \alpha_m^{(p)} x^{m+1} + \sum_m \alpha_m^{(p_2)} (px + \alpha_1^{(p)} x^2 + \alpha_2^{(p)} x^3 + \dots)^{m+1}. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при x^{n+1} :

$$\begin{aligned} & p\alpha_n^{(p_2)} + p_2^{n+1}\alpha_n^{(p)} + \left\langle \sum_{m < n} \alpha_m^{(p)} (p_2x + \alpha_1^{(p_2)} x^2 + \alpha_2^{(p_2)} x^3 + \dots)^{m+1} \right\rangle_{n+1} \\ &= p_2\alpha_n^{(p)} + p^{n+1}\alpha_n^{(p_2)} + \left\langle \sum_{m < n} \alpha_m^{(p_2)} (px + \alpha_1^{(p)} x^2 + \alpha_2^{(p)} x^3 + \dots)^{m+1} \right\rangle_{n+1}, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot \rangle_{n+1}$ означает коэффициент при x^{n+1} . Разложим коэффициенты $\alpha_m^{(p_2)}$ при $m < n$ по образующим $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Так как $\alpha_m^{(p)} \in p\Omega_U$ при $m \neq p^k - 1$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\begin{aligned} & p(1 - p^n)\alpha_n^{(p_2)} = p_2(1 - p_2^n)\alpha_n^{(p)} + p(\mu_1\alpha_1 + \dots + \mu_n\alpha_n) \\ & - \left\langle \sum_{k: p^k-1 < n} \alpha_{p^k-1}^{(p)} (p_2x + \alpha_1^{(p_2)} x^2 + \alpha_2^{(p_2)} x^3 + \dots)^{p^k} \right\rangle_{n+1} \\ & + \left\langle \sum_{m < n} \alpha_m^{(p_2)} (\alpha_{p-1}^{(p)} x^p + \alpha_{p^2-1}^{(p)} x^{p^2} + \dots + \alpha_{p^k-1}^{(p)} x^{p^k} + \dots)^{m+1} \right\rangle_{n+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Последние два слагаемых мы можем записать в виде $\alpha_{p-1}^{(p)}\nu_1 + \alpha_{p^2-1}^{(p)}\nu_2 + \dots + \alpha_{p^k-1}^{(p)}\nu_k$, где $p^k - 1 < n$, $\nu_i \in \Omega_U$. Так как остальная часть соотношения (6) лежит в $p\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ (т.е. делится на p), а $\alpha_{p^i-1}^{(p)}$ являются полиномиальными образующими $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ в размерностях $p^i - 1$, отсюда следует, что и $\nu_i \in p\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, т.е. ν_i делятся на p в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Пусть $\nu_i = p\kappa_i$, $\kappa_i \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Тогда (6) можно записать в виде

$$p(1 - p^n)\alpha_n^{(p_2)} = p_2(1 - p_2^n)\alpha_n^{(p)} + p(\mu_1\alpha_1 + \dots + \mu_n\alpha_n) + p(\alpha_{p-1}^{(p)}\kappa_1 + \alpha_{p^2-1}^{(p)}\kappa_2 + \dots + \alpha_{p^k-1}^{(p)}\kappa_k), \quad p^k - 1 < n, \quad \mu_i, \kappa_i \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Так как n делится на $p - 1$, то $1 - p_2^n$ делится на p (при $p_2 \neq p$). Таким образом, все соотношение делится на p . Разделим его на p , учитывая, что $1 - p^n$ обратимо в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, получим, что $\alpha_n^{(p_2)}$ представляется в виде

$$\alpha_n^{(p_2)} = \frac{p_2(1 - p_2^n)}{p(1 - p^n)}\alpha_n^{(p)} + \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_{n-1}\alpha_{n-1}.$$

Полагая

$$\lambda_n = \frac{p_2(1 - p_2^n)}{p(1 - p^n)} \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)},$$

получим искомое представление и для $\alpha_n^{(p_2)}$ (так как $\alpha_n = \alpha_n^{(p)}$). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модуля $\tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ можно взять следующие:

$$\alpha_n = \begin{cases} p, & \text{если } n = 0, \\ \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p - 1, \text{ } p_1 - \text{первообразный корень mod } p, \\ \alpha_{p^k-1}^{(p)}, & \text{если } n = p^k - 1, \text{ } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$ -модуля $\tilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$ можно взять

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p - 1, \\ \alpha_{p^k-1}^{(p)}, & \text{если } n = p^k - 1, \text{ } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

В остальных размерностях образующих нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из того, что для системы образующих $\tilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, построенной в теореме 1 при n кратных $p - 1$, но $n \neq p^k - 1$, элементы α_n делятся на p , т.е. лежат в $p\Omega_U$, а остальные α_n не лежат в $p\Omega_U$.

Далее, используя описание структуры $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модуля $\tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, докажем результат, аналогичный теореме Стонга–Хаттори, – опишем множество классов кобордизма, имеющих в качестве представителя многообразие с простым действием $\mathbb{Z}/p$ в терминах характеристических чисел.

Как известно из [3], гомоморфизм $\Phi: F_1 \rightarrow \tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ продолжается до гомоморфизма $\gamma_p: F_0 \rightarrow \Omega_U(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, причем имеет место формула

$$\gamma_p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \left\langle \left(\prod_{j=1}^k \frac{u}{[u]_{x_j}} \right) \frac{pu}{[u]_p} \right\rangle_k.$$

В частности,

$$\gamma_p(1, \dots, 1) = \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \right\rangle_k,$$

где $\gamma_p(x_1, x_2, \dots, x_k) := \gamma_p(\alpha_{2k-1}(x_1, x_2, \dots, x_k))$, $\alpha_{2k-1}(x_1, x_2, \dots, x_k) \in F_0$.

Таким образом, для действия группы $\mathbb{Z}/p$ на M^{2n} с неподвижными подмногообразиями классов $\lambda_j \in \Omega_U$, имеющими веса $(x_k^{(j)}) \in (\mathbb{Z}/p)^*$ в тривиальных нормальных расслоениях к ним, имеет место соотношение

$$[M^{2n}] \equiv \sum_j \lambda_j \gamma_p(x_1^{(j)}, \dots, x_{m_j}^{(j)}) \bmod p\Omega_U. \quad (7)$$

Возникает вопрос, аналогичный проблеме Милнора–Хирцебруха (ответ на которую дает теорема Стонга–Хаттори), поставленный в работе [3]: какие из элементов вида

$$\sum_j \lambda_j \gamma_p(x_1^{(j)}, \dots, x_{m_j}^{(j)}) \in \Omega_U(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

представляют собой классы кобордизма многообразий, несущих простое действие $\mathbb{Z}/p$? Ответ на этот вопрос дает теорема 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, $k_i \geq 0$, – разбиение числа $n = \|\omega\| = \sum_i k_i \cdot i$. Назовем разбиение ω *кратным* $p-1$, если все i , для которых $k_i \neq 0$, кратны $p-1$ (естественно, такие разбиения существуют только для n , кратных $p-1$). Назовем разбиение ω *не p -адическим*, если для любого $j > 0$ $k_{p^j-1} = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Элемент $\sigma \in \Omega_U(\mathbb{Z})^{-2n} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ лежит в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модуле $\tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ и, таким образом, является классом кобордизма многообразия с простым действием $\mathbb{Z}/p$ тогда и только тогда, когда все K -характеристические числа $s_\omega(\sigma)$, $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, $\|\omega\| = \sum_i k_i \cdot i \leq n$, лежат в $\mathbb{Z}_{(p)}$ и для всех разбиений ω , кратных $p-1$, когомологические числа $s_\omega(\sigma)$, $\|\omega\| = n$, делятся на p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\sigma \in \tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Заметим, что система образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модуля $\tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, описанная в следствии 1, обладает тем свойством, что каждый элемент $\alpha_i \in \tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ из системы образующих является также полиномиальной образующей $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ в размерности $-2i$. Дополним эту систему образующих полиномиальными образующими α_i в недостающих размерностях $-2i$ таких, что i делится на $p-1$, но $i \neq p^k-1$. Таким образом, $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)}[\alpha_1, \alpha_2, \dots]$.

Так как $\sigma \in \tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \subset \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, все K -характеристические числа $s_\omega(\sigma)$ лежат в $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Если n не делится на $p-1$, то разбиений ω , кратных $p-1$, не существует.

Пусть $n = m(p-1)$. Представим σ как полином от α_i (σ является однородным полиномом степени $-2m(p-1)$):

$$\sigma = \sum_{\|\omega\|=m(p-1)} r_\omega \alpha_\omega = r_{m(p-1)} \alpha_{m(p-1)} + \dots, \quad \omega = \sum_i k_i \cdot (i), \quad \alpha_\omega = \alpha_1^{k_1} \cdot \alpha_2^{k_2} \cdot \dots. \quad (8)$$

Из описания структуры $\tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ (см. следствие 1) следует, что $\sigma \in \tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ тогда и только тогда, когда для всех не p -адических разбиений ω , кратных $p-1$, коэффициенты r_ω в разложении (8) делятся на p .

Пусть

$$\text{ch}_U(u) = t + \sum_{i \geq 1} \beta_i t^{i+1}, \quad u = c_1^U(\zeta) \in U^2(\mathbb{CP}(\infty)), \quad t = c_1^H(\zeta) \in H^2(\mathbb{CP}(\infty)),$$

ch_U – характер Чженя–Дольда в кобордизмах (см. [6]), $\beta_i \in \Omega_U(\mathbb{Z})$. Тогда для любого $\sigma \in \Omega_U^{-2n}$ имеем

$$\sigma = \sum_{\|\omega\|=n} s_\omega(\sigma) \beta_\omega \quad \text{и} \quad B = \Omega_U(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\beta_1, \beta_2, \dots].$$

Кроме того,

$$\alpha_i = \begin{cases} e_i \cdot \beta_i + (B^+)^2 & \text{для } i \neq p^k - 1, \\ p e_i \cdot \beta_i + (B^+)^2 & \text{для } i = p^k - 1, \end{cases}$$

где $e_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$ – обратимый элемент (единица). Таким образом, для всех разбиений $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, кратных $p-1$, коэффициент при β_ω в разложении σ равен

$$s_\omega(\sigma) = \sum_{\omega': \omega' \supset \omega} r_{\omega'} s_\omega(\alpha_{\omega'}), \quad (9)$$

где $\omega' \supset \omega$ означает, что ω является измельчением разбиения ω' . Этот коэффициент делится на p . Действительно, если разбиение $\omega' = \sum_i k'_i \cdot (i)$ кратно $p-1$ и не p -адическое, то $r_{\omega'}$ делится на p , так как $\sigma \in \tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ (см. выше), а если среди i таких, что $k'_i \neq 0$, есть числа вида $p^k - 1$, то $\alpha_{\omega'} \in p\Omega_U(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, т.е. $s_\omega(\alpha_{\omega'})$ делится на p .

Достаточность. Так как все K -характеристические числа σ лежат в $\mathbb{Z}_{(p)}$, по теореме Стонга–Хаттори (см. [7]) $\sigma \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Пусть, кроме того, для любого разбиения $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, $\|\omega\| = n$, кратного $p-1$, число $s_\omega(\sigma)$ делится на p .

Рассмотрим построенную выше систему $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Для того чтобы доказать, что $\sigma \in \tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, необходимо доказать, что для любого не p -адического разбиения $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, кратного $p-1$, коэффициент r_ω в разложении (8) делится на p . Пусть ω – такое разбиение. Перепишем соотношение (9) в виде

$$s_\omega(\sigma) = r_\omega s_\omega(\alpha_\omega) + \sum_{\omega' \supset \omega, \omega' \neq \omega} r_{\omega'} s_\omega(\alpha_{\omega'}). \quad (10)$$

По индукции для любого не p -адического, кратного $p-1$ разбиения $\omega' \supset \omega$, $\omega' \neq \omega$, $\|\omega'\| = m(p-1)$, имеем, что $r_{\omega'}$ делится на p . Если же в разбиении $\omega' = \sum_i k'_i \cdot (i)$ найдется $k'_i = p^k - 1$, то $s_\omega(\alpha_{\omega'})$ делится на p . Поэтому второе слагаемое в правой части (10) делится на p . По предположению $s_\omega(\sigma)$ также делится на p , а $s_\omega(\alpha_\omega)$ не делится на p , так как при нашем выборе ω имеем $\alpha_\omega = e \cdot \beta_\omega + \dots$, где $e \in \mathbb{Z}_{(p)}$ – обратимый элемент. Поэтому из (10) следует, что r_ω делится на p . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Элемент $\sigma \in \Omega_U$ является классом кобордизма многообразия с действием $\mathbb{Z}/p$ с неподвижными многообразиями с тривиальными нормальными расслоениями тогда и только тогда, когда для всех разбиений ω , кратных $p-1$, когомологические числа $s_\omega(\sigma)$, $\|\omega\| = n$, делятся на p .

СЛЕДСТВИЕ 3. В каждом классе кобордизма многообразий M^n , $n \leq 4p - 6$, содержатся многообразия, несущие простое действие $\mathbb{Z}/p$.

В размерности $n = 4p - 4$ уже имеется многообразие (например, $\mathbb{C}P^{2p-2}$), в классе кобордизма которого не содержатся многообразия с простым действием $\mathbb{Z}/p$.

В работе Коннера и Флойда [1] методами, не использующими технику формальных групп, показано, что класс кобордизма $\sigma \in \Omega_U$ содержит многообразие с *сильно* простым действием $\mathbb{Z}/p$ тогда и только тогда, когда *все* характеристические числа $s_\omega(\sigma)$ делятся на p . Точнее, множество классов кобордизма, содержащих многообразия с сильно простым действием $\mathbb{Z}/p$, совпадает с Ω_U -модулем, натянутым на систему образующих $Y^0 = p, Y^1, Y^2, \dots$, где $Y^i \in \Omega_U^{p^i-1}$ — так называемые *многообразия Милнора*, однозначно определяемые условиями: $s_{p^i-1}(Y^i) = p$, $s_\omega(Y^i)$ делятся на p при любом ω . Если вместо Ω_U -модулей рассматривать $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модули (этого вполне достаточно для описания множества классов кобордизма в терминах характеристических чисел), то в качестве представителей Y^i можно взять элементы $\alpha_{p^i-1}^{(p)}$ из следствия 1. Отсюда становится ясно, каким образом $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модуль $\Omega_U \langle p, Y^1, Y^2, \dots \rangle \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, изучавшийся Коннером и Флойдом, вложен в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ -модуль $\tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, изученный нами (система образующих модуля Коннера и Флойда является подсистемой образующих модуля $\tilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$).

Заметим, наконец, что если некоторый класс $\sigma \in \Omega_U$ содержит представителя M , несущего сильно простое действие $\mathbb{Z}/p$, то необязательно любое простое действие $\mathbb{Z}/p$ на M будет сильно простым. Действительно, рассмотрим $M_1 = \mathbb{C}P^{p-1}$ с действием образующей $\rho(z_1 : \dots : z_p) = (z_1 : \rho z_2 : \dots : \rho^{p-1} z_p)$ (это действие с p неподвижными точками является сильно простым действием) и $M_2 = \mathbb{C}P^1$, $\rho(z_1 : z_2) = (z_1 : \rho z_2)$ (это простое действие с двумя неподвижными точками не является сильно простым). Тогда на $M = M_1 \times M_2$ имеется два простых действия $\mathbb{Z}/p$: $\rho(a, b) = (\rho a, b)$ и $\rho(a, b) = (a, \rho b)$, $a \in \mathbb{C}P^{p-1}$, $b \in \mathbb{C}P^1$, первое из которых является сильно простым, а второе — нет.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. В.М. Бухштаберу за полезные рекомендации и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коннер П., Флойд Э. Гладкие периодические отображения. М.: Мир, 1969.
- [2] Новиков С.П. Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. С. 855–951.
- [3] Бухштабер В.М., Новиков С.П. Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса // Матем. сб. 1971. Т. 84(126). С. 81–118.
- [4] Каспаров Г.Г. Инварианты классических линзовых многообразий в теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. С. 735–747.
- [5] Новиков С.П. Операторы Адамса и неподвижные точки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. С. 1245–1263.
- [6] Бухштабер В.М. Характер Чженя–Дольда в теории кобордизмов. I // Матем. сб. 1970. Т. 83(125). С. 575–595.
- [7] Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973.