Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Старков, Тихоновское свойство для линейных групп,
Матем. заметки, 1998, том 63, выпуск 2, 269–279

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 05:47:13

УДК 512.546

ТИХОНОВСКОЕ СВОЙСТВО ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

А. Н. Старков

В работе доказан критерий тихоновости для широкого класса топологических групп, включающих линейные дискретные группы и группы Ли. Главный результат дает критерий тихоновости для почти полициклических групп. Ввиду известной альтернативы Титса это дает требуемый критерий для линейных дискретных групп. В заключение отмечено, что частный случай приведенного доказательства дает критерий тихоновости для групп Ли. Кроме того, построен пример полициклической группы, которая не имеет тихоновских подгрупп конечного индекса.

Библиография: 7 названий.

Введение. В этой работе мы доказываем критерий тихоновости для широкого класса топологических групп. Этот класс включает линейные дискретные группы и группы Ли. Определение тихоновской группы было введено Фюрстенбергом [1] в ходе изучения случайных блужданий на группах. Он, в частности, доказал, что нильпотентные группы Ли и параболические подгруппы в полупростых группах Ли являются тихоновскими.

Изучение тихоновского свойства для локально компактных групп было продолжено Конце и Гиваршем [2]. Они доказали критерий тихоновости для групп Ли и построили пример тихоновской группы Ли с нетихоновской подгруппой Ли. Кроме того, они доказали, что если подгруппа $F \subset G$ равномерна (т.е. факторпространство G/F компактно) в локально компактной тихоновской группе, то она также является тихоновской.

Недавно Григорчук [3] получил ряд результатов о тихоновских свойствах счетных групп. Основной из них состоит в том, что конечно порожденная бесконечная тихоновская группа допускает эпиморфизм на аддитивную группу $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Наш главный результат дает критерий тихоновости для почти полициклических групп; его доказательство достаточно элементарно и не использует теорию случайных блужданий. Ввиду известной альтернативы Титса [4] это дает требуемый критерий для линейных дискретных групп. В заключение мы отмечаем, что частный случай нашего доказательства дает критерий тихоновости для групп Ли. Кроме того, мы строим пример полициклической группы, которая не имеет тихоновских подгрупп конечного индекса.

1. Определения и соглашения. Вначале изложим подготовительный материал. Запись $G = F \cdot H$ будет означать, что группа G есть полупрямое произведение подгруппы $F \subset G$ и нормальной подгруппы $H \subset G$, т.е. $G = FH$ и $F \cap H = 1$, где 1 –

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00182, и фонда Американского математического общества.

единичный элемент в G . Если F – подгруппа в топологической группе G , то $\overline{F}$ обозначает замыкание F в топологии группы G . Далее $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ обозначает коммутатор элементов $g, h \in G$, а $Z_G(H)$ – централизатор подгруппы $H \subset G$ в G ; $\mathbb{Z}(a) \subset G$ и $\mathbb{Z}_n(b) \subset G$ – соответственно свободная циклическая группа и группа порядка n , порожденные элементами $a, b \in G$; $\mathbb{R}^*$ – мультипликативная группа положительных чисел; $\mathbb{R}^+$ – замкнутое множество всех неотрицательных чисел. Абелева группа непрерывных мультипликативных характеров $\chi: G \rightarrow \mathbb{R}^*$ обозначается через $X^+(G)$, векторное пространство непрерывных аддитивных характеров – через $X(G)$. Ясно, что отображение $\log: X^+(G) \rightarrow X(G)$ является изоморфизмом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть L – локально выпуклое линейное топологическое пространство и $\Phi: L \rightarrow \mathbb{R}$ – линейный непрерывный функционал. Тогда $K \subset L$ есть *выпуклый конус с компактной базой*, если $B = K \cap \Phi^{-1}(1)$ является выпуклым компактом и $K = \mathbb{R}^+ B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Топологическая группа G называется *тихоновской*, если для любого линейного непрерывного действия на локально выпуклом линейном топологическом пространстве L в каждом G -инвариантном конусе $K \subset L$ с компактной базой найдется G -инвариантный луч $\mathbb{R}^+ x \subset K$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Такие действия естественно возникают в теории случайных блужданий. Пусть, например, G – счетная группа и μ – вероятностная мера на G . Можно определить правое случайное блуждание на G следующим образом: за время $\Delta t = 1$ мы перемещаемся из точки $g \in G$ в точку $gh \in G$ с вероятностью $\mu(h)$. Определим марковский оператор P на пространстве $L^1(G, \mu)$ формулой

$$Pf(g) = \sum_{h \in G} \mu(h)f(gh).$$

Если в данный момент мы находимся в точке $g \in G$, то $Pf(g)$ есть математическое ожидание функции f в следующий момент времени. Функция f на G называется λ -гармонической, если $Pf = \lambda f$, и λ -субгармонической, если $Pf \leq \lambda f$. Можно проверить, что множество положительных λ -субгармонических функций образует выпуклый конус с компактной базой. Если μ имеет конечный носитель, то конус положительных λ -гармонических функций также имеет компактную базу.

Заметим, что факторгруппа тихоновской группы обязана быть тихоновской. Более того, если $p: G \rightarrow G'$ – непрерывный гомоморфизм топологических групп такой, что образ $p(G)$ плотен в G' , и G является тихоновской, то и G' является тихоновской.

Если группа G конечна, то барицентр любой орбиты $G(x) \subset K$ G -неподвижен. Поэтому конечная группа всегда обладает даже неподвижным лучом (в частности, является тихоновской).

Одно из эквивалентных определений аменабельной группы состоит в том, что для аффинного действия G на локально выпуклом линейном топологическом пространстве L в каждом G -инвариантном выпуклом компакте $B \subset L$ найдется G -неподвижная точка $x \in B$. Если мы имеем линейное непрерывное действие G на конусе K , то на его базе B можно определить непрерывное действие G формулой

$$\tilde{g}(x) = \frac{g(x)}{\Phi(g(x))}$$

(заметим, что из $g(K) = K$ вытекает $g(0) = 0$, поэтому действие G на B определено корректно). По теореме Шаудера–Тихонова [5] гомеоморфизм выпуклого компакта всегда имеет неподвижную точку, поэтому циклическая группа является тихоновской. Однако, индуцированное действие G на B не обязано быть аффинным и поэтому аменабельная группа, вообще говоря, не обязана быть тихоновской.

Простейшим примером нетихоновской группы (см. [1]) является полупрямое произведение

$$G = \mathbb{Z}_2(\sigma) \cdot \mathbb{Z}(a) \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \quad \text{где } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(конус $\{x, y \geq 0\}$ является G -инвариантным и не имеет G -инвариантного луча).

С другой стороны, любая тихоновская группа является аменабельной. В самом деле, пусть G действует аффинно и непрерывно на выпуклом компакте B в линейном топологическом пространстве L . Зададим действие G на $L^* = L \times \mathbb{R}$ следующим образом. Если $g(x) = Ax + b$, где $A: L \rightarrow L$ – линейный непрерывный оператор и $b \in L$, то положим $g^*(x, t) = (Ax + tb, t)$. Легко проверить, что полученное таким образом действие линейно, непрерывно и совпадает с исходным действием на $L \times \{1\}$. Конус $K = \mathbb{R}^+(B, 1)$ является G -инвариантным и ввиду тихоновости содержит G -инвариантный луч $\mathbb{R}^+(x, 1)$. Точка $x \in L$, очевидно, является G -неподвижной.

2. Тихоновское свойство для полициклических групп. Подгруппа N группы G называется *нильрадикалом* в G , если N является максимальной нормальной nilпотентной подгруппой в G . Заметим, что даже в конечно порожденной группе nilрадикал не обязан существовать. Группа F называется *почти абелевой*, если она обладает нормальной абелевой подгруппой $A \subset F$ конечного индекса в F . Группа Γ называется *полициклической*, если найдется конечная последовательность $1 = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_k = \Gamma$ такая, что Γ_{l-1} – нормальная подгруппа в Γ_l и факторгруппа Γ_l/Γ_{l-1} является циклической для всех $l = 1, \dots, k$. Очевидно, что каждая полициклическая группа является конечно порожденной. Всюду далее Γ предполагается полициклической группой.

ОСНОВНОЙ ФАКТ О ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУППАХ. *Каждая полициклическая группа Γ обладает nilрадикалом ${}^n\Gamma$, причем ${}^n\Gamma$ является конечно порожденной группой и факторгруппа $\Gamma/{}^n\Gamma$ является почти абелевой.*

Известно (см. [3], [2] или лемму 2), что конечно порожденная nilпотентная группа является тихоновской. Поскольку факторизация сохраняет свойство тихоновости, вначале мы должны найти критерий тихоновости для почти абелевых групп. Но предварительно мы укажем широкий класс топологических групп, не являющихся тихоновскими.

Рассмотрим группу $E_n = \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^n$ движений евклидовой метрики на $\mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 1. *Пусть $G \subset E_n$ – замкнутая неабелева подгруппа такая, что пересечение $L = G \cap \mathbb{R}^n$ является равномерной подгруппой в $\mathbb{R}^n$. Тогда G не является тихоновской.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – нетривиальная компактная подгруппа в $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ такая, что $G\mathbb{R}^n = C \cdot \mathbb{R}^n$. Поскольку действие компактной подгруппы C на $\mathbb{R}^n$ вполне приводимо, мы можем без ограничения общности предположить, что оно неприводимо. В самом деле, если $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{n-k}$ – разложение в сумму C -инвариантных подпространств (причем действие C на $\mathbb{R}^k$ нетривиально), мы можем рассмотреть проекцию

$p: C \cdot \mathbb{R}^n \rightarrow C' \cdot \mathbb{R}^k$, где $C' \subset O(k, \mathbb{R})$ – нетривиальная компактная подгруппа, являющаяся образом C , и взять замыкание $G' = \overline{p(G)}$.

Итак, не ограничивая общности, действие C на $\mathbb{R}^n$ нетривиально и неприводимо. В таком случае группа непрерывных аддитивных характеров $X(G) = \{\chi: G \rightarrow \mathbb{R}\}$ тривиальна. В самом деле, $\mathbb{R}^n \cap \text{Ker}(\chi)$ является нормальной подгруппой в G , и, следовательно, в $C \cdot \mathbb{R}^n$. Поэтому ее линейная оболочка $A \subset \mathbb{R}^n$ является C -инвариантным подпространством, и ввиду неприводимости либо $A = \mathbb{R}^n$, либо $A = 0$. В первом случае факторгруппа $\chi(G) = G/G \cap \text{Ker}(\chi)$ компактна, т.е. характер χ тривиален. Во втором – из соображений размерности $n = 1$ – либо $G = \mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{Z}$, либо $G = \mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{R}$, и группа характеров также тривиальна.

Рассмотрим теперь пространство H бесконечно гладких функций на $\mathbb{R}^n$ с естественным представлением группы $E_n = O(n, \mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^n$:

$$(\rho_c f)(x) = f(c(x)), \quad c \in O(n, \mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\rho_a f)(x) = f(x + a), \quad a, x \in \mathbb{R}^n.$$

Известно [6], что H является пространством Фреше по отношению к семейству преднорм

$$p_{k,m}(f) = \sup_{\substack{|x| \leq m \\ 0 \leq l \leq k}} \left\{ \frac{\partial^l f}{\partial^{i_1} x_1 \cdots \partial^{i_n} x_n}(x) : i_1 + \cdots + i_n = l \right\}.$$

Известно также, что оператор Лапласа Δ_n на H коммутирует с действием E_n . Для фиксированного $\lambda > 0$ определим $f_1(x) = \exp(\sqrt{\lambda} x_1)$. Пусть K есть выпуклая оболочка орбиты $E_n(f_1)$. Так как H есть пространство Фреше, выпуклая оболочка B компактной орбиты $O(n, \mathbb{R})(f_1)$ также компактна. Ясно, что K является G -инвариантным конусом с компактной базой B и состоит из функций, удовлетворяющих уравнению $\Delta_n f = \lambda f$. Однако, конус K не содержит G -инвариантного луча: поскольку $X(G) = 0$, он был бы неподвижен и состоял бы из функций f , инвариантных относительно трансляций вдоль $L = G \cap \mathbb{R}^n$. Предположим, что $f \neq 0$. Легко видеть, что локальный максимум решения уравнения $\Delta_n f = \lambda f$ неположителен, а локальный минимум неотрицателен. Поскольку $L = G \cap \mathbb{R}^n$ является равномерной подгруппой в $\mathbb{R}^n$, функция f имеет как локальные максимумы, так и локальные минимумы, и значит, тождественно равна 0.

Заметим, что если свободная абелева группа $\mathbb{Z}^n$ является нормальной подгруппой в счетной группе G , то можно расширить $\mathbb{Z}^n$ и G до $\mathbb{R}^n$ и $A(G)$ соответственно таким образом, что $G \subset A(G)$, $G \cap \mathbb{R}^n = \mathbb{Z}^n$, $G\mathbb{R}^n = A(G)$ и $\mathbb{R}^n$ – нормальная подгруппа в $A(G)$. В частности, $F = G/\mathbb{Z}^n \simeq A(G)/\mathbb{R}^n$. В таком случае будем говорить, что $A(G)$ получена из G взятием линейной оболочки $\mathbb{Z}^n \subset G$. Группу $A(G)$ можно построить, например, следующим образом. Рассмотрим вложение $i: \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ и зададим действие G на $\mathbb{R}^n$, полученное из линейного продолжения действия G на $\mathbb{Z}^n$ внутренними автоморфизмами. Возьмем теперь полупрямое произведение $G \cdot \mathbb{R}^n$, построенное по этому действию, и положим $A(G) = G \cdot \mathbb{R}^n / \Delta$, где $\Delta = \{(x, -i(x)) : x \in \mathbb{Z}^n\}$ – нормальная подгруппа в $G \cdot \mathbb{R}^n$. Заметим, что если $G = \mathbb{Z}^n$, то $A(G) = \mathbb{R}^n$; если же $G = \frac{1}{2}\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{Z}^n$ рассматривается как подгруппа в G , то $A(G) = \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{R}^n$. Смысл перехода от G к $A(G)$ состоит в том, что при некоторых естественных условиях (например, если группа F конечна; см. п. 4 далее) точная последовательность $0 \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow A(G) \rightarrow F \rightarrow 1$ расщепляется, в то время как аналогичная последовательность $0 \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$, как правило, не расщепляется.

В основе доказательства тихоновости широкого класса групп лежит

ЛЕММА 2. Пусть H – нормальная подгруппа в группе G , которая вместе с подгруппой $F \subset G$ порождает G , т.е. $G = FH$. Предположим, что

- 1) группы F и H тихоновские;
- 2) любая G -орбита в $X(H)$ либо тривиальна, либо неограничена.

Тогда группа G является тихоновской.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. с [3, лемма 2.9] или [1, лемма 4.2]). Пусть G линейно действует на конусе K с компактной базой B , лежащем в линейном топологическом пространстве L . Ввиду тихоновости H найдется мультипликативный характер $\chi: H \rightarrow \mathbb{R}^*$, которому отвечает непустой выпуклый подконус $K_\chi = \{x \in K : h(x) = \chi(h)x, h \in H\}$. Заметим, что $hg(x) = gg^{-1}hg(x) = \chi^g(h)g(x)$, где $\chi^g(h) = \chi(g^{-1}hg)$, $h \in H$, т.е. $g(K_\chi) = K_{\chi^g}$. Пусть $\Phi: L \rightarrow \mathbb{R}$ – линейный непрерывный функционал, для которого $B = K \cap \Phi^{-1}(1)$. Тогда для фиксированного $h \in H$ в силу компактности B равномерно по всем $g \in G$ имеем

$$\chi^g(h) = \frac{\Phi(hg(x))}{\Phi(g(x))} \leq \sup_{y \in B} \Phi(hy) = c(h) < \infty.$$

Отсюда следует, что орбита $G(\log(\chi)) = \log(G(\chi))$ аддитивного характера $\log(\chi)$ в $X(H)$ ограничена и поэтому тривиальна. Стало быть, G оставляет характер χ неподвижным, а конус K_χ инвариантным. Поскольку группа F тихоновская, в K_χ найдется F -инвариантный луч. Очевидно, что он будет и G -инвариантным.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 2 следует, что даже нормальная подгруппа в тихоновской группе не обязана являться тихоновской. В самом деле, пусть $\Gamma = (\mathbb{Z}_2(\sigma) \times \mathbb{Z}(a)) \cdot \mathbb{Z}^2$, где действие σ представлено матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а действие a – матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ясно, что ${}^n\Gamma = \mathbb{Z}^2$, $F = \Gamma/{}^n\Gamma = \mathbb{Z}_2(\sigma) \times \mathbb{Z}(a)$ и F -орбита любого нетривиального характера из $X(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{R}^2$ неограничена. Поэтому Γ является тихоновской группой с нетихоновской нормальной подгруппой $\mathbb{Z}(\sigma) \cdot \mathbb{Z}^2$ (она эпиморфно отображается на $\mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{Z}$).

Заметим, что типичным примером линейного оператора, все нетривиальные орбиты которого неограничены, является унитарный оператор A на $\mathbb{R}^n$ (унитарность означает существование $l \in \mathbb{N}$ такого, что $(A - E)^l \equiv 0$, где E и 0 – соответственно единичный и нулевой операторы на $\mathbb{R}^n$). Это позволяет применить лемму 2 к доказательству следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ. Конечно порожденные нильпотентные группы являются тихоновскими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть $1 = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_k = \Gamma$ – цепочка нормальных подгрупп в Γ такая, что каждая факторгруппа Γ_l/Γ_{l-1} циклическая и $[\Gamma_l, \Gamma_{l-1}] \subset \Gamma_{l-2}$. Предположим, что все Γ_i , $i \leq l-1$, тихоновские. Пусть Γ_l порождена Γ_{l-1} и элементом $a \in \Gamma_l$. Тогда действие оператора A на $X(\Gamma_{l-1})$, заданное формулой $A(\chi)(g) = \chi^a(g) = \chi(a^{-1}ga)$, $g \in \Gamma_{l-1}$, является унитарным. В самом деле, $(A - E)(\chi)(g) = \chi([a^{-1}, g])$, поэтому найдется $n \leq l$ такое, что $(A - E)^n \equiv 0$. Следовательно, каждая Γ_l -орбита в $X(\Gamma_{l-1})$ либо тривиальна, либо неограничена, и мы можем применить лемму 2.

Теперь мы готовы доказать критерий тихоновости для почти абелевых групп.

ЛЕММА 3. Пусть F – конечно порожденная почти абелева группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) F является тихоновской;
- 2) F не допускает гомоморфизма $\varphi: F \rightarrow O(n, \mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^n$ такого, что замыкание $G = \overline{\varphi(F)}$ пересекается с $\mathbb{R}^n$ по равномерной подгруппе и не лежит целиком в $\mathbb{R}^n$;
- 3) центр $Z(F)$ имеет конечный индекс в F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1) \implies 2)$ следует из леммы 1. Докажем $3) \implies 1)$. Центр $Z(F)$ является абелевой и, следовательно, тихоновской группой. Поэтому если у нас есть F -инвариантный конус K в пространстве L , то в нем есть непустой подконус $K_\chi = \{x \in K : z(x) = \chi(z)x, z \in Z(F)\}$, отвечающий некоторому мультипликативному характеру $\chi: Z(F) \rightarrow \mathbb{R}^*$. Рассмотрим группу $\text{Aut}(K_\chi)$ всех линейных преобразований конуса K_χ . Она содержит в себе центральную подгруппу D всех гомотетий. Так как группа $Z(F)$ центральна в F , характер χ является F -неподвижным, а конус K_χ является F -инвариантным. Пусть $\varphi: F \rightarrow \text{Aut}(K_\chi)$ – построенное представление группы F . Тогда $\varphi(Z(F)) \subset D$, и, следовательно, группа $\varphi(F)D/D$ конечна. Так как группа D изоморфна $\mathbb{R}$, имеет место расщепление $\varphi(F)D = C \times D$, где C – некоторая конечная подгруппа в $\text{Aut}(K_\chi)$. Пусть $x \in K_\chi$ – неподвижная точка относительно C . Тогда $\mathbb{R}^+x$ – искомый F -инвариантный луч.

Докажем теперь $2) \implies 3)$. В конечно порожденной почти абелевой группе всегда можно найти нормальную подгруппу конечного индекса без кручения. Пусть $\mathbb{Z}^n$ – такая нормальная подгруппа в F . Вложим F в группу $A(F)$, полученную взятием линейной оболочки $\mathbb{Z}^n \subset F$. Так как группа $C = A(F)/\mathbb{R}^n = F/\mathbb{Z}^n$ конечна, имеет место расщепление $A(F) = C \cdot \mathbb{R}^n$. Пусть $C' \subset C$ – ядро действия C на $\mathbb{R}^n$. Тогда образ $F' \subset (C/C') \cdot \mathbb{R}^n$ группы F обладает тем свойством, что содержит $\mathbb{Z}^n$ и $F'\mathbb{R}^n = (C/C') \cdot \mathbb{R}^n$. Отсюда по условию 2) $C/C' = 1$, т.е. $A(F) = C \times \mathbb{R}^n$. Следовательно, $\mathbb{Z}^n$ лежит в центре F .

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно [7], что для конечно порожденных групп

$$|G/Z(G)| < \infty \iff |[G, G]| < \infty.$$

Поэтому конечность коммутанта также является критерием тихоновости для почти абелевых групп.

Приведем несколько примеров почти абелевых тихоновских групп. Пусть $F = \mathbb{Z}_2(\sigma) \cdot (\mathbb{Z}_2(a) \times \mathbb{Z}(b))$, где $\sigma(a, 1) = (a, 1)$ и $\sigma(1, b) = (1, b)$. Тогда $Z(F) = \mathbb{Z}_2(a) \times \mathbb{Z}(b^2)$ – подгруппа индекса 4 в F . В этом примере F является произведением двух нормальных подгрупп: конечной $\mathbb{Z}_2(\sigma) \times \mathbb{Z}_2(a)$ и абелевой $\mathbb{Z}_2(a) \times \mathbb{Z}(b)$. Легко видеть, что любая группа вида $F = KA$, где K – конечная нормальная подгруппа и A – абелева нормальная подгруппа, является тихоновской. Однако, такими группами не исчерпываются все почти абелевы тихоновские группы. Пусть, например, $F = \mathbb{Z}(\sigma) \cdot \mathbb{Z}_3(a)$, где $\sigma(a) = a^2$. Тогда $Z(F) = \mathbb{Z}(\sigma^2)$ – подгруппа индекса 6 в F . Пусть, наконец, N – нильпотентная группа Гейзенберга с образующими a, b, c и соотношениями $[a, b] = c$, $[a, c] = [b, c] = 1$. Положим $F = N/\mathbb{Z}(c^2)$. Тогда $Z(F) = \mathbb{Z}(a^2) \times \mathbb{Z}(b^2) \times \mathbb{Z}_2(c)$ – подгруппа индекса 4 в нильпотентной группе F .

Итак, если Γ – полициклическая группа, то ее нильрадикал ${}^n\Gamma$ является тихоновской группой, а для факторгруппы $F = \Gamma/{}^n\Gamma$ мы только что нашли критерий тихоновости.

В дальнейшем нам понадобится следующее замечание о векторном пространстве непрерывных аддитивных характеров. Отметим, что действие G сопряжениями на $X(G)$ тривиально. Пусть H является нормальной подгруппой в группе G и $F = G/H$. Обозначим через $\xi: X(G) \rightarrow X(H)$ функтор ограничения. Пусть $X(H, G) = \text{Im}(\xi)$ – пространство характеров на H , которые могут быть продолжены до характеров G . Ясно, что $\text{Ker}(\xi)$ изоморфен $X(F)$, т.е. $X(G)/X(F) \simeq X(H, G)$. Предположим, что автоморфизм σ группы G оставляет подгруппу H инвариантной. Действие σ на $X(G)$, заданное формулой $\chi^\sigma(g) = \chi(\sigma(g))$, индуцирует действия на $X(F)$ и $X(H, G)$. Поэтому если автоморфизм σ тривиален на $X(F)$ и $X(H, G)$, то он унитарен на $X(G)$.

Докажем теперь критерий тихоновости для полициклических групп.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – полициклическая группа с нильрадикалом ${}^n\Gamma$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) Γ является тихоновской группой;
- 2) Γ не допускает гомоморфизма φ в группу вида $O(n, \mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^n$ такого, что замыкание $\overline{\varphi(\Gamma)}$ пересекается с $\mathbb{R}^n$ по равномерной подгруппе и не лежит целиком в $\mathbb{R}^n$;
- 3) центр почти абелевой факторгруппы $F = \Gamma/{}^n\Gamma$ имеет конечный индекс в F , и любая F -орбита в векторном пространстве $X({}^n\Gamma)$ аддитивных характеров ${}^n\Gamma$ либо тривиальна, либо неограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2) следует из леммы 1.

Докажем 3) $\implies$ 1). Пусть K – выпуклый конус с компактной базой и заданным на нем линейным действием группы G . Так как нильрадикал ${}^n\Gamma$ является тихоновской группой, найдется мультипликативный характер $\chi_0: {}^n\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^*$, которому соответствует непустой подконус $K_0 = \{x \in K : h(x) = \chi_0(h)x, h \in {}^n\Gamma\}$. Поскольку Γ -орбита $\log(\chi_0) \in X({}^n\Gamma)$ не может быть неограниченной ввиду компактности базы конуса K , она является тривиальной, поэтому Γ оставляет χ_0 неподвижным, а K_0 инвариантным. Рассмотрим возрастающую последовательность подгрупп $1 = F_0 \subset \dots \subset F_k = Z(F)$ такую, что каждая факторгруппа F_l/F_{l-1} циклическая. Пусть $p: \Gamma \rightarrow F$ – проекция вдоль ${}^n\Gamma$, $H = p^{-1}(Z(F))$, $H_l = p^{-1}(F_l) \subset H$. Докажем индукцией по $l = 0, \dots, k$, что H имеет инвариантный луч в K_0 . В самом деле, пусть найден характер $\chi_l: H_l \rightarrow \mathbb{R}^*$, которому соответствует нетривиальный подконус $K_l = \{x \in K : h(x) = \chi_l(h)x, h \in H_l\}$. Возьмем элемент $a \in H_{l+1}$, который вместе с H_l порождает H_{l+1} . Известно, что автоморфизм пространства $X(H_l)$, заданный сопряжением элементом a , тривиально действует на подпространстве $X(F_l)$ (так как $[H_{l+1}, H_l] \subset {}^n\Gamma$) и оставляет неподвижной проекцию $\log(\chi_0) \in X({}^n\Gamma, H_l)$ характера $\log(\chi_l)$ вдоль $X(F_l)$. Следовательно, a -орбита характера $\log(\chi_l) \in X(H_l)$ является унитарной, поэтому ввиду компактности базы конуса K_l она является тривиальной. Это означает, что элемент $a \in H_{l+1}$ оставляет конус K_l инвариантным, значит H_{l+1} имеет в K_l инвариантный луч.

Итак, мы нашли нетривиальный подконус $K_\eta = \{x \in K : h(x) = \eta(h)x, h \in H\}$, соответствующий некоторому характеру $\eta: H \rightarrow \mathbb{R}^*$, $\eta|_{{}^n\Gamma} \equiv \chi_0$. Заметим, что каждый элемент $a \in \Gamma$ оставляет η неподвижным. В самом деле, ограничение $\log(\eta)$ на ${}^n\Gamma$ совпадает с $\log(\chi_0)$ и, следовательно, является Γ -неподвижным, а действие Γ на $X(Z(F))$ тривиально (так как ${}^n\Gamma$ тривиально действует на $X(H)$, а $F = \Gamma/{}^n\Gamma$ – на $X(Z(F)) \subset X(H)$, причем $X(H)/X(Z(F)) = X({}^n\Gamma, H)$). Таким образом, a -орбита характера $\log(\eta)$ является унитарной и ввиду компактности базы конуса K_0 тривиальной. Следовательно, Γ оставляет характер η неподвижным, а конус K_η инвариантным. Заметим, что H

действует на K_η гомотетиями, а факторгруппа Γ/H конечна. Используя теперь тот же прием расщепления, что и в лемме 3, мы найдем Γ -инвариантный луч в K .

Докажем 2) $\implies$ 3). Если группа Γ удовлетворяет условию 2), то и ее почти абелева факторгруппа $F = \Gamma/{}^n\Gamma$ также удовлетворяет условию 2) и по лемме 3 является тихоновской. Рассмотрим разложение ${}^n\Gamma/[{}^n\Gamma, {}^n\Gamma] = \mathbb{Z}^n \times \text{Тог}$ в свободную абелеву группу и кручение. Так как любой характер тривиален на коммутанте и всех конечных подгруппах, имеет место $X({}^n\Gamma) \simeq X(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{R}^n$. Не ограничивая общности (переходя, если необходимо, от Γ к $(\Gamma/[{}^n\Gamma, {}^n\Gamma])/\text{Тог}$), можно считать, что ${}^n\Gamma = \mathbb{Z}^n$. Итак, $\mathbb{Z}^n$ является нильрадикалом в Γ , и центр группы $F = \Gamma/\mathbb{Z}^n$ имеет конечный индекс в F . Рассмотрим действие группы F на векторном пространстве $X(\mathbb{Z}^n) \simeq \mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 4. Пусть группа F , центр которой имеет конечный индекс в F , действует на $\mathbb{R}^n$. Тогда либо

- 1) любая F -орбита в $\mathbb{R}^n$ тривиальна или неограничена, либо
- 2) найдется F -инвариантное подпространство $V \subset \mathbb{R}^n$ такое, что образ F в $\text{GL}(\mathbb{R}^n/V)$ предкомпактен и нетривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\mathbb{R}^n$ не раскладывается в сумму собственных F -инвариантных подпространств. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi: F \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ и возьмем замыкание P по Зарискому подгруппы $\varphi(F) \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Тогда $Z(P)$ имеет конечный индекс в P и потому $P = D \times U \times K$, где K компактна (и центр $Z(K)$ имеет конечный индекс в K), D диагонализируема, U абелева и унитарна. Разложим $\mathbb{R}^n$ в сумму корневых подпространств относительно D . Тогда $\mathbb{R}^n = V + V'$, где V состоит из всех D -неподвижных векторов в $\mathbb{R}^n$, а V' является суммой всех нетривиальных корневых подпространств. Так как D нормальна в P , оба подпространства P -инвариантны, и ввиду неразложимости либо $V = 0$, либо $V' = 0$.

В первом случае все P - и F -орбиты в $\mathbb{R}^n$ неограничены (так как D действует на любом корневом подпространстве из V' гомотетиями). Во втором случае группа D тривиальна. Рассмотрим фильтрацию $\mathbb{R}^n$ относительно действия унитарной подгруппы U :

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k = \mathbb{R}^n, \quad \text{где } V_i/V_{i-1} = \{x \in \mathbb{R}^n/V_{i-1} : U(x) = x\}.$$

Так как группа U нормальна в P , каждое подпространство V_i является P -инвариантным. Если действие компактной группы K на факторпространстве $\mathbb{R}^n/V_{k-1}$ нетривиально, что соответствует утверждению 2) леммы. Если же оно тривиально, то из полной приводимости действия K на $\mathbb{R}^n$ следует, что подпространство K -неподвижных векторов в $\mathbb{R}^n$ нетривиально. Из полной приводимости K , нормальности K в P и неразложимости $\mathbb{R}^n$ следует, что группа K тривиальна, значит группы P и $\varphi(F)$ унитарны, что соответствует утверждению 1) леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для произвольных почти абелевых групп лемма неверна. Пусть, например, $F = \mathbb{Z}_2(\sigma) \cdot \mathbb{Z}(a)$, где $\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда если $e_1 = (1, 0)$, то $F(e_1) = \pm e_1$, а F -орбита любого вектора вне $\mathbb{R}e_1$ неограничена. В то же время действие F на единственном факторпространстве $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}e_1$ тривиально.

Закончим доказательство теоремы 1. Итак, осталось доказать, что случай 2) из леммы 4 невозможен при условии 2) теоремы 1. Рассмотрим вложение Γ в группу $A(\Gamma)$, полученную взятием линейной оболочки нильрадикала $\mathbb{Z}^n \subset \Gamma$. Тогда $\mathbb{R}^n$ является нормальной подгруппой в $A(\Gamma)$, $\Gamma \cap \mathbb{R}^n = \mathbb{Z}^n$ и $\Gamma\mathbb{R}^n = A(\Gamma)$. Ясно, что орбиты F на $\mathbb{R}^n$

суть орбиты F на $X(\mathbb{Z}^n)$. Допустим, что внутри $\mathbb{R}^n$ нашлась хотя бы одна нетривиальная ограниченная F -орбита. Используя лемму 4 и переходя, если необходимо, к факторгруппе $A(\Gamma)/V$ со взятием замыкания образа Γ в этой факторгруппе, мы можем считать, что образ F в $GL(n, \mathbb{R})$ предкомпактен и нетривиален. Пусть $\varphi: F \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ – естественное представление. Так как $\overline{\varphi(F)}$ – компакт в $GL(n, \mathbb{R})$, F -действие на $\mathbb{R}^n$ вполне приводимо. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что оно неприводимо. Теперь, чтобы прийти к противоречию с условием 2) теоремы 1, осталось доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathbb{R}^n$ – нормальная подгруппа в G , $F = G/\mathbb{R}^n$ и $\varphi: F \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ – индуцированное представление. Предположим, что $\varphi(F) \subset GL(n, \mathbb{R})$ – нетривиальная предкомпактная группа с неприводимым действием на $\mathbb{R}^n$ и центр $Z(F)$ имеет конечный индекс в F . Тогда G допускает эпиморфизм на расщепимую группу $\varphi(F) \cdot \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z(F) = \mathbb{Z}^m \times T$ – разложение в свободную абелеву группу и кручение, $p: A(\Gamma) \rightarrow F$ – естественная проекция. Поскольку действие F на $\mathbb{R}^n$ неприводимо, для любого элемента $a \in Z(F)$ его действие на $\mathbb{R}^n$ либо тривиально, либо не имеет неподвижных точек. Итак, возможны только два случая:

- 1) $\mathbb{Z}^m$ тривиально действует на $\mathbb{R}^n$;
- 2) хотя бы один элемент $a \in \mathbb{Z}^m$ не имеет неподвижных точек в $\mathbb{R}^n$.

В первом случае нормальная подгруппа $H = p^{-1}(\mathbb{Z}^m) \subset A(\Gamma)$ нильпотентна, а действие конечной группы $K = F/\mathbb{Z}^m$ на $\mathbb{R}^n$ ввиду F -неприводимости не имеет неподвижных точек. Докажем, что группа H абелева, т.е. $H = \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^n$. В самом деле, пусть $i: H \rightarrow N$ – вложение H в качестве равномерной подгруппы в связную односвязную нильпотентную группу Ли N , $N/\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$. Подобно тому, как мы брали линейную оболочку нормальной подгруппы $\mathbb{Z}^n \subset G$, можно рассмотреть группу G^* , полученную из G взятием лиевой оболочки N нильпотентной группы H . А именно, $G^* = (G \cdot N)/\Delta_H$, где полупрямое произведение получено из продолжения G -действия с H на N , а $\Delta_H = \{(h, i(h)^{-1}) : h \in H\}$ – “антидиагональ” в $H \cdot i(H)$.

Тогда можно считать, что $G^* \cap N = H$, N – нормальная подгруппа в G^* и $G^*/N = G/H = F/\mathbb{Z}^m = K$. Так как N – односвязная нильпотентная группа и K конечна, имеет место расщепление $G^* = K \cdot N$ (см. п. 4 ниже). Пусть $Z_N(K)$ – централизатор K в N . Так как K на $N/\mathbb{R}^n$ действует тривиально и действие K на N вполне приводимо, выполнено $N = Z_N(K)\mathbb{R}^n$. Но $Z_N(K) \cap \mathbb{R}^n = 0$, поэтому имеет место расщепление $N = Z_N(K) \cdot \mathbb{R}^n$, причем группа $Z_N(K)$ изоморфна $\mathbb{R}^m$. Теперь ввиду нильпотентности $N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ и $H = \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^n$. Так как абелева группа N нормальна в G^* и действие конечной группы $K = G^*/N$ на $N/\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$ тривиально, $\mathbb{R}^m$ лежит в центре G^* , а $\mathbb{Z}^m$ – в центре $A(\Gamma)$. Ввиду конечности K имеет место расщепление $G/\mathbb{Z}^m = K \cdot \mathbb{R}^n$, т.е. G проектируется на группу $\varphi(F) \cdot \mathbb{R}^n$, где $\varphi(F)$ – факторгруппа K .

Во втором случае возьмем элемент $g \in A(G)$ такой, что $p(g) = a$. Поскольку a лежит в центре F и не имеет неподвижных точек на $\mathbb{R}^n$, имеет место расщепление $G = F \cdot \mathbb{R}^n$ (см. п. 4), что завершает доказательство леммы 5.

Теорема 1 также доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще говоря, если $\mathbb{R}^n$ – нормальная подгруппа в G и $F = G/\mathbb{R}^n$ – почти абелева группа с неприводимым ограниченным действием на $\mathbb{R}^n$, группа G не обязана допускать эпиморфизм на расщепимую группу $\varphi(F) \cdot \mathbb{R}^n$. Пример: $G = Z_2(\sigma) \cdot N$, где N – нильпотентная группа Гейзенберга с линейной оболочкой ее центра (т.е.

$Z(N) = \mathbb{R}c$ – центр в N , $N/Z(N) = \mathbb{Z}(a) \times \mathbb{Z}(b)$, $[a, b] = c$, причем $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = a$, $\sigma(c) = -c$. Тогда $F = G/\mathbb{R}c = \mathbb{Z}_2(\sigma) \cdot (\mathbb{Z}(a) \times \mathbb{Z}(b))$ – почти абелева группа с неприводимым ограниченным действием на $\mathbb{R}c$, однако G не допускает эпиморфизма на $\varphi(F) \cdot \mathbb{R}c = \mathbb{Z}_2(\sigma) \cdot \mathbb{R}c$.

ПРИМЕР. Вообще говоря, неверно, что если полициклическая группа не является тихоновской, то она допускает эпиморфизм на группу вида $C \cdot \mathbb{Z}^n$, где C – нетривиальная конечная подгруппа в $SL(n, \mathbb{Z})$. В самом деле, пусть

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда a -действие на $\mathbb{R}^4$ задает разложение $\mathbb{R}^4 = V + W$ в сумму двух a -инвариантных плоскостей, причем

- 1) обе плоскости имеют плотный образ в торе $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$;
- 2) a действует на V ортогональным поворотом на угол несоизмеримый с 2π ;
- 3) a действует на W гиперболическим поворотом.

Таким образом, $\Gamma = \mathbb{Z}(a) \cdot \mathbb{Z}^4$ допускает гомоморфизм в группу $SO(2, \mathbb{R}) \cdot V$ с плотным образом и, значит, не является тихоновской. В то же время единственной нетривиальной факторгруппой Γ является $\mathbb{Z}(a) = \Gamma/\mathbb{Z}^4$. Заметим также, что Γ не содержит тихоновских подгрупп конечного индекса.

3. Тихоновское свойство для линейных групп и групп Ли. Единственный факт о строении полициклических групп, который нам потребовался, – это почти абелевость факторгруппы $F = \Gamma/\Gamma$. Ясно, что таким же свойством обладают почти полициклические группы. Известно (альтернатива Титса [4]), что любая линейная дискретная группа либо содержит свободную группу F_2 (и поэтому не является даже аменабельной), либо является почти полициклической. Таким образом, мы установили критерий тихоновости для дискретных линейных групп.

С другой стороны, связная группа Ли G аменабельна тогда и только тогда, когда $G = KR$, где R – радикал в G и K – компактная полупростая подгруппа. Пусть N – нильрадикал в G . Тогда радикал $A = R/N$ факторгруппы $F = G/N$ является центральной связной подгруппой в $F = KA$, причем K компактна и нормальна в F . Поэтому N и F являются тихоновскими (доказательство для F идентично доказательству 2) $\Rightarrow$ 3) в лемме 3; достаточно заменить циклические подгруппы на однопараметрические). Ясно, что если G допускает гомоморфизм с плотным образом в группу вида $C \cdot \mathbb{R}^n$, где C – нетривиальная компактная подгруппа в $O(n, \mathbb{R})$, то G не является тихоновской.

Если такого гомоморфизма нет, рассмотрим действие связной группы $F = KA$ на векторном пространстве $X(N)$. Как и при доказательстве 2) $\Rightarrow$ 3) в теореме 1, мы найдем G -инвариантный луч для каждого линейного G -действия на выпуклом конусе с компактной базой. Мы доказали критерий тихоновости для групп Ли, который по существу совпадает с критерием из [2].

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – связная аменабельная группа Ли с нильрадикалом N . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) группа G тихоновская;
- 2) G не допускает гомоморфизма с плотным образом в полупрямое произведение вида $C \cdot \mathbb{R}^n$, где подгруппа $C \subset O(n, \mathbb{R})$ нетривиальна;

- 3) любая нетривиальная G -орбита на векторном пространстве $X(N)$ непрерывных аддитивных характеров N неограничена.

4. Приложение. В доказательстве основной теоремы мы использовали следующие несложные факты о расщепляемости групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\mathbb{R}^n$ – нормальная подгруппа в G и факторгруппа $F = G/\mathbb{R}^n$ компактна, то G изоморфна полупрямому произведению $F \cdot \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathbb{R}^n$ – абелева нормальная подгруппа в G , внутренние автоморфизмы G порождают действие ρ группы F на $\mathbb{R}^n$. Известно [7], что препятствие к расщепляемости точной последовательности $0 \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$ лежит во второй группе когомологий $H^2(F, \rho, \mathbb{R}^n)$. Однако, все группы когомологий действия компактной группы на $\mathbb{R}^n$ тривиальны, поэтому никаких препятствий к расщепляемости нет.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что в предложении 1 нельзя заменить $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{Z}^n$, так как последовательность $0 \rightarrow 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$ не расщепляется. С другой стороны, $\mathbb{R}^n$ можно заменить любой связной односвязной нильпотентной группой Ли N . Это легко доказывается индукцией по длине нильпотентности N .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathbb{R}^n$ – нормальная подгруппа в G , $F = G/\mathbb{R}^n$ и $p: G \rightarrow F$ – естественная проекция. Допустим, что действие элемента $a \in G$ на $\mathbb{R}^n$ не имеет неподвижных векторов и $p(a)$ лежит в центре F . Тогда имеет место расщепление $G = Z_G(a) \cdot \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для всякого $f \in F$ найдется $g \in G$ такой, что $p(g) = f$ и g коммутирует с a . Тогда мы докажем, что $p(Z_G(a)) = F$ и, следовательно, $G = Z_G(a)\mathbb{R}^n$. Так как $Z_G(a) \cap \mathbb{R}^n = 0$, получим искомое расщепление.

Пусть $p(h) = f$. Тогда $aha^{-1} = hx$ для некоторого $x \in \mathbb{R}^n$. Найдем $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что $a(hy)a^{-1} = hy$. Так как $a(hy)a^{-1} = aha^{-1}aya^{-1} = hx(aya^{-1})$, достаточно решить уравнение $aya^{-1}y^{-1} = x^{-1}$ относительно $y \in \mathbb{R}^n$. В аддитивной записи это уравнение имеет вид $(A - E)y = -x$, где $A(y) = aya^{-1}$. Так как оператор A на $\mathbb{R}^n$ не имеет неподвижных векторов (кроме нулевого), оператор $A - E$ обратим, значит уравнение разрешимо.

Автор выражает признательность Р. И. Григорчуку за постановку проблемы и интерес к данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Furstenberg H. Translation-invariant cones of functions on semi-simple Lie groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1965. V. 71. P. 271–326.
- [2] Conze J. P., Guivarc'h Y. Propriété de droite fixe et fonctions propres des opérateurs de convolution. Preprint: Univ. de Rennes.
- [3] Grigorchuk R. I. On Tychonoff Groups. Preprint № 95-12: Max-Planck-Inst. für Mathematik, 1995.
- [4] Tits J. Free subgroups in linear groups // J. Algebra. 1972. V. 20. P. 250–270.
- [5] Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М.: ИЛ, 1961.
- [6] Робертсон А., Робертсон Б. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
- [7] Браун К. Когомологии групп. М.: Наука, 1987.