Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Тупчиев, Функциональные решения задачи о распаде разрыва, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 280–288

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:03:03

УДК 517.9

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ РАЗРЫВА

В. А. Тупчиев

Дано определение функционального решения задачи о распаде разрыва и указан пример такого решения для изэнтропической системы газовой динамики.

Библиография: 8 названий.

Рассмотрим систему законов сохранения

$$w_t + f(w)_x = 0 \quad (1)$$

с начальными данными

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad (2)$$

где $w \in \mathbb{R}_N$, $f: \mathbb{R}_N \rightarrow \mathbb{R}_N$ — гладкое отображение.

Если $w_0(x) = w_l + \theta(x)(w_r - w_l)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, то задачу (1), (2) называют *задачей о распаде разрыва*.

Обычно решения задачи о распаде разрыва рассматриваются в автомодельных переменных $y = x/t$ в классе $\mathcal{H}$ кусочно-гладких ограниченных функций с конечным числом разрывов первого рода [1]. Однако, простые примеры показывают, что этот класс узок. Ухудшение свойств гладкости $f(u)$ может дать счетное множество точек разрыва решения и изменить их характер. Существенное влияние может оказать нарушение условия строгой гиперболичности системы (1):

$$\lambda_1(w) < \lambda_2(w) < \dots < \lambda_N(w),$$

рассматриваемое в области $\Omega \subset \mathbb{R}_N$, где $\lambda_k(w)$ — собственные значения матрицы $f_u(u)$, и нарушение условия “выпуклости” системы (1): $r_k(u) \nabla \lambda_k(u) \neq 0$ в Ω , где $r_k(u)$ — правые собственные векторы $f_u(u)$.

Все это приводит к необходимости использовать соболевские обобщенные решения. Но и этого, оказывается, недостаточно. Для случая изэнтропической системы, когда $w = (v, u)$, $f(w) = (-u, p(v))$ для политропного газа $p(v) = v^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, при $u_r - u_l \geq (v_r^{-\theta} + v_l^{-\theta})/\theta$, $\theta = (\gamma - 1)/2$, возникает неограниченное решение задачи о распаде (1), (2), которое не может рассматриваться как соболевское обобщенное решение.

В заметке мы хотим показать, что это решение имеет смысл в рамках теории функциональных решений [2].

С этой целью, следуя идеям работы [2], мы введем определение функционального решения задачи о распаде и рассмотрим приближенные методы для этой задачи.

1. Задача о распаде (1), (2) в автомодельных переменных $y = x/t$ эквивалентна краевой задаче

$$-y \frac{dw}{dy} + \frac{df(w)}{dy} = 0, \quad (3)$$

$$w(-\infty) = w_l, \quad w(\infty) = w_r. \quad (4)$$

Проведем следующие операции. Перепишем систему (3) в виде

$$-y \frac{d(w_0 - w_{0h})}{dy} + \frac{df(w)}{dy} = y \frac{dw_{0h}}{dy},$$

где w_{0h} — сглаженная функция $w_0(y)$ (см. [3]), умножим это равенство на пробную вектор-функцию $g(y) \in \mathcal{J}_1$ и проинтегрируем по y от $-\infty$ до ∞ . (Здесь $\mathcal{J}_p$ — банахово пространство функций $g(y) \in C^p(\mathbb{R})$, для которых $|y|^p g^{(\alpha)}(y) \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$ и $\alpha \leq p$. Напомним, что $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}_p$ — пространство основных функций для распределений медленного роста [3].) Затем после интегрирования по частям и (формального) предельного перехода $h \rightarrow 0$ получим интегральное соотношение

$$\int_{\mathbb{R}} (g'(y)(f(w) - y(w - w_0)) + g(y)(w - w_0)) dy = 0. \quad (5)$$

Отметим, что все указанные операции справедливы, если считать $w(y)$ классическим решением задачи (3), (4) таким, что $w(y) - w_0(y) \in L_1(\mathbb{R})$, а $g(y) \in \mathcal{J}_1$.

Под *соболевым обобщенным решением задачи* (3), (4) обычно понимают ограниченную измеримую функцию $w(y)$ из класса

$$\mathcal{M} = \{w(y) : w(y) - w_0(y) \in L_1(\mathbb{R}), f(w(y)) \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})\},$$

удовлетворяющую соотношению (5).

Однако, в случае изэнтропической системы, даже если отказаться от требования ограниченности $w(y)$, для достаточно больших $u_r - u_l$ при $\gamma > 1$ не существует решений из класса $\mathcal{M}$.

Необходимо дальнейшее расширение понятия обобщенного решения задачи (3), (4).

С этой целью рассмотрим векторное пространство $\mathcal{E}$, состоящее из линейных комбинаций F вида

$$F_{g'g_1} = (f(w) - y(w - w_0))g'(y) + (w - w_0)g_1(y), \quad g(y) \in \mathcal{J}, \quad g_1(y) \in \mathcal{J}_1.$$

Для каждого вектора из $\mathcal{E}$ определим операцию проектирования $\pi(F_{g'g_1}) = F_{g'g}$.

Пусть $\mathcal{E}^+ = \{l\}$ — алгебраически сопряженное к $\mathcal{E}$ пространство линейных функционалов (не являющихся, вообще говоря, распределениями). На $\mathcal{E}^+$ определим топологию $\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{E}^+)$ посредством системы полунорм $p_F(l) = \sup\{|l(F)| : F \in X\}$, где X пробегает все конечные множества в $\mathcal{E}$.

Таким образом, $\mathcal{E}^+$ становится топологическим векторным пространством. Это пространство локально выпуклое, отделимое, и каждое отображение $l \mapsto l(F)$, $l \in \mathcal{E}^+$,

для любого $F \in \mathcal{E}$ непрерывно в топологии $\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{E}^+)$, а любое ограниченное множество $Y \in \mathcal{E}^+$, т.е. множество, удовлетворяющее для любого $F \in \mathcal{E}$ требованию

$$\sup_{l \in Y} p_F(l) < \infty,$$

относительно компактно в $\mathcal{E}^+$ (см. [4]).

Последнее свойство слабо ограниченных множеств в $\mathcal{E}^+$ является ключевым для операций предельного перехода.

Определим теперь вложение множества $\mathcal{M}$ в $\mathcal{E}^+$ формулой

$$w \mapsto l_w \in \mathcal{E}^+, \quad w \in \mathcal{M}, \quad l_w(F) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} (F \circ w) dy. \quad (6)$$

Это вложение является мономорфным на классах эквивалентности функций из $\mathcal{M}$.

Определим $[\mathcal{M}]$ как замыкание образа вложения (6) множества $\mathcal{M}$ в $(\mathcal{E}^+, \sigma)$ и на $[\mathcal{M}]$ индуцируем топологию $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$.

Если функция $w \in \mathcal{M}$ является соболевским решением задачи (3), (4), то равенство (5) можно записать в функциональной форме: $l_w(\pi(F)) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $l \in [\mathcal{M}]$ назовем *функциональным решением задачи* (3), (4), если для каждого $F \in \mathcal{E}$ справедливо равенство

$$l(\pi(F)) = 0. \quad (7)$$

Остановимся теперь на общей характеристике приближенных методов решения задачи (3), (4) в классах функциональных решений.

Будем говорить, что задан *приближенный метод* $\mathfrak{M}(l^0)$ *решения задачи* (7), если указан выбор параметрического семейства элементов $\mathcal{M}$:

$$\alpha \mapsto w_\alpha \in \mathcal{M}, \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

где $\mathcal{A}$ — множество индексов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем метод $\mathfrak{M}$ *слабо аппроксимирующим задачу* (3), (4), если существует последовательность $\alpha_n \in \mathcal{A}$, $w_{\alpha_n} \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что величина невязки $\delta_n(F) = l_{w_{\alpha_n}}(\pi(F)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем метод $\mathfrak{M}$ *слабо устойчивым*, если для любой функции $g \in \mathcal{J}_0$ выполняется равномерная оценка

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(w_\alpha - w_0) dy \right| < \infty. \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу теоремы Банаха–Штейнгауза [5], условие (8) эквивалентно равномерной оценке

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{\mathbb{R}} |w_\alpha - w_0| dy < \infty. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть метод $\mathfrak{M}$ слабо аппроксимирует задачу (3), (4) и слабо устойчив. Тогда он слабо сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу слабой аппроксимации для любого $\eta > 0$ можно указать $n_0(\eta)$ такое, что $|\delta_n(F)| = |l_{w_{\alpha_n}}(F_{g'g})| < \eta$ при $n > n_0$. Так как

$$l_{w_{\alpha_n}}(F_{g'0}) = l_{w_{\alpha_n}}(F_{g'g}) - \int_{\mathbb{R}} (w_{\alpha_n} - w_0)g(y) dy, \quad l_{w_{\alpha_n}}(F_{0g_1}) = \int_{\mathbb{R}} (w_{\alpha_n} - w_0)g_1(y) dy,$$

выполнено

$$|l_{w_{\alpha_n}}(F_{g'g_1})| = |l_{w_{\alpha_n}}(F_{g'0})| + |l_{w_{\alpha_n}}(F_{0g_1})|.$$

С учетом оценки (9) при $n > n_0(\eta)$ имеем равномерную оценку

$$|l_{w_{\alpha_n}}(F_{g'g_1})| \leq \eta + C \int_{\mathbb{R}} |w_{\alpha_n} - w_0| dy \leq C_1,$$

где C_1 не зависит от α_n .

Это означает, что множество $\{l_{w_{\alpha_n}}\}$ относительно компактно в $\mathcal{E}^+$, и можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{l_{(k)}\} \subset \{l_{w_{\alpha_n}}\}$. Ее предел $l \in [\mathcal{M}]$. В силу непрерывности отображения $l_{(k)} \mapsto l_{(k)}(F) \in \mathbb{R}$ на $([\mathcal{M}], \sigma)$ при каждом фиксированном $F \in \mathcal{E}$ и стремлении невязки к 0 устанавливаем, что предел l является функциональным решением задачи (3), (4). Теорема 1 доказана.

2. Задача (3), (4) для изэнтропического течения политропного газа имеет вид

$$-y \frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy} = 0, \quad -y \frac{du}{dy} + \frac{dp(v)}{dy} = 0, \quad w = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$(v, u)|_{y=-\infty} = (v_l, u_l), \quad (v, u)|_{y=\infty} = (v_r, u_r), \quad (11)$$

где $p(v) = v^{-\gamma}/\gamma$, $\gamma > 1$, и $v_l, v_r > 0$.

В качестве аппроксимирующего используем метод вязкости, согласно которому приближенное решение определим как решение системы с искусственной вязкостью

$$-y \frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy} = \varepsilon \frac{d^2v}{dy^2}, \quad -y \frac{du}{dy} + \frac{dp(v)}{dy} = \varepsilon \frac{d^2u}{dy^2} \quad (12)$$

с краевыми условиями (11).

Систему (12) можно представить также в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dv}{dy} &= -u - yv + V, & \frac{dV}{dy} &= v, \\ \varepsilon \frac{d^2u}{dy^2} &= p(v) - yu + U, & \frac{dU}{dy} &= u, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$V = \int_{-\infty}^y (v - v_l) ds + v_l y, \quad U = \int_{-\infty}^y (u - u_l) ds + u_l y.$$

В работе [6] установлено существование и единственность классического решения задачи (12), (11), а также отмечено четыре случая поведения решения, в трех из которых

решение равномерно ограничено относительно параметра ε и предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к обобщенному решению задачи (10), (11) из класса $\mathcal{K}$. Четвертый, особый, случай возникает при $u_l < u_r$, когда компонента $u(y, \varepsilon)$ монотонно возрастает, а компонента $v(y, \varepsilon)$ имеет единственную точку максимума $y = y_0$. При этом справедливы оценки

$$u_l < u(y, \varepsilon) < u_r, \quad v_m < v(y, \varepsilon) < M,$$

где $v_m = \min\{v_l, v_r\}$, $M = v_l + \sqrt{2\pi/\varepsilon}(u_r - u_l)e^{y_0^2/(2\varepsilon)}$, и

$$|w(y, \varepsilon) - w_l| \leq C \left(1 + \Phi\left(\frac{y - B}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)\right), \quad |w(y, \varepsilon) - w_r| \leq C \left(1 - \Phi\left(\frac{y - B}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)\right), \quad (14)$$

где C, B не зависят от y , причем B не зависит от ε , $\Phi(y)$ – интеграл ошибок, кроме того, $y_0(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В частности, если $v_l = v_r$ и $u_r = -u_l > 0$, то $y_0(\varepsilon) \equiv 0$ в силу четности $v(y, \varepsilon)$ и нечетности $u(y, \varepsilon)$.

Рассмотрим функцию

$$q(y, \varepsilon) = \frac{v_r - v_l}{2} \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + \frac{v_r + v_l}{2},$$

которая удовлетворяет задаче

$$\varepsilon \frac{d^2 q}{dy^2} = -y \frac{dq}{dy}, \quad q(-\infty) = v_l, \quad q(\infty) = v_r,$$

а также функции $\tilde{v} = v - q$ и

$$\tilde{V} = \int_{-\infty}^y \tilde{v} ds.$$

Отметим, что $V = \tilde{V} + V_0$, где

$$V_0 = \int_{-\infty}^y (q(s, \varepsilon) - v_l) ds + v_l y.$$

ЛЕММА 1. *Функция $\tilde{v}(y, \varepsilon) > 0$, а функция $\tilde{V}(y, \varepsilon)$ монотонно возрастает и удовлетворяет оценке*

$$0 < \tilde{V}(y, \varepsilon) < u_r - u_l. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $du/dy > 0$, из уравнения

$$\varepsilon \frac{d^2 \tilde{v}}{dy^2} = -y \frac{d\tilde{v}}{dy} - \frac{du}{dy} \quad (16)$$

следует, что функция $\tilde{v}(y, \varepsilon)$ не имеет на $\mathbb{R}$ точек минимума, откуда $\tilde{v}(y, \varepsilon) > 0$, так как $\tilde{v}(\pm\infty) = 0$.

Следовательно, $\tilde{V}$ монотонно возрастает. Интегрируя уравнение (16), получаем равенство $\tilde{V}(\infty, \varepsilon) = u_r - u_l$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Вне интервала $(-\delta, \delta)$ при любом малом фиксированном $\delta > 0$ функция $\tilde{v}(y, \varepsilon)$ равномерно ограничена по параметру ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При достаточно малом ε точка $y_0(\varepsilon) \in (-\delta, \delta)$. Очевидно, что $\tilde{v}(y, \varepsilon) \leq \min\{\tilde{v}(-\delta, \varepsilon), \tilde{v}(\delta, \varepsilon)\} = v_{\min}$ при $y \notin (-\delta, \delta)$. Поэтому $\tilde{v}(y, \varepsilon)$ вне интервала $(-\delta, \delta)$ равномерно ограничена, если ограничены $\tilde{v}(-\delta, \varepsilon)$ и $\tilde{v}(\delta, \varepsilon)$.

Это действительно выполнено, так как в противном случае интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \tilde{v}(s, \varepsilon) ds \geq v_{\min} 2\delta$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ неограниченно возрастал бы ($v_{\min} \rightarrow \infty$), что противоречит оценке (15). Лемма доказана.

Таким образом, на $\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)$ решение $w(y, \varepsilon) = \{v(y, \varepsilon), u(y, \varepsilon)\}$ задачи (12), (11) равномерно ограничено.

По второй теореме Хелли [6] существует последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ такая, что $w(y, \varepsilon_k) \rightarrow \bar{w}(y)$ поточечно на $\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)$, причем $\bar{w}(y)$ имеет монотонные компоненты при $y < 0$ и $y > 0$ и, кроме того, $W(y, \varepsilon_k) \rightarrow \bar{W}(y)$ на $\mathbb{R}_- \setminus (-\delta, 0)$, а функция $\bar{V}(y)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}_- \setminus (-\delta, 0)$.

ЛЕММА 3. Функции $\bar{V}(y), \bar{U}(y)$ являются абсолютно непрерывными функциями на $\mathbb{R}_- \setminus (-\delta, 0)$, причем почти всюду имеет место равенство

$$\frac{d\bar{W}(y)}{dy} = \bar{w}(y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая систему уравнений (12) на пробные финитные функции $g_1(y)$ и $g_2(y)$ такие, что $\text{supp } g_1(y) \cap (-\delta, \delta) = \emptyset$, получим систему

$$\int_{\mathbb{R}} (\varepsilon g_1'' v - (g_1 + y g_1') v + g_1' u) dy = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon g_2'' u - (g_2 + y g_2') u - g_2 p(v)) dy = 0.$$

Переходя к пределу $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, в силу леммы 2 имеем

$$\int_{\mathbb{R}} g_1'(y) \bar{V}(y) dy = - \int_{\mathbb{R}} g_1(y) \bar{v}(y) dy, \quad \int_{\mathbb{R}} g_2'(y) \bar{U}(y) dy = - \int_{\mathbb{R}} g_2(y) \bar{u}(y) dy,$$

где $\bar{V} = y\bar{v} + u$, $\bar{U} = y\bar{u} - p(\bar{v})$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция $\bar{w}(y) = (\bar{v}(y), \bar{u}(y))$ почти всюду на $\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)$ удовлетворяет системе (10) и задается уравнениями

$$\begin{aligned} y = -\sqrt{-p'(v)}, \quad \frac{du}{dv} = -y & \quad \text{на } \mathbb{R}_- \setminus (-\delta, 0), \\ y = \sqrt{-p'(v)}, \quad \frac{du}{dv} = y & \quad \text{на } \mathbb{R}_+ \setminus (0, \delta). \end{aligned}$$

Доказательство следствия очевидно.

Далее будем различать два случая: 1) $u_- > u_+$ и 2) $u_- \leq u_+$, где $u_- = u_l + v_l^{-\theta}/\theta$, $u_+ = u_r - v_r^{-\theta}/\theta$, $\theta = (\gamma - 1)/2$.

В случае 1) решение $\bar{w}(y)$ ограничено, в случае 2) решение $\bar{w}(y)$ неограничено и имеет вид

$$\bar{v} = \begin{cases} v_r & \text{при } y_r \leq y < \infty, \\ y^{-2/(\gamma+1)} & \text{при } 0 < y \leq y_r = v_r^{-(\gamma+1)/2}, \\ (-y)^{-2/(\gamma+1)} & \text{при } y_l \leq y < 0, \\ v_l & \text{при } -\infty < y \leq y_l = -\sqrt{-p'(v)} = -v_l^{-(\gamma+1)/2}, \end{cases} \quad (17)$$

$$\bar{u} = \begin{cases} u_r & \text{при } y_r \leq y < \infty, \\ u_+ + y^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}/\theta & \text{при } 0 < y \leq y_r, \\ u_- - (-y)^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}/\theta & \text{при } y_l \leq y < 0, \\ u_l & \text{при } -\infty < y \leq y_l = -v_l^{-(\gamma+1)/2}, \end{cases}$$

при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{v}(y) - \bar{q}(y)) dy = (u_r - u_l) - (u_+ - u_-), \quad \text{где } \bar{q}(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q(y, \varepsilon).$$

Энтропийная пара для системы (12) имеет вид

$$\Phi = \frac{(u - \varphi)^2}{2} + \int_{\psi}^{\varphi} (p(\psi) - p(\sigma)) d\sigma, \quad \Psi = (u - \varphi)(p(v) - p(\psi))$$

и удовлетворяет соотношению

$$y \frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dy} + \varepsilon Q = \varepsilon \frac{d}{dy} \left((u - \varphi) \frac{du}{dy} + (p(\psi) - p(v)) \frac{dv}{dy} \right) + R, \quad (18)$$

где (v, u) – решение системы (12), (ψ, φ) – любые функции из $C^1(\mathbb{R})$,

$$Q = \left(\frac{du}{dy} \right)^2 - p'(v) \left(\frac{dv}{dy} \right)^2,$$

$$R = (u - \varphi) \left(y \frac{d\varphi}{dy} - \frac{dp(\psi)}{dy} \right) + (p(\psi) - p(v)) \left(\frac{d\varphi}{dy} + y \frac{d\psi}{dy} \right) + (\psi - v) y \frac{dp(\psi)}{dy} + \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dy} \frac{du}{dy} - p'(\psi) \frac{d\psi}{dy} \frac{dv}{dy} \right).$$

ЛЕММА 4. *Справедливы формулы*

$$\int_{-\infty}^{\bar{y}} \Phi dy + \varepsilon \int_{-\infty}^{\bar{y}} Q dy = \bar{y} \Phi(\bar{y}) - \Psi(\bar{y}) + \int_{-\infty}^{\bar{y}} R dy + \varepsilon \left((u - \varphi) \frac{du}{dy} + (p(\psi) - p(v)) \frac{dv}{dy} \right)_{y=\bar{y}}, \quad (19)$$

$$\int_{\bar{y}}^{\infty} \Phi dy + \varepsilon \int_{\bar{y}}^{\infty} Q dy = -\bar{y} \Phi(\bar{y}) + \Psi(\bar{y}) + \int_{\bar{y}}^{\infty} R dy - \varepsilon \left((u - \varphi) \frac{du}{dy} + (p(\psi) - p(v)) \frac{dv}{dy} \right)_{y=\bar{y}}, \quad (20)$$

где $(\psi, \varphi) \rightarrow (v_l, u_l)$ при $x \rightarrow -\infty$ и $(\psi, \varphi) \rightarrow (v_r, u_r)$ при $x \rightarrow \infty$, а $(d\psi/dy, d\varphi/dy) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, $\bar{y} \in [-\delta, \delta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя (18) с учетом (14) и отмеченных свойств функций ψ и φ , получаем (19) и (20).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $(\psi, \varphi) = (\bar{v}, \bar{u})$, где $\bar{v}$ и $\bar{u}$ определены формулами (17), а $\bar{y} = -\delta$ формулой (19) и $\bar{y} = \delta$ формулой (20), то

$$\int_{-\infty}^{-\delta} \Phi dy < \omega_-(\varepsilon), \quad (21)$$

$$\int_{\delta}^{\infty} \Phi dy < \omega_+(\varepsilon), \quad (22)$$

где $\omega_-(\varepsilon_k) \rightarrow 0$, $\omega_+(\varepsilon_k) \rightarrow 0$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Если положить $(\psi, \varphi) = (v_l, u_l)$ в (19) и $(\psi, \varphi) = (v_r, u_r)$ в (20) при $\bar{y} = y_0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi dy < M, \quad (23)$$

где M не зависит от ε , а $(\psi, \varphi) = w_l + \theta(y - y_0)(w_r - w_l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (21). Имеем

$$R = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq y_l, \\ \bar{R} & \text{при } y_l \leq y < 0, \end{cases} \quad \bar{R} = (\bar{v} - v)y \frac{dp(\bar{v})}{dy} + \varepsilon \left(\frac{du}{dy} \frac{d\bar{u}}{dy} - p'(\bar{v}) \frac{dv}{dy} \frac{d\bar{v}}{dy} \right).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{-\delta} R dy = \int_{y_l}^{-\delta} \bar{R} dy,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{-\delta} \Phi dy \leq |\Psi(-\delta)| + \left| \int_{y_l}^{-\delta} y \frac{dp(\bar{v})}{dy} (\bar{v} - v) dy \right| + \varepsilon C = \omega_-(\varepsilon).$$

Здесь мы воспользовались ограниченностью функций $\bar{v}$, $\bar{u}$ и их производных первого и второго порядка на отрезке $[y_l, -\delta]$, а также ограниченностью (v, u) на $[y_l, -\delta]$.

Как установлено выше, $v(y, \varepsilon_k) \rightarrow \bar{v}(y)$, $u(y, \varepsilon_k) \rightarrow \bar{u}(y)$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, почти всюду на $[y_l, -\delta]$. Это означает, что $\omega_-(\varepsilon_k) \rightarrow 0$ с учетом того, что

$$y \frac{dp(\bar{v})}{dy} > 0 \quad \text{на } [y_l, -\delta],$$

и первой теоремы Хелли [6]. Аналогично устанавливается (22).

Для получения оценки (23) находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{y_0} \Phi_- dy + \varepsilon \int_{-\infty}^{y_0} Q dy &= y_0 \Phi_-(y_0) - \Psi_-(y_0) + \varepsilon(u - u_l) \frac{du}{dy}(y_0), \\ \int_{y_0}^{\infty} \Phi_+ dy + \varepsilon \int_{y_0}^{\infty} Q dy &= -y_0 \Phi_+(y_0) - \Psi_+(y_0) - \varepsilon(u - u_r) \frac{du}{dy}(y_0), \end{aligned} \quad (24)$$

где (Φ_-, Ψ_-) определяется при $\psi = v_l$, $\varphi = u_l$, а (Φ_+, Ψ_+) — при $\psi = v_r$, $\varphi = u_r$. Складывая равенства (24), получаем оценку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi dy \leq |y_0| \cdot |\Phi(y_0)| + |\Psi(y_0)| + C(|u - u_l| + |u - u_r|) \leq M.$$

Здесь учтена равномерная по ε ограниченность $\varepsilon|du/dy|$, вытекающая непосредственно из (13). Следствие доказано.

ЛЕММА 5. Последовательность $V(y, \varepsilon_k)$ равномерно сходится к $\bar{V}(y)$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, на интервалах $(-\infty, -\delta)$ и (δ, ∞) при любом сколь угодно малом $\delta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (21) и (22) следует, что при $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, выполнено $u(y, \varepsilon_k) \rightarrow \bar{u}(y)$ в $L_2(-\infty, -\delta)$ и $L_2(\delta, \infty)$, и $v(y, \varepsilon_k) \rightarrow \bar{v}(y)$ в $L_1(-\infty, -\delta)$ и $L_1(\delta, \infty)$. Для функции $V - \bar{V}$ на $(-\infty, -\delta)$ имеем

$$V - \bar{V} = \int_{-\infty}^y (v(s, \varepsilon) - \bar{v}(s)) ds,$$

откуда

$$\max_{(-\infty, -\delta)} |V - \bar{V}| \leq \int_{-\infty}^{-\delta} |v(y, \varepsilon) - \bar{v}(y)| dy \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Аналогично рассматривается интервал (δ, ∞) . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено условие $u_- < u_+$. Тогда последовательность $w(y, \varepsilon_k)$ решений задачи (12), (11) в слабой топологии сходится к функциональному решению задачи (10), (11). При этом последовательность $v(y, \varepsilon_k)$ сходится к $\bar{v}(y) + (u_+ - u_-)\delta(y)$, т.е. является δ -образной в точке $y = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сходимость к функциональному решению следует из оценки (23), которая обеспечивает слабую устойчивость и слабую аппроксимацию метода вязкости.

Далее согласно [7] из леммы 5 вытекает, что последовательность $v(y, \varepsilon_k)$ является δ -образной. При этом учитывается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (v(y, \varepsilon_k) - q(y, \varepsilon)) dy = u_r - u_l, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{v}(y) - v_0(y)) dy = u_r - u_l - (u_+ - u_-).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученным здесь результатом следует дополнить установленную в [8] теорему о глобальной разрешимости в целом полной системы одномерной газодинамики в классе функциональных решений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [2] Галкин В. А. Функциональные решения законов сохранения // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 4. С. 834–839.
- [3] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
- [4] Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
- [5] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1972.
- [6] Dafermos C., Di Perna R. The Riemann problem for certain classes of hyperbolic systems of conservation laws // Differential Equations. 1976. V. 20. № 1. P. 90–114.
- [7] Микусинский Я., Сикорский Р. Элементарная теория обобщенных функций. М.: ИЛ, 1959.
- [8] Тупчиев В. А. О разрешимости в целом задачи Коши для системы газовой динамики // Докл. РАН. 1995. Т. 349. № 6. С. 747–749.