Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Балаганский, О ближайших и наиболее удаленных точках, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 289–291

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 10:34:26

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О БЛИЖАЙШИХ И НАИБОЛЕЕ УДАЛЕННЫХ ТОЧКАХ

В. С. Балаганский

В работе рассматриваются антипроксиминальные множества с выпуклым дополнением и множества без наиболее удаленных точек. О выпуклых антипроксиминальных множествах см. [1] и приведенную в ней литературу. О множествах с выпуклым дополнением см., например, [2], где, в частности, доказано, что в рефлексивном банаховом пространстве нет антипроксиминальных множеств с выпуклым дополнением.

В работе приняты следующие обозначения: X – вещественное банахово пространство; $xy = d(x, y) = \|x - y\|$; $S(x, r) = \{y \in X : xy = r\}$; $S = S(0, 1)$; $B(x, r) = \{y \in X : xy \leq r\}$, $\mathring{B}(x, r) = \{y \in X : xy < r\}$; $S^* = \{f \in X^* : \|f\| = 1\}$; $xM = d(x, M) = \inf\{xy : y \in M\}$ – расстояние от x до $M \subset X$; $Mx = \sup\{xy : y \in M\}$ – уклонение $M \subset X$ от x ; $P_M : x \mapsto P_M x = \{y \in M : xy = xM\}$ – метрическая проекция; $F_M : x \mapsto F_M x = \{y \in M : xy = Mx\}$. Через $\overline{\text{co}} \vee K$ будем обозначать выпуклую замкнутую оболочку множества K , через ∂A – границу тела A . Будем писать: $X \in (\text{CLUR})$, если из условий $x, x_n \in S$, $\|x + x_n\|/2 \rightarrow 1$ вытекает существование сходящейся подпоследовательности x_{n_k} ; $X \in (\text{CLD})$, если из условий $x, x_n \in S$, $f \in S^*$, $f(x) = 1$, $f(x_n) \rightarrow 1$ вытекает, что x_n имеет сходящуюся подпоследовательность; $X \in (\text{WCG})$, если существует слабо компактное множество, линейная оболочка которого плотна в X ; наконец, $X \in (\text{RN})$, если любое ограниченное замкнутое множество имеет экстремальную точку (это одно из многих эквивалентных определений условия Радона–Никодима [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непустое подмножество $A \neq X$ банахова пространства X называется *антипроксиминальным*, если для любой точки $x \in X \setminus A$ в множестве A нет ближайшей точки ($P_M(x) = \emptyset$). Непустое подмножество A банахова пространства X будем называть *множеством без наиболее удаленных точек*, если для любой точки $x \in X$ в множестве A нет самой удаленной точки ($F_M(x) = \emptyset$).

М. Эдельштейн [4] построил в ℓ_1 пример ограниченного центрально-симметричного выпуклого множества без наиболее удаленных точек, в теореме 1 и следствии 1 приводятся такие примеры в довольно широком классе банаховых пространств. Построение базируется на следующей теореме Хаффа и Морриса.

ТЕОРЕМА А (см. [3], [5]). *Банахово пространство X не удовлетворяет условию Радона–Никодима тогда и только тогда, когда существуют открытое ограниченное центрально-симметричное выпуклое множество K и его замкнутое подмножество $A \subset K$ такие, что $K \subset \overline{\text{co}} \vee A$.*

Слабо компактно порожденные пространства (см. [3]) можно эквивалентно перенормировать в пространство класса (CLUR) и тем более (CLD) .

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $X \in (\text{RN})$ – банахово пространство. Тогда в X существует ограниченное замкнутое центрально-симметричное множество без наиболее удаленных точек (выпуклое тело, если дополнительно $X \in (\text{CLD})$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме А существуют открытое ограниченное центрально-симметричное выпуклое тело M и его замкнутое центрально-симметричное подмножество $A \subset M$ такие, что $M \subset \overline{\text{co}} \nabla A$. Тогда $A \cap \partial(\overline{\text{co}} \nabla A) = \emptyset$.

Докажем, что A – множество без наиболее удаленных точек. Действительно, если это не так, то найдутся точка v и шар $B(x, r)$ такие, что $A \subset M \subset B(x, r)$, $v \in S(x, r) \cap A \cap \partial M$, что противоречит условию.

Пусть теперь $X \in (\text{CLD})$. Докажем, что $M := \overline{\text{co}} \nabla A$ – множество без наиболее удаленных точек в X . Допустим, что существуют $x \in X \setminus M$, $y \in F_M(x)$. По теореме Хана–Банаха найдется функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$ такой, что

$$f(y) = \sup\{f(z) : z \in M\} = \sup\{f(z) : z \in B(x, xy)\}.$$

Так как $y \in \overline{\text{co}} \nabla A = M$, найдется последовательность $y_n \in A$ такая, что $f(y_n) \rightarrow f(y)$. Тогда в силу включения $A \subset B(x, xy)$ и условия $X \in (\text{CLD})$ получаем, что $y_n \rightarrow y$. Множество A замкнуто, следовательно, $y \in A \cap \partial M$. Противоречие с выбором A , значит M – множество без наиболее удаленных точек.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $X \in (\text{CLD}) \setminus (\text{RN})$ – банахово пространство. Тогда относительно некоторой эквивалентной нормы в X существует ограниченное замкнутое центрально-симметричное антипроксиминальное множество, дополнение которого есть выпуклое ограниченное тело.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X \in (\text{WCG}) \setminus (\text{RN})$ – банахово пространство (в частности, сепарабельное). Тогда относительно некоторой эквивалентной нормы в X существует ограниченное замкнутое центрально-симметричное выпуклое тело без наиболее удаленных точек.

Эдельштейн [4] показал, что пространство ℓ_1 можно перенормировать так, что в нем найдется замкнутое антипроксиминальное множество, дополнение которого ограничено, центрально-симметрично и выпукло. Далее теорема 2 и следствие 3 показывают, что замкнутые антипроксиминальные множества с ограниченным центрально-симметричным выпуклым дополнением существуют в довольно широком классе банаховых пространств.

ЛЕММА 1. Пусть $X \in (\text{CLUR})$ – банахово пространство, N – непустое замкнутое ограниченное множество без наиболее удаленных точек, $\alpha > 0$. Тогда $N(\alpha) = \{x \in X : Nx \geq \alpha\}$ антипроксиминально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: существует $x \in X \setminus N(\alpha)$, $y \in P_{N(\alpha)}(x)$. Пусть $z_n \in N$, $yz_n \rightarrow Ny$. По лемме 2 [6] $xN + Nx = \alpha$ и $Ny = \alpha$, тогда $xy + xz_n \rightarrow \alpha$. Имеем $\alpha \leftarrow xy + xz_n \geq z_n y \rightarrow Ny = \alpha$. Следовательно, в силу $X \in (\text{CLUR})$ последовательность z_n сходится к некоторой точке $z \in N$. Тогда $yz = \sup\{yv : v \in N\}$, но N – множество без наиболее удаленных точек, возникает противоречие. Следовательно, $N(\alpha)$ антипроксиминально.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – банахово пространство, $X \in (\text{CLUR}) \setminus (\text{RN})$. Тогда в X существует замкнутое антипроксиминальное множество, дополнение которого – выпуклое ограниченное центрально-симметричное тело.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 в X существует замкнутое центрально-симметричное выпуклое множество без наиболее удаленных точек N . Согласно лемме 1 $N(\alpha)$ при $\alpha > 0$ антипроксиминально. Нетрудно заметить, что множество $N(\alpha)$ удовлетворяет условиям теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $X \in (\text{WCG}) \setminus (\text{RN})$ – банахово пространство (в частности, сепарабельное). Тогда X можно эквивалентно перенормировать так, что в получившемся пространстве найдется замкнутое антипроксиминальное множество, дополнение которого – выпуклое ограниченное центрально-симметричное тело.

Приведем пример антипроксиминального множества с выпуклым ограниченным дополнением в пространстве $L_1[0, 1]$.

Пусть $X = L_1[0, 1]$, $A = \{x \in X : \int_0^1 (1+t)|x(t)| dt \leq 1\}$, $M = \overline{X \setminus A}$.

ЛЕММА 2. Множество M антипроксимinallyно, A – множество без наиболее удаленных точек в $X = L_1[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что A является множеством без наиболее удаленных точек. Пусть $x \in X$ – произвольная точка. Если $y \in F_M(x)$, то $A \subset B(x, xy)$, и по теореме Хана–Банаха найдется функционал $f \in S^*$ такой, что $f(y) = \sup\{f(z) : z \in A\}$, $f(y - x) = \|f\| \cdot \|y - x\|$. Получили, что f достигает максимума на $B(x, xy)$ и на A в точке y . На множестве A в точке y максимума могут достигать только функционалы вида

$$f(x) = \int_0^1 x(t)g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \begin{cases} \frac{c \operatorname{sign} y(t)}{1+t} & \text{при } t \in \operatorname{supp} y, \\ \frac{c\gamma(t)}{1+t} & \text{при } t \notin \operatorname{supp} y, |\gamma(t)| \leq 1, \end{cases} \quad \operatorname{supp} y = \{t \in [0, 1] : y(t) \neq 0\}, \quad c > 0.$$

На $B(x, xy)$ в точке y максимума могут достигать только функционалы вида

$$f(x) = \int_0^1 x(t)g_1(t) dt,$$

где $g_1(t) = c_1 \operatorname{sign}(y(t) - x(t))$ при $t \in \operatorname{supp}(y - x)$, $|g_1(t)| \leq c_1$, $c_1 > 0$. Имеем $g(t) = g_1(t)$. Следовательно, на $\operatorname{supp} y$ справедливо равенство $x(t) = y(t)$. Возникло противоречие с тем, что y – самая удаленная точка (можно взять $z = -y(t) \in A$).

Докажем, что множество M антипроксимinallyно. Пусть $x \in X \setminus M$. Если $y \in P_M(x)$, то $\bar{B}(x, xy) \subset X \setminus M = A$. По теореме Хана–Банаха найдется функционал $f \in S^*$ такой, что $f(y) = \sup\{f(z) : z \in A\}$. Как и в предыдущем случае, получаем, что на $\operatorname{supp} y$ $x(t) = y(t)$. Тогда

$$\int_0^1 (1+t)|x(t)| dt \geq \int_0^1 (1+t)|y(t)| dt = 1,$$

следовательно, $x \in M$. Получили противоречие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балаганский В. С. // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 5. С. 643–657.
2. Балаганский В. С. // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 1. С. 20–29.
3. Diestel J., Uhl J. J. Vector Measures. Math. Surveys Monographs. V. 15. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1977.
4. Edelstein M. A. // J. Approx. Theory. 1976. V. 18. № 1. Р. 1–8.
5. Huff R. E., Morris P. D. // Studia Math. 1976. V. 56. № 2. Р. 157–164.
6. Балаганский В. С. // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Сб. научн. тр. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1987. С. 46–53.

Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: bal@approx.imm.intec.ru

Поступило
03.11.97