Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Бильченко, И. Р. Каюмов, С. Р. Насыров, М. Ф. Садыков, Разветвленные накрытия неориентируемых поверхностей ориентируемыми с заданной проекцией края, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 292–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 10:07:34

РАЗВЕТВЛЕННЫЕ НАКРЫТИЯ НЕОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОРИЕНТИРУЕМЫМИ С ЗАДАННОЙ ПРОЕКЦИЕЙ КРАЯ

Г. Г. Бильченко, И. Р. Каюмов, С. Р. Насыров, М. Ф. Садыков

Пусть N – компактная поверхность (без края), $\overline{M} = M \cup \partial M$ – компактная поверхность с краем, $p: \overline{M} \rightarrow N$ – непрерывное внутреннее в смысле Стоилова (см., например, [1, гл. V]) отображение. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ – кривые, которые обходят компоненты края ∂M в положительном направлении: $\beta_1 = p(\alpha_1), \dots, \beta_\nu = p(\alpha_\nu)$. Будем говорить, что пара $\sigma = (\overline{M}, p)$ есть *поверхность над N , ограниченная кривыми $\beta_1, \dots, \beta_\nu$* . Представляет интерес нахождение условий, которым должны удовлетворять кривые $\beta_1, \dots, \beta_\nu$, для того чтобы существовала ориентируемая поверхность $\sigma = (\overline{M}, p)$ над N , ограниченная этими кривыми, в случае, когда N неориентируема.

Эта задача является обобщением классических задач, поставленных Пикаром, Левнером и Хопфом и изучавшихся для случая, когда N ориентируема, в работах Титуса, М. Маркса, Френсиса, Эзелля и др. (см. подробнее [2], [3]). В неориентируемом случае Эзелль [4] исследовал эту задачу комбинаторными методами. В данной работе с использованием результатов из [3] для случая одной граничной кривой получено решение, формулирующееся в алгебраических терминах.

Пусть ∞_N – фиксированная точка из N . Введем множество $\mathcal{M}^*$ замкнутых кривых на компактной поверхности N .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Кривая $\beta \in \mathcal{M}^*$, если выполнены следующие условия:

- 1) β локально проста, т.е. для любого пути $z: [0, 1] \rightarrow N$, представляющего β , и любого $t \in [0, 1]$ 1-периодическое продолжение $\tilde{z}: \mathbb{R} \rightarrow N$ пути z инъективно в достаточно малой окрестности точки t ;
- 2) носитель $|\beta|$ кривой β разбивает N на конечное число частей;
- 3) β не проходит через ∞_N ;
- 4) если $\tilde{z}(t_1) = \tilde{z}(t_2) = \tilde{z}(t_3) = z_0$, где $t_1 < t_2 < t_3$, $|t_1 - t_3| \leq 1$, то при достаточно малом $r > 0$ кривые ω_1 и ω_2 с представлениями

$$z_i(t) = \begin{cases} \tilde{z}(r(t - 1/2) + t_i), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \tilde{z}(r(t - 1/2) + t_{i+1}), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

являются простыми и существуют простые кривые ζ_1 и ζ_2 такие, что для некоторой ориентации в окрестности точки z_0 кривая ζ_1 подходит “слева” к обеим кривым ω_1, ω_2 в точке z_0 , а ζ_2 – “справа”.

Пусть $\sigma = (\overline{M}, p)$ есть поверхность над N , ограниченная кривой β . Как и в [5], нетрудно показать, что для любой точки $P \in N \setminus |\beta|$ число прообразов P при отображении p конечно. В достаточно малой окрестности любой точки $Q \in p^{-1}(P)$ внутреннее отображение p по теореме Стоилова [1, с. 152] топологически эквивалентно степенному отображению $z \mapsto z^n$ в окрестности начала координат комплексной плоскости. Число $\text{ord}(Q, \sigma) = n - 1$ назовем *кратностью ветвления* поверхности σ в точке Q . По определению *число листов* поверхности σ над точкой P (с учетом кратности ветвления) есть

$$n_\sigma(P) = \sum_{Q \in p^{-1}(P)} (\text{ord}(Q, \sigma) + 1).$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00110.

Рассмотрим двулистное ориентируемое накрытие $\tilde{N}$ поверхности N с накрывающим отображением $\psi: \tilde{N} \rightarrow N$. Пусть $a' \in M$, $a \in N$, $\tilde{a} \in \tilde{N}$ – точки, для которых $\psi(\tilde{a}) = a = p(a')$. Тогда нетрудно видеть, что существует накрывающее отображение $\varphi: \overline{M} \rightarrow \tilde{N}$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \overline{M} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{N} \\ & \searrow p & \swarrow \psi \\ & N & \end{array} \quad (1)$$

коммутативна и $\varphi(a') = \tilde{a}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Замкнутую кривую β в N назовем *кривой, сохраняющей ориентацию*, если ее поднятие на $\tilde{N}$ замкнуто. Кривую, не сохраняющую ориентацию, будем называть *кривой, меняющей ориентацию*.

В дальнейшем через $\pi_1(X, x)$ будем обозначать фундаментальную группу топологического пространства X в точке x , через $[\omega]$ – гомотопический класс кривой ω , а через $f_\#$ – гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением f .

Пусть $\beta \in \mathfrak{M}^*$, тогда β разбивает N на $l + 1$ область $G_0, \dots, G_l$. В каждой из областей G_j выберем по точке: $\infty_N = b_0 \in G_0, \dots, b_l \in G_l$. Пусть a – начало кривой β , $A = N \setminus \{b_0, \dots, b_l\}$, $\gamma_0, \dots, \gamma_l$ – простые петли в A с началом в точке a , сохраняющие ориентацию, попарно не пересекающиеся (за исключением точки a), причем каждая из кривых γ_i ограничивает в N некоторую жорданову область D_i , которая содержит точку b_i и не содержит точек b_j при $j \neq i$.

Фиксируем некоторую ориентацию на $\tilde{N}$. Пусть $\psi^{-1}(a) = \{\tilde{a}, \tilde{a}'\}$. Обозначим через $\gamma_i^{(1)}$ и $\gamma_i^{(2)}$ кривые, получающиеся поднятием кривой γ_i на $\tilde{N}$ из точек $\tilde{a}$ и $\tilde{a}'$ соответственно. Так как область D_i односвязна, то $\psi^{-1}(D_i) = D_i^{(1)} \sqcup D_i^{(2)}$, причем область $D_i^{(1)}$ ограничена кривой $\gamma_i^{(1)}$, а $D_i^{(2)}$ – кривой $\gamma_i^{(2)}$. Пусть $b_i^{(1)} \in D_i^{(1)}$, $b_i^{(2)} \in D_i^{(2)}$ – прообразы точки b_i ; $\tilde{A} = \tilde{N} \setminus \{b_i^{(1)}, b_i^{(2)} \mid i = 0, \dots, l\}$.

Выберем направление обхода кривых $\gamma_0, \dots, \gamma_l$ так, чтобы кривая $\gamma_i^{(1)}$ обходила границу области $D_i^{(1)}$ в положительном направлении. Тогда очевидно, что кривая $\gamma_i^{(2)}$ обходит границу области $D_i^{(2)}$ в отрицательном направлении.

Пусть $[\pi, \pi]$ – коммутант группы $\pi_1(A, a)$, т.е. подгруппа в $\pi_1(A, a)$, порожденная всевозможными коммутаторами. (Напомним, что *коммутатором* элементов x и y называется элемент $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.) Для любого $[\delta] \in [\pi, \pi]$ обозначим через $\Delta([\delta], \rho)$ множество наборов $d = \{[\delta_{ij}] \mid i = 1, 2, j = 1, \dots, \rho\}$ элементов из $\pi_1(A, a)$ таких, что $[\delta]$ представим в виде произведения ρ коммутаторов

$$[\delta] = \prod_{j=1}^{\rho} [[\delta_{1j}], [\delta_{2j}]].$$

Если $[\delta] = e$ – единичный элемент, то по определению полагаем $\Delta([\delta], 0) = \{e\}$. Теперь определим *степень элемента* $[\delta]$:

$$\deg[\delta] = \min\{\rho \in \mathbb{Z} \mid \Delta([\delta], \rho) \neq \emptyset\}.$$

Обозначим через $\pi^+(A, a)$ полугруппу в $\pi_1(A, a)$, порожденную элементами вида $[\xi][\gamma_j][\xi]^{-1}$, $j = 1, \dots, l$, где $[\xi] \in \pi_1(A, a)$ и ξ сохраняет ориентацию, а также элементами вида $[\eta][\gamma_j]^{-1}[\eta]^{-1}$, $j = 1, \dots, l$, где η меняет ориентацию. Пусть π_r^n – множество элементов вида

$$\prod_{i=1}^n [\xi_i][\gamma_0][\xi_i]^{-1},$$

где $[\xi_i] \in \pi_1(A, a)$ и ξ_i сохраняют ориентацию, π_r^n – множество элементов вида

$$\prod_{i=1}^n [\eta_i][\gamma_0]^{-1}[\eta_i]^{-1},$$

где $[\eta_i] \in \pi_1(A, a)$ и η_i меняют ориентацию.

Обозначим через $\Sigma_n(\beta, \rho)$ класс ориентируемых поверхностей σ над N рода ρ , ограниченных кривой β , для которых число листов над бесконечно удаленной точкой (с учетом кратности ветвления) $n_\sigma(\infty_N) = n$, и положим по определению

$$S_n(\beta, \rho_0) = \bigcup_{\rho \leq \rho_0} \Sigma_n(\beta, \rho).$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\beta \in \mathfrak{M}^*$, $\rho_0, n \in \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы $S_n(\beta, \rho_0)$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы либо $[\beta]$, либо $[\beta]^{-1}$ было представимо в виде $[\beta^+][\beta_p][\beta_r][\delta]$, где $[\beta^+] \in \pi^+(A, a)$, $[\beta_p] \in \pi_p^{n_1}(A, a)$, $[\beta_r] \in \pi_r^{n_2}(A, a)$, $[\delta] \in [\text{im}(\psi_\#), \text{im}(\psi_\#)]$, причем $\deg[\delta] = \rho \leq \rho_0$ и $n_1 + n_2 = n$.

Доказательство основано на том, что вместо накрытия $p: \overline{M} \rightarrow N$ неориентируемой поверхностью можно рассмотреть накрытие $\varphi: \overline{M} \rightarrow \tilde{N}$ ориентируемой поверхности (см. диаграмму (1)) и воспользоваться результатами из [2], [3].

Итак, исходная задача сведена к чисто алгебраической задаче о факторизации гомотопического класса $[\beta]$ данной кривой β в группе $\pi_1(A, a)$ (отметим, что эта группа является свободной, что существенно облегчает задачу). Проверка условий теоремы на практике в общем случае представляет собой открытую проблему. Тем не менее, в случае $n = 0$ можно предложить алгоритм, позволяющий за конечное число шагов определить, допускает ли $[\beta]$ факторизацию нужного вида. Этот алгоритм основан на модификации понятия базисного набора, введенного в [2], а также на топологическом методе определения степени элемента из коммутанта свободной группы, предложенном независимо Каллером [6] и Ольшанским [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. М.: Наука, 1964.
2. Насыров С. Р. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 6. С. 1311–1314.
3. Насыров С. Р. // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 3. С. 212–236.
4. Ezell C. L. // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 259. № 2. P. 533–546.
5. Nasyrov S. R. // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1995. V. 40. № 2. P. 177–194.
6. Culler M. // Topology. 1981. V. 20. P. 133–145.
7. Ольшанский А. Ю. // Сиб. матем. ж. 1989. Т. 30. № 6. С. 152–171.