Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Демьяненко, К гипотезе Мазура, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 294–296

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

`http://www.mathnet.ru/rus/agreement`

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 09:36:45

К ГИПОТЕЗЕ МАЗУРА

В. А. Демьяненко

Пусть n – произвольное натуральное число, $\varepsilon(n) = e^{2\pi i/n}$, $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, $\mathbb{Q}(\varepsilon(n))$ – поле, полученное присоединением к $\mathbb{Q}$ единицы $\varepsilon(n)$, $F: y^2 = x^3 + rx + s$ – эллиптическая кривая, определенная над $\mathbb{Q}(\varepsilon(n))$, $D = -4r^3 - 27s^2 \neq 0$, $\{O_m(F), O'_m(F)\}$ – базис всех точек порядка m на F и $\alpha O_m(F) + \beta O'_m(F) = \{x_{\alpha/m, \beta/m}, y_{\alpha/m, \beta/m}\}$.

Цель настоящей заметки – доказательство двух следующих теорем.

ТЕОРЕМА 1. Если $O_{2^\alpha}(F), 2^{\alpha-1}O'_{2^\alpha}(F) = O'_2(F) \in \mathbb{Q}(\varepsilon(2^t))$ (t произвольное), то $\alpha \leq 3$.

ТЕОРЕМА 2. Если $O_{3^\beta}(F), O'_3(F) \in \mathbb{Q}(\varepsilon(3^t))$ (t произвольное), то $\beta \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\mathbb{k}$ – алгебраическое поле, эллиптическая кривая F определена над $\mathbb{k}$, P – произвольная $\mathbb{k}$ -точка на F и $tP = \{x_t, y_t\}$. Так как

$$2y_1\sqrt{x_2 - \rho} = (x_1 - \rho)^2 - (r + 3\rho^2), \quad \rho^3 + r\rho + s = 0, \quad (1)$$

в силу (1) кривая $G: v^2 = u^4 + au^2 + b$, $a = 3\rho$, $b = r + 3\rho^2$, имеет точки $tQ = \{u_t, v_t\}$, $u_t = \sqrt{x_{2t} - \rho}$, $v_t = y_{2t}/\sqrt{x_{2t} - \rho}$, для которых, как и в (1), имеем

$$\pm u_{2t} = \frac{u_t^4 - b}{2u_tv_t}, \quad \pm v_{2t} = \frac{u_t^8 + 2au_t^6 + 6bu_t^4 + 2abu_t^2 + b^2}{4u_t^2v_t^2}. \quad (2)$$

Из (2) получаем

$$\left(\frac{v_t}{u_t}\right)^2 = \pm 2v_{2t} + a + 2u_{2t}^2, \quad u_t^2 = u_{2t}^2 \pm v_{2t} \pm u_{2t} \left(\frac{v_t}{u_t}\right). \quad (3)$$

Полагая в (3) $t = 2, 4, \dots$ и учитывая (1), выводим

$$\begin{aligned} O_{16}(F) &= \{x_{1/16,0}, y_{1/16,0}\}, \quad O'_2(F) = \{x_{0,1/2}, y_{0,1/2}\} \in \mathbb{k}, \\ Y^2 &= X^3 + 4X, \quad X, Y \in \mathbb{k}, \quad X = 2T^2, \quad Y = 2T(\alpha(T^2 - 1) - T^2 - 1), \\ T &= \frac{(\rho_2 - \rho_3)(1 - \alpha^2)^2}{(1 + \alpha^2)(\alpha^2 - 2\alpha - 1)}, \quad \alpha = \frac{2u_{1/16,0}}{(v_{1/16,0}/u_{1/16,0} + 1)^2}, \\ u_{1/16,0} &= \sqrt{x_{1/8,0} - \rho_1} = \frac{(x_{1/16,0} - \rho_1)^2 - r - 3\rho_1^2}{2y_{1/16,0}}, \quad \frac{v_{1/16,0}}{u_{1/16,0}} = \frac{y_{1/8,0}}{x_{1/8,0} - \rho_1}, \\ \{x_{1/2,0}, y_{1/2,0}\} &= \{\rho_1, 0\}, \quad \{x_{0,1/2}, y_{0,1/2}\} = \{\rho_2, 0\}, \quad \{x_{1/2,1/2}, y_{1/2,1/2}\} = \{\rho_3, 0\}, \\ \rho_i^3 + r\rho_i + s &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь если $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\varepsilon(2^t))$ (t произвольное) и $O_{16}(F) \in \mathbb{Q}(\varepsilon(2^t))$, то (4) противоречит результатам работы [1]. Следовательно, $\alpha \leq 3$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предположим, что над произвольным алгебраическим полем $\mathbb{k}$ $O_9(F), 3O'_9(F) = O'_3(F) \in \mathbb{k}$. Согласно [2]

$$\begin{aligned} u^3 - v^3 &= 1, \quad u, v \in \mathbb{k}, \quad u_j = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3r + 9x_{(c_j/3)}^2}{x_{(c_j/3)}^2}}, \quad v_j = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3r + x_{(c_j/3)}^2}{x_{(c_j/3)}^2}}, \\ c_{1,j}O_3 + c_{2,j}O'_3 &= \{x_{(c_j/3)}, y_{(c_j/3)}\}, \quad (c_j/3) = \{1/3, 0\}, \{0, 1/3\}, \{1/3, 1/3\}, \{1/3, -1/3\}, \\ \sqrt[3]{\frac{3r + 9x_{1/3,0}^2}{x_{1/3,0}^2}} &= \frac{1}{2}x_{1/3,0}^{-1} \sum_{t=0}^2 \varepsilon^{-t}(3)x_{t/3,1/3}, \\ \sqrt[3]{\frac{3r + 9x_{1/3,0}^2}{x_{1/3,0}^2}} &= \frac{1}{6}x_{1/3,0}^{-1} \sum_{\alpha, \beta=0}^2 \varepsilon^{-\beta}(3)x_{(3\alpha+1)/9, \beta/3}, \end{aligned} \quad (5)$$

где в силу [3]

$$\frac{y_{1/3,1/3}}{x_{1/3,1/3} - x_{0,1/3}} \Big/ \frac{y_{1/3,0}}{x_{1/3,0} - x_{0,1/3}} = \varepsilon(3) = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}. \quad (6)$$

Теперь если $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\varepsilon(3^t))$ (t произвольное), то (5) и (6) противоречат результатам работы [4]. Следовательно, $\beta \leq 1$. Теорема 2 доказана.

Пусть $\mathbb{k}$ – алгебраическое поле, F_1 и F_2 – эллиптические кривые, определенные соответственно над полями $\mathbb{k}$ и $\mathbb{k}(\varepsilon(m^t))$ (t произвольное) и $\Gamma_1(m), \Gamma_2(m)$ – группы точек m -кручения F_1 и F_2 .

Доказанные теоремы позволяют выдвинуть следующие гипотезы.

ГИПОТЕЗА 1. Если $O_m(F_1), O'_m(F_1) \in \mathbb{K}$ и $O_m(F_2), O'_m(F_2) \in \mathbb{K}(\varepsilon(m^t))$, то $\Gamma_1(m) \cong \Gamma_2(m)$.

ГИПОТЕЗА 2. Если для некоторой эллиптической кривой F_2 и натурального числа t $O_m(F_2) \in \mathbb{K}(\varepsilon(m^t))$, то для некоторой кривой F_1 и того же числа t $O_m(F_1) \in \mathbb{K}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башмаков М. И., Кириллов А. С. // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1976. Т. 57. С. 5–7.
2. Демьяненко В. А. // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 1. С. 99–102.
3. Демьяненко В. А. // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1983. Т. 111. С. 58–61.
4. Башмаков М. И., аль-Надер. // Матем. сб. 1973. Т. 90. № 1. С. 117–130.