Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Космодемьянский, Третья краевая задача для уравнения Пуассона, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 296–298

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:49:03

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

А. А. Космодемьянский

Третья краевая задача состоит в отыскании решения уравнения $\Delta u = -1$ с граничными условиями

$$u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \beta > 0. \quad (1)$$

Покажем, как методами [1] получить изопериметрические оценки решения такой задачи в плоской выпуклой области D с достаточно гладкой границей Γ .

Оценки, использующие принцип максимума, получены в [2], где, в частности, доказана положительность функции u . Согласно [2] поставленную задачу будем называть задачей $P(\beta)$.

Пусть $|\Gamma|$ – периметр границы Γ , а $|D|$ – площадь области D . Напомним, что $\partial u / \partial n = u_n$ – производная по внешней нормали к границе Γ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть кривизна границы Γ удовлетворяет неравенству $K \geq K_{\min} > 0$ и пусть u – решение уравнения Пуассона с граничными условиями (1). Тогда

$$\max_{\Gamma} u \leq \frac{\beta |D|}{|\Gamma|} + \left(\frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J} \right) \beta^{1/2} \left(\int_{\Gamma} \frac{ds}{K\beta + 2} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

$$\min_{\Gamma} u \geq \frac{\beta |D|}{|\Gamma|} - \left(\frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J} \right) \beta^{1/2} \left(\int_{\Gamma} \frac{ds}{K\beta + 2} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

$$\text{где } J = \int_{\Gamma} \frac{ds}{K}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО близко к доказательству соответствующей теоремы из [1]. Пусть $G = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$. Тогда

$$2 \iint_D G \, dx \, dy = \int_{\Gamma} (K \dot{u}^2 - 2 \dot{u} \dot{u}_n + K u_n^2) \, ds. \quad (4)$$

Здесь и далее точкой обозначается производная по натуральному параметру вдоль Γ .

Выразим теперь u_n и $\dot{u}_n$ из граничных условий (1) и подставим в формулу (4). Получим

$$2 \iint_D G \, dx \, dy = \int_{\Gamma} \left(K \dot{u}^2 + \frac{2}{\beta} \dot{u}^2 \right) + \frac{K u^2}{\beta^2} \, ds. \quad (5)$$

Левую часть равенства (5) оценим с помощью очевидного неравенства $G \leq 1/4$. Имеем

$$2 \iint_D G \, dx \, dy \leq \frac{|D|}{2}. \quad (6)$$

Оценим теперь правую часть (5). Интегрируя исходное уравнение по области D и учитывая граничные условия (1), получим

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\frac{1}{\beta} \int_{\Gamma} u ds = -|D|. \quad (7)$$

Из равенства (7) выводится оценка

$$(\beta|D|)^2 = \left(\int_{\Gamma} u ds \right)^2 = \left(\int_{\Gamma} \frac{u\sqrt{K}}{\sqrt{K}} ds \right)^2 \leq \int_{\Gamma} K u^2 ds \cdot J. \quad (8)$$

Таким образом, из равенства (5) и оценок (6) и (8) получим неравенство

$$\int_{\Gamma} \left(K \dot{u}^2 + \frac{2}{\beta} \dot{u}^2 \right) ds \leq \frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J},$$

или

$$\int_{\Gamma} (K\beta + 2) \dot{u}^2 ds \leq \left(\frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J} \right) \beta. \quad (9)$$

Далее рассуждаем как в работе [1]. Из формулы (7) видно, что на границе Γ есть точка M_0 такая, что $u(M_0) = \beta|D|/|\Gamma|$. Пусть Γ_0 — дуга Γ , концами которой служат точка M_0 и точка, в которой функция u достигает своего максимума на Γ . Тогда

$$\max_{\Gamma} u - \frac{\beta|D|}{|\Gamma|} = \int_{\Gamma_0} \dot{u} ds.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат и осуществим оценку, используя неравенство (9):

$$\begin{aligned} \left(\max_{\Gamma} u - \frac{\beta|D|}{|\Gamma|} \right)^2 &= \left(\int_{\Gamma_0} \dot{u} ds \right)^2 = \left(\int_{\Gamma_0} \frac{\sqrt{K\beta + 2} \dot{u}}{\sqrt{K\beta + 2}} ds \right)^2 \\ &\leq \int_{\Gamma} (K\beta + 2) \dot{u}^2 ds \int_{\Gamma} \frac{ds}{K\beta + 2} \leq \left(\frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J} \right) \beta \int_{\Gamma} \frac{ds}{K\beta + 2}. \end{aligned}$$

Извлекая корень, получим неравенство (2). Неравенство (3) доказывается аналогично.

При малых β неравенства (2) и (3) слишком грубы. В этом случае их естественно заменить другими, точными по порядку.

ТЕОРЕМА 2. *В условиях теоремы 1 справедливы неравенства*

$$\frac{\beta}{2K_{\min}} \geq \max_{\Gamma} u \geq \frac{\beta|D|}{|\Gamma|}, \quad \frac{\beta}{2K_{\max}} \leq \min_{\Gamma} u \leq \frac{\beta|D|}{|\Gamma|}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правые части неравенств (10) следуют из формулы (7). Докажем теперь левую часть первого из неравенств. Пусть u_0 — решение задачи $P(0)$. Рассмотрим функцию $w = u_0 + \max_{\Gamma} u - u$. Функция w положительна и гармонична в области D и обращается в 0 в той точке границы Γ , где функция u достигает своего максимума. Следовательно, по лемме о нормальной производной в этой точке $w_n < 0$. Отсюда немедленно следует

$$-\frac{\partial u_0}{\partial n} > -\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\beta} u_{\max}.$$

Таким образом,

$$u_{\max} < \beta \max_{\Gamma} \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right|.$$

Для завершения доказательства воспользуемся неравенством, полученным в [3]:

$$\frac{1}{2K_{\max}} \leq \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| \leq \frac{1}{2K_{\min}}.$$

Левая часть второго неравенства в (10) доказывается аналогично. Заметим, что обращение каждого из неравенств (10) в равенство возможно лишь тогда, когда область D – круг. Это утверждение следует из строгого принципа максимума.

Аналогичные оценки получены в [2].

Доказанные теоремы дают возможность проследить за поведением решения третьей краевой задачи при $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \infty$.

Пусть u_0 – решение задачи $P(0)$. Поскольку разность $u - u_0$ является гармонической функцией, из принципа максимума и теоремы 2 получаются оценки

$$\max_D |u - u_0| \leq \max_{\Gamma} |u - u_0| = \max_{\Gamma} u \leq \frac{\beta}{2K_{\min}}, \quad \min_D |u - u_0| \geq \min_{\Gamma} |u - u_0| = \min_{\Gamma} u \geq \frac{\beta}{2K_{\max}}.$$

При больших β неравенство (2) принимает вид

$$\max_{\Gamma} u \leq \frac{\beta|D|}{|\Gamma|} + \left(\frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J} \right)^{1/2} J^{1/2},$$

поэтому оценки (2), (3) теоремы 1 в силу условий (1) могут быть представлены в следующей форме:

$$\max_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \leq \frac{|D|}{|\Gamma|} + \left(\frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J} \right)^{1/2} \frac{J^{1/2}}{\beta}, \quad \min_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \geq \frac{|D|}{|\Gamma|} - \left(\frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J} \right)^{1/2} \frac{J^{1/2}}{\beta}. \quad (11)$$

Пусть $v_{\beta} = u - \beta|D|/|\Gamma|$, а u_{∞} – решение исходного уравнения с граничными условиями

$$\frac{\partial u_{\infty}}{\partial n} = -\frac{|D|}{|\Gamma|}$$

такое, что

$$\int_{\Gamma} u_{\infty} ds = 0.$$

Из формулы (7) следует, что

$$\int_{\Gamma} v_{\beta} ds = 0,$$

а из формул (11) – неравенства

$$\frac{|D|}{|\Gamma|} - \frac{1}{\beta} \left(\frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J} \right)^{1/2} J^{1/2} \leq \frac{\partial v_{\beta}}{\partial n} \leq \frac{1}{\beta} \left(\frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J} \right)^{1/2} J^{1/2} + \frac{|D|}{|\Gamma|}.$$

Поэтому можно оценить нормальную производную гармонической функции $v = u_{\infty} - v_{\beta}$:

$$-\frac{1}{\beta} \left(\frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J} \right)^{1/2} J^{1/2} \leq \frac{\partial v}{\partial n} \leq \frac{1}{\beta} \left(\frac{|D|}{2} - \frac{|D|^2}{J} \right)^{1/2} J^{1/2}.$$

Кроме того,

$$\int_{\Gamma} v ds = 0.$$

Поэтому при $\beta \rightarrow \infty$ функция v стремится к 0, а значит, функция v_{β} – к функции u_{∞} .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Космодемьянский А. А. // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 4. С. 48–53.
2. Keady G., McNabb A. // IMA J. Appl. Math. 1993. V. 50. P. 205–224.
3. Космодемьянский А. А. // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 4. С. 537–542.