Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Лоренц, А. А. Саакян, О подпространствах, порожденных всплеск-системами, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 299–302

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1279>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:39:12

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ВСПЛЕСК-СИСТЕМАМИ

Р. А. Лоренц, А. А. Саакян

Настоящая статья посвящена проблеме описания подпространств, порожденных всплеск-системами. Как известно, *всплески* – это функции ψ^ν , сжатия и сдвиги которых порождают ортонормированную систему в $L^2(\mathbb{R}^s)$:

$$\Psi = \{ \{ \psi_{k,l}^\nu \}_{l \in \mathbb{Z}^s, k \in \mathbb{Z}} \}_{\nu=1}^{\nu_0}, \quad \psi_{k,l}^\nu(x) = 2^{ks/2} \psi^\nu(2^k x - l) \quad (1)$$

(подробнее о всплеск-системах см. [1], [2]). Отметим, что полная в $L^2(\mathbb{R}^s)$ всплеск-система при $s > 1$ обязана быть порожденной несколькими функциями, точнее $\nu_0 \geq 2^s - 1$ (см. [2]). Мы изучаем пространство $S(\Psi)$ – замыкание в L^2 линейной оболочки системы Ψ – в частности, рассматриваем вопросы полноты и инвариантности относительно сдвигов. Для систем, порожденных MRA (Multiresolution Analysis), полное описание пространства $S(\Psi)$ получено в работе [3]. Напомним, что система (1) *порождена* MRA, если существует функция φ^ν , целочисленные сдвиги которой образуют ортонормированный базис в L^2 -замыкании линейной оболочки системы $\{ \{ \psi_{k,l}^\nu \}_{l \in \mathbb{Z}^s, k \in \mathbb{Z}, k \leq 0} \}_{\nu=1}^{\nu_0}$.

Мы рассмотрим более общие, чем (1), системы вида

$$\Psi = \{ \psi_{k,l} \}_{l \in \mathbb{Z}^s, k \in \mathbb{Z}}, \quad \psi_{k,l}(x) = \psi_k(x - lb_k), \quad (2)$$

где $\|\psi_k\|_2 = 1$, $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – последовательность чисел с условиями

$$b_{k+1} \leq b_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} b_k = \infty.$$

Будем предполагать также, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_-} |\hat{\psi}_k|^2 \in L^1(\mathcal{Q}) \quad (3)$$

для любого куба $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^s$ с $0 \notin \mathcal{Q}$ (здесь и далее через $\hat{\psi}$ обозначаем преобразование Фурье функции ψ). Заметим, что любая система Ψ вида (1) удовлетворяет (3). Обозначим

$$Q(\xi) = Q_\Psi(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{-s} |\hat{\psi}_k(\xi)|^2.$$

Функцию Q иногда называют *функцией Литтлвуда–Пэли*. Положим также

$$\Omega_0 = \{ \xi : Q(\xi) = 0 \}, \quad \Omega_1 = \{ \xi : Q(\xi) = 1 \}, \quad \Omega_* = \mathbb{R}^s \setminus \{ \Omega_1 \cup \Omega_0 \}.$$

Пусть

$$\text{IF}(\Omega) := \{ f \in L^2(\mathbb{R}^s) : \text{supp } \hat{f} \subset \Omega \}$$

для произвольного измеримого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^s$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Ψ – ортонормированная система вида (2) с условием (3). Тогда

- 1) $\text{IF}(\Omega_1) \subset S(\Psi) \subset \text{IF}(\Omega_1 \cup \Omega_*)$;
- 2) $\text{IF}(\Omega_0) \perp S(\Psi)$;
- 3) если $\mu(\Omega_*) > 0$, то $\text{IF}(\Omega_1) \neq S(\Psi) \neq \text{IF}(\Omega_1 \cup \Omega_*)$;
- 4) для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ с $\mu(\text{supp } \hat{f} \setminus \Omega_1) > 0$ существует функция $g \in L^2(\mathbb{R})$ такая, что $|\hat{g}(\xi)| = |\hat{f}(\xi)|$ при $\xi \in \mathbb{R}^s$, но $g \notin S(\Psi)$.

Отсюда можно вывести упомянутый выше результат Лоренца и Мадича: если система Ψ порождена MRA, то $\mu(\Omega_*) = 0$ и $S(\Psi) = \text{IF}(\Omega_1)$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает также следующее следствие, обобщающее результат Чюи и Ши из [4] о том, что для полных ортонормированных систем имеет место равенство $Q = 1$ почти всюду на $\mathbb{R}^s$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1:

- 1) система Ψ полна тогда и только тогда, когда $Q(\xi) = 1$ почти всюду на $\mathbb{R}^s$;
- 2) $\text{IF}(\Omega) \subset S(\Psi)$ при некотором $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ тогда и только тогда, когда $\Omega \subset \Omega_1$;
- 3) $S(\Psi) = \text{IF}(\Omega)$ при некотором $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ тогда и только тогда, когда $\mu(\Omega_*) = 0$.

Из теоремы 1 следует, что если $\mu(\Omega_*) > 0$, то существуют функции $f, g \in L^2(\mathbb{R}^s)$ такие, что $|\widehat{f}(\xi)| = |\widehat{g}(\xi)|$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^s$, при этом $f \in S(\Psi)$, а $g \notin S(\Psi)$. Любое инвариантное относительно сдвигов подпространство L^2 имеет вид $\text{IF}(\Omega)$ при некотором $\Omega \subset \mathbb{R}^s$. Отсюда вытекает, что в условиях теоремы 1 пространство $S(\Psi)$ инвариантно относительно сдвигов тогда и только тогда, когда $\mu(\Omega_*) = 0$.

Рассмотрим теперь произвольные системы вида

$$\begin{aligned}\Theta &= \{\theta_{k,l}\}_{l \in \mathbb{Z}^s, k \in \mathbb{Z}}, & \theta_{k,l} &= \theta_k(x - lb_k), \\ \Theta^* &= \{\theta_{k,l}^*\}_{l \in \mathbb{Z}^s, k \in \mathbb{Z}}, & \theta_{k,l}^* &= \theta_k^*(x - lb_k).\end{aligned}\quad (4)$$

Предположим, что для любого куба $\mathcal{Q}$, не содержащего начало координат, выполняются условия

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_-} |\widehat{\theta}_k(\xi)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}_-} |\widehat{\theta}_k^*(\xi)|^2 \in L^1(\mathcal{Q}), \quad (5)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} b_k^{-s} |\widehat{\theta}_k(\xi)| \cdot |\widehat{\theta}_k^*(\xi)| \in L^1(\mathcal{Q}), \quad \text{если } \Theta \neq \Theta^*. \quad (6)$$

Обозначим через $\mathcal{G}$ множество конечных кубов в $\mathbb{R}^s$ с ребрами параллельными координатным осям. Для куба $\mathcal{Q} \in \mathcal{G}$ через $d(\mathcal{Q})$ обозначим длину его ребра.

Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^s)$ – произвольная функция с

$$\text{supp } \widehat{f} \subset \mathcal{Q} \in \mathcal{G}, \quad \|\widehat{f}\|_\infty < \infty. \quad (7)$$

Для любого $m > 0$ рассмотрим разложение на непересекающиеся кубы

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{j=0}^{j_m-1} \mathcal{Q}_j,$$

где $\mathcal{Q}_j$ – некоторые сдвиги кубов $r_m(0, 2\pi)^s$ с $r_m \leq b_m^{-1}$. Определим функции $f_{j,m}$ для $0 \leq j \leq j_m - 1$ с помощью преобразования Фурье и функции $f_m^{(t)}$ для $t \in (0, 1)$ следующим образом:

$$\widehat{f}_{j,m}(\xi) := \widehat{f}(\xi) \chi_{\mathcal{Q}_j}(\xi), \quad f_m^{(t)}(\xi) := \sum_{j=0}^{j_m-1} r_j(t) f_{j,m}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^s,$$

где $\{r_j\}$ – система Радемахера. Обозначим

$$U(f) = U_{\Theta, \Theta^*}(f) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^s} \langle f, \theta_{k,l} \rangle \langle \theta_{k,l}^*, f \rangle, \quad Q(\xi) = Q_{\Theta, \Theta^*}(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{-s} \widehat{\theta}_k(\xi) \overline{\widehat{\theta}_k^*(\xi)}.$$

Центральную роль в доказательстве теоремы 1 играет

ТЕОРЕМА 2. Если системы Θ и Θ^* вида (4) удовлетворяют (5), (6), то для произвольной функции f с условиями (7) имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 U(f_m^{(t)}) dt = (2\pi)^{-s} \int_{\mathbb{R}^s} |\widehat{f}(\xi)|^2 \overline{Q(\xi)} dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если системы Θ и Θ^* вида (4) удовлетворяют (5), (6) и

$$U(f) = \|f\|^2 \quad \text{при } f \in \text{IF}(\Omega) \quad (8)$$

для некоторого множества Ω , то

$$Q(\xi) = 1 \quad \text{почти всюду на } \Omega. \quad (9)$$

Заметим, что равенство (8) имеет место, если

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^s} \langle f, \theta_{k,l}^* \rangle \theta_{k,l} = f$$

(по норме L^2). Следовательно, равенство (9) имеет место для произвольного базиса Θ пространства $\text{IF}(\Omega)$ с сопряженной системой Θ^* , если обе системы имеют вид (4) (при условии (5), (6)).

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [4] было доказано, что равенство (9) с $\Omega = \mathbb{R}^s$ имеет место, если Θ и Θ^* – системы вида (1) и если

- 1) Θ – безусловный базис в $L^2(\mathbb{R}^s)$ с сопряженной Θ^* , или
- 2) Θ – основная система с сопряженной Θ^* .

Напомним, что если

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^s} |\langle f, \theta_{k,l} \rangle|^2 \leq B\|f\|_2^2$$

для некоторых $A, B, 0 < A \leq B < \infty$, независимо от $f \in L^2(\mathbb{R}^s)$, то Θ называется *основной (frame) системой с границами A и B* .

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\Theta = \Theta^*$ и имеет место (5), то

$$B_0 := \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 U(f_m^{(t)}) dt = \text{ess sup}_{\xi \in \Omega} Q(\xi),$$

$$A_0 := \inf_{\|f\|_2 \leq 1} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 U(f_m^{(t)}) dt = \text{ess inf}_{\xi \in \Omega} Q(\xi).$$

СЛЕДСТВИЕ 4 (см. [5], [6]). Если Θ есть основная система с условием (5) и границами A, B , то

$$A \leq \text{ess inf}_{\xi \in \Omega} Q(\xi) \leq \text{ess sup}_{\xi \in \Omega} Q(\xi) \leq B.$$

С помощью теоремы 2 доказывается и следующая теорема, которую можно назвать теоремой Пифагора для ортогональных разложений пространств в L^2 .

ТЕОРЕМА 3. Пусть Ψ – ортонормированная система вида (2). Если функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^s)$ такова, что система $\{\varphi(\cdot - lb)\}_{l \in \mathbb{Z}^s}$ является ортонормированным базисом пространства $S(\Psi)$, то

$$b^{-s} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{-s} |\widehat{\psi}_k(\xi)|^2.$$

Аналогичная формула

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{2^s-1} |\widehat{\psi}^{\nu}(2^k \xi)|^2$$

для всплеск-систем, порожденных MRA, хорошо известна (см. [2]).

Следующая теорема показывает, что в некоторых случаях неполная всплеск-система может быть дополнена (ортогонально) второй всплеск-системой до полной в $L^2(\mathbb{R}^s)$ системы.

ТЕОРЕМА 4. Для произвольной неполной MRA с пространствами $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ существует дополнительная MRA с пространствами $\{V_k^c\}_{k \in \mathbb{Z}}$ такая, что

- 1) $V_{\infty}^c \perp V_{\infty}$, где $V_{\infty} := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k$, $V_{\infty}^c := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k^c$;
- 2) $V_{\infty}^c \oplus V_{\infty} = L^2(\mathbb{R}^s)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Meyer Y. Ondelettes et Opérateurs. I: Ondelettes. Paris: Hermann, 1990. 2. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992. 3. Lorentz R. A., Madych W. R., Sahakian A. A. Translation and dilation invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R})$ and multiresolution analyses // Appl. Comput. Harmon. Anal. 1997 (to appear). 4. Chui C. K., Shi X. // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 177. № 2. P. 608–626. 5. Chui C. K., Shi X. Inequalities on Matrix-Dilated Littlewood–Paley Energy Functions and Oversampled Affine Operators. Report № 337: Texas A&M Univ., CAT, 1994. 6. Chui C. K., Stöckler J., Ward J. D. Analytic wavelets generated by radial functions // Adv. Comput. Math. 1996. V. 5. № 1. P. 95–123.

Институт алгоритмов и научных вычислений (Sankt Augustin, Germany)

Институт математики НАН Армении

E-mail: `lorentz@gmd.de`, `sart@instmath.sci.am`

Поступило

02.09.97