Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Климов, Теоремы об устойчивости по первому приближению для дифференциальных включений, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 517–530

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:16:48

УДК 517.958

ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

В. С. Климов

Устанавливаются многозначные и бесконечномерные варианты теорем об устойчивости по первому приближению. Дифференциальные включения, рассматриваемые в качестве первого приближения, могут быть неавтономными, а в ряде изучаемых случаев и неоднородными по фазовому переменному. Намечены приложения к теории устойчивости решений параболических включений.

Библиография: 16 названий.

Ниже $\|x; E\|$ – норма элемента x в B -пространстве E , E^* – сопряженное к E пространство, (x, x^*) – значение функционала x^* из E^* на элементе $x \in E$, $\sigma(E, E^*)$ и $\sigma(E^*, E)$ – слабые топологии на E и E^* соответственно, порождаемые формой $(\cdot, \cdot)$;

$$s(x^*, \mathcal{D}) = \sup\{(x, x^*), x \in \mathcal{D}\}, \quad x^* \in E^*,$$

– опорная функция множества $\mathcal{D} \subset E$,

$$\theta_E(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \sup_{x_1 \in \mathcal{D}_1} \inf_{x_2 \in \mathcal{D}_2} \|x_1 - x_2; E\|$$

– уклонение множества $\mathcal{D}_1 \subset E$ от множества $\mathcal{D}_2 \subset E$; $L^p(J, E)$ (соответственно $C(J, E)$) – пространство измеримых по Лебегу–Бохнеру (соответственно непрерывных) на отрезке $J \subset \mathbb{R}$ функций со значениями в E , как обычно, эквивалентные функции отождествляются, нормы в $C(J, E)$ и $L^p(J, E)$ определяются стандартным образом (см., например, [1, гл. 4, § I]); $L_w^p(j, E)$ – топологическое пространство слабо измеримых на отрезке J функций со значениями в E , определяющая в $L_w^p(J, E)$ топологию система полунорм задается равенством

$$\|v\| = \|l(v); L^p(J)\|, \quad \text{где } l \in E^*, \quad L^p(J) = L^p(J, \mathbb{R});$$

все банаховы пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел; $C_V(E)$ означает совокупность непустых замкнутых и выпуклых подмножеств E ; $E_1 \times E_2$ – прямое произведение B -пространств E_1, E_2 ; если E_1, E_2 непрерывно вложены в локально выпуклое топологическое пространство E_0 , то с E_1, E_2 связаны B -пространства $E_1 \cap E_2$ и $E_1 + E_2$ (см. [2, гл. 1, § 5]); запись $E_1 \rightarrow E_2$ (соответственно $E_1 \xrightarrow{k} E_2$) означает, что E_1 непрерывно (соответственно компактно) вложено в E_2 .

Многозначное отображение (m -отображение) F множества $\mathcal{D}_1$ в множество $\mathcal{D}_2$ — это оператор, сопоставляющий каждой точке v из $\mathcal{D}_1$ непустое множество $F(v) \subset \mathcal{D}_2$, называемое *образом* точки v ; если $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1$, то $F(\mathcal{D}) = \bigcup_{v \in \mathcal{D}} F(v)$, $v \in \mathcal{D}$, — область значений отображения F на множестве $\mathcal{D}$. M -отображение $F: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ (где $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ — подмножества B -пространств E_1, E_2) называют *хеминепрерывным сверху* на $\mathcal{D}_1$ (см. [2, гл. 3, п. 2]), если для каждого x^* из E_2^* функция $v \rightarrow s(x^*, F(v))$ полунепрерывна сверху на $\mathcal{D}_1$. Если образы m -отображения $F: \mathcal{D} \rightarrow E$ принадлежат классу $\text{Cv}(E)$, то будем записывать следующим образом: $F: \mathcal{D} \rightarrow \text{Cv}(E)$.

1. Постановка задачи. Пусть V — рефлексивное сепарабельное B -пространство с нормой $\|\cdot\|$, V^* — сопряженное к нему пространство с нормой $\|\cdot\|_*$, H — гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$, $V \xrightarrow{k} H$ и V плотно в H . Пространство H отождествляется с сопряженным к нему H^* , а $H^* = H$ — с подпространством пространства V^* . Число (v, v^*) означает и скалярное произведение элементов v, v^* из H , и значение функционала v^* из V^* на элементе $v \in V$.

Сопоставим отрезку $J \subset \mathbb{R}$ банаховы пространства

$$Y = L^2(J, V) \cap L^\infty(J, H) \quad \text{и} \quad Z = L^2(J, V^*) + L^1(J, H).$$

Пространство Y можно идентифицировать с сопряженным к пространству Z (см. [1, гл. 4, § 1]). Билинейная форма, определяющая двойственность, задается равенством $\langle y, z \rangle = \int (y(t), z(t)) dt$. Если необходимо подчеркнуть зависимость пространств Y, Z от J , будем обозначать их символами $Y(J), Z(J)$.

Положим

$$W = \{y \mid y \in Y, y' \in Z\}.$$

Равенство $y' + z = 0$ означает, что

$$\langle y, \varphi'v \rangle = \langle \varphi v, z \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(J), \quad v \in V.$$

Пространство W вложено в $C(J, H)$; это позволяет ввести понятие значения функции из W в каждой точке отрезка J . Если $y \in W$, то функция $|y(t)|^2$ абсолютно непрерывна на J и справедлива формула [1], [3]

$$(|y(t)|^2)' = 2(y(t), y'(t)) \quad \text{п.в.}$$

Через Y_0 обозначим линейное пространство Y , наделенное слабейшей из топологий, мажорирующей топологии $\sigma(Y, Z)$ и $L_w^2(J, H)$. Пространство Y_0 непрерывно вложено в $L^2(J, H)$ (см. [4]).

Введем специальный класс m -отображений на пространстве $Y = Y(J)$, $J = [t_0, t_1]$. Обозначим через $\alpha_1(Y, Z)$ совокупность операторов $A: Y \rightarrow \text{Cv}(Z)$, удовлетворяющих условиям

- 1) оператор A усиленно ограничен в том смысле, что для каждого ограниченного множества $\mathcal{D} \subset Y$ множество $A(\mathcal{D})$ предкомпактно в топологии $\sigma(Z, Y)$;
- 2) для произвольных последовательностей $y_i \in Y$, $z_i \in A(y_i)$, обладающих свойствами

$$y_i \rightarrow y \text{ в } Y_0, \quad z_i \rightarrow z \text{ в } \sigma(Z, Y), \quad \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \langle y_i, z_i \rangle \leq \langle y, z \rangle,$$

имеет место включение $z \in A(y)$ и сходимостью

$$\langle 1_{[t_0, t]} y_i, z_i \rangle \rightarrow \langle 1_{[t_0, t]} y, z \rangle$$

в $C(J)$ (здесь $1_{[t_0, t]}$ – характеристическая функция отрезка $[t_0, t] \subset J$).

Второе условие созвучно требованию усиленной замкнутости [5] оператора A .

Многочисленный оператор $A: Y \rightarrow Z$ назовем *локальным*, если существует семейство операторов $\mathcal{A}(t): V \rightarrow V^*$ ($t \in J$), порождающее A в том смысле, что для любого y из Y множество $A(y)$ совпадает с множеством измеримых сечений t -отображения $t \rightarrow \mathcal{A}(t, y(t))$ (здесь и далее $\mathcal{A}(t, v) = \mathcal{A}(t)v$). Примеры локальных операторов класса $\alpha_1(Y, Z)$ приведены в [4], [6].

Пусть A – локальный оператор класса $\alpha_1(Y, Z)$, порождаемый семейством отображений

$$\mathcal{A}(t): V \rightarrow V^*, \quad t \in J = [t_0, t_1].$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$0 \in y' + \mathcal{A}(t, y). \quad (1)$$

Под его *решением* будем понимать функцию y класса W , для которой $-y' \in A(y)$. Задача Коши для включения (1) состоит в отыскании решения y , удовлетворяющего начальному условию

$$y(t_0) = h, \quad h \in H. \quad (2)$$

Ниже

$$\text{Gr } A = \{(y, z) \in Y \times Z, y \in Y, z \in A(y)\}$$

– график отображения $A: Y \rightarrow \text{Cv}(Z)$,

$$\theta_{Y \times Z}((x, g); \text{Gr } A) = \inf \{\|x - y; Y\| + \|g - z; Z\|, y \in Y, z \in A(y)\}$$

– расстояние в метрике $Y \times Z$ от (x, g) до графика отображения A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $x_n \in W$, $g_n = -x'_n$, $x_n \rightarrow x$ в $\sigma(Y, Z)$,

$$\theta_{Y \times Z}((x_n, g_n); \text{Gr } A) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда

- 1) x есть решение включения (1) и $(t - t_0)x_n \rightarrow (t - t_0)x$ в $C(J, H)$;
- 2) если $x_n(t_0) \rightarrow h$ в метрике H , то x есть решение задачи Коши (1), (2) и $x_n \rightarrow x$ в $C(J, H)$.

Предложение 1 есть вариант леммы 1 работы [7].

Далее включение (1) изучается в случае, когда t изменяется на луче $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Введем пространство $M_p(\mathbb{R}_+, E)$, ограниченных по Степанову функций на $\mathbb{R}_+$ со значениями в B -пространстве E . Оно состоит из измеримых по Лебегу–Бохнеру функций $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow E$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|f; M_p\| = \sup\{\|f; L^p(I, E)\|\},$$

где $\sup$ берется по всем отрезкам $I \subset \mathbb{R}_+$ единичной длины. Полагаем $M_p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = M_p(\mathbb{R}_+)$.

Будем писать $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_*(\mathbb{R}_+, V)$, если операторы $\mathcal{A}(t): V \rightarrow V^*$, $t \in \mathbb{R}_+$, допускают представление

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_1(t) + \mathcal{A}_2(t),$$

где $\mathcal{A}_1(t)$, $\mathcal{A}_2(t)$ удовлетворяют условиям

- c₁) почти при всех t отображения $\mathcal{A}_1(t): V \rightarrow \text{Cv}(V^*)$, $\mathcal{A}_2(t): V \rightarrow \text{Cv}(H)$ хеминепрерывны сверху;
- c₂) существуют однозначные отображения $a_i(t, v) \subset A_i(t, v)$, $i = 1, 2$, измеримые по t при каждом v из V ;
- c₃) для каждого $R > 0$ справедливы неравенства

$$\|v_1^*\|_* \leq k\|v\| + \gamma_1(t), \quad |v_2^*| \leq \gamma_2(t),$$

в которых $|v| \leq R$, $v_i^* \in \mathcal{A}_i(t | v)$, $i = 1, 2$; константа $k > 0$ и функции $\gamma_1 \in M_2(\mathbb{R}_+)$, $\gamma_2 \in M_1(\mathbb{R}_+)$ могут зависеть от R .

Предположение $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_*(\mathbb{R}_+, V)$ влечет суперпозиционную измеримость отображения $\mathcal{A}$: множество $A(y)$ измеримых сечений отображения $t \rightarrow \mathcal{A}(t, y(t))$ непусто для каждого измеримого отображения $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow V$; сужение A на пространство $Y(J)$, где $J = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}_+$, есть отображение со значениями в $\text{Cv}(Z(J))$; условие c₃) влечет усиленную ограниченность оператора A [4]. В случае конечномерного пространства V отображение A принадлежит классу $\alpha_1(Y(J), Z(J))$ для любого отрезка $J \subset \mathbb{R}_+$. В бесконечномерном пространстве V аналогичный факт верен при определенных дополнительных предположениях. Полезным оказывается следующее

УСЛОВИЕ I. Существует такая неотрицательная функция λ класса $M_1(\mathbb{R}_+)$, что

$$(v_1 - v_2, v_1^* - v_2^*) \geq -\lambda(t)|v_1 - v_2|^2, \quad v_j \in V, \quad v_j^* \in \mathcal{A}(t, v_j), \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Неравенство (3) есть одностороннее условие Липшица для m -отображения $\mathcal{A}(t): V \rightarrow V^*$. Оно заведомо выполняется в случае монотонного отображения $\mathcal{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [4]. Пусть $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_*(\mathbb{R}_+, V)$ и выполнено условие I. Тогда порождаемый $\mathcal{A}$ оператор суперпозиции A принадлежит классу $\alpha_1(Y(J), Z(J))$ для любого отрезка $J \subset \mathbb{R}_+$.

Более широкие условия на m -отображение $\mathcal{A}: \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow V^*$, гарантирующие включение $A \in \alpha_1(Y(J), Z(J))$, можно найти в [4], [6]. Близкое к условию I условие полуграниченности вариации однозначного отображения широко применяется в [8].

Если $0 \in \mathcal{A}(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}_+$, то функция $y_0(t) \equiv 0$ есть решение включения (1). Назовем нулевое решение *асимптотически устойчивым*, если

- 1) для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x(t)$ включения (1) с $|x(0)| < \delta$ существует при $t \geq 0$ и удовлетворяет неравенству $|x(t)| < \varepsilon$, $t \in \mathbb{R}_+$;
- 2) $|x(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Нулевое решение назовем *экспоненциально устойчивым в малом*, если можно указать такое $\varepsilon > 0$, что любое решение $x(t)$ включения (1) при $|x(t_0)| < \varepsilon$, $t \geq t_0$ удовлетворяет неравенству

$$|x(t)| \leq B|x(t_0)|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (4)$$

где постоянные $\alpha > 0$, $B \geq 1$ не зависят от t_0 .

Приведенные определения близки к принятым в [9], [10]. Известны и другие определения устойчивости тривиального решения, вообще говоря, не эквивалентные приведенным выше.

Введем рассмотрение семейство m -отображений

$$\mathcal{A}_\rho: \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow V^*,$$

полагая

$$\mathcal{A}_\rho(t, v) = \mathcal{A}(t, v) + \rho\|v\|\mathbb{B}_{V^*},$$

где $\rho \geq 0$, $t \geq 0$, $v \in V$, $\mathbb{B}_{V^*} = \{v^* \in V^*, \|v^*\|_* \leq 1\}$. M -отображение $\mathcal{A}_\rho$ при любом $\rho \geq 0$ принадлежит классу $\mathcal{C}_*(\mathbb{R}_+, V)$. Если $0 \in \mathcal{A}(t, 0)$, $t \geq 0$, то $0 \in \mathcal{A}_\rho(t, 0)$, $t \geq 0$, $\rho \geq 0$, поэтому дифференциальное включение

$$0 \in y' + \mathcal{A}_\rho(t, y) \quad (5)$$

имеет нулевое решение. Далее формулируются предположения относительно m -отображения $\mathcal{A}$, при которых устойчивость (в некотором смысле) тривиального решения включения (1) влечет экспоненциальную устойчивость в малом нулевого решения включения (5) (при $0 \leq \rho < \rho_0$, $\rho_0 > 0$). Утверждения такого рода называют *теоремами об устойчивости по первому приближению*; подобные теоремы хорошо известны для дифференциальных уравнений. Ниже соответствующие результаты переносятся на некоторые классы дифференциальных включений в B -пространстве.

2. Теоремы об устойчивости по первому приближению. В этом пункте

$$\mathcal{A} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{R}_+, V), \quad 0 \in \mathcal{A}(t, 0), \quad t \geq 0.$$

Будет использоваться следующий вариант условия эллиптичности.

УСЛОВИЕ II. Существует функция γ_0 класса $M_1(\mathbb{R}_+)$ и константа $k_1 > 0$ такие, что

$$(v, v^*) + \gamma_0(t)|v|^2 \geq k_1\|v\|^2, \quad (6)$$

где $v \in V$, $v^* \in \mathcal{A}(t, v)$, $t \geq 0$.

Если выполнено условие II и порождаемый $\mathcal{A}$ оператор суперпозиции A принадлежит классу $\alpha_1(Y(J), Z(J))$ для любого отрезка $J \subset \mathbb{R}$, то задача Коши (1), (2) имеет решение $x(t)$, определенное при всех $t \geq t_0$ [4]. Единственность решения задачи Коши (1), (2) при этом не гарантируется. Если $x(t)$ – решение включения (1), то из (6) вытекает дифференциальное неравенство

$$\frac{1}{2}(|x(t)|^2)' + k_1 \|x(t)\|^2 \leq \gamma_0(t) |x(t)|^2,$$

стандартным образом приводящее к оценкам

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| \exp \int_{t_0}^t \gamma_0(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \|x(t)\|^2 dt \leq k^2(T) |x(t_0)|^2. \quad (8)$$

Полезно заметить, что оценка (7) сохраняется и в случае, когда (6) справедливо с $k_1 = 0$. Постоянная $k(T) > 0$ в (8) зависит лишь от T и постоянной $k_1 > 0$ в неравенстве (6).

При достаточно малом $\rho > 0$ неравенство (6) сохраняется для отображений $\mathcal{A}_\rho(t)$. Именно, при $0 \leq \rho < k_1$ справедливо вытекающее из (6) неравенство $(v, v^*) + \gamma_0(t) |v|^2 \geq (k_1 - \rho) \|v\|^2$, где $v \in V$, $v^* \in \mathcal{A}_\rho(t, v)$. Это неравенство аналогично (6), поэтому для решения $y(t)$ включения (5) имеют место оценки

$$|y(t)| \leq |y(t_0)| \exp \int_{t_0}^t \gamma_0(\tau) d\tau, \quad \exp \int_{t_0}^{t_0+T} \|y(t)\|^2 d\tau \leq \kappa^2(T) |y(t_0)|^2, \quad (9)$$

постоянная $\kappa(T) > 0$ в (9) зависит лишь от T и $k_1 - \rho > 0$.

Если m -отображение $\mathcal{A}$ в (9) удовлетворяет одностороннему условию Липшица I, то решение задачи Коши (1), (2) единственно. В этом случае можно оценить разницу между решениями включений (1), (5), удовлетворяющих одинаковым начальным условиям что позволяет получить условия устойчивости нулевого решения включения (5).

ТЕОРЕМА 1. Пусть m -отображение $\mathcal{A}$ класса $\mathcal{C}_*(\mathbb{R}_+, V)$ удовлетворяет условиям I, II и нулевое решение включения (1) экспоненциально устойчиво в малом. Тогда найдется такое $\rho_0 > 0$, что при $\rho \in (0, \rho_0)$ тривиальное решение включения (5) также будет экспоненциально устойчивым в малом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \rho < k_1$, y – решение включения (5), x – решение включения (1) и $x(t_0) = y(t_0)$ при некотором $t_0 \geq 0$. Справедливы равенства $0 = x' + w$, $0 = y' + z + \xi$, где w, z, ξ – измеримые функции, $w(t) \in \mathcal{A}(t, x(t))$, $z(t) \in \mathcal{A}(t, y(t))$ и $\|\xi(t)\|_* \leq \rho \|y(t)\|$ п.в. Из условия I получаем последовательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|y - x|^2)' &= (y - x, w - z - \xi) \leq \lambda |y - x|^2 - (y - x, \xi) \\ &\leq \lambda |y - x|^2 + \rho \|y - x\| \|y\| \leq \lambda |y - x|^2 + \frac{\rho}{2} (\|y - x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Установленное дифференциальное неравенство и условие $x(t_0) = y(t_0)$ приводят при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ к оценке

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)|^2 &\leq \rho \int_{t_0}^t \exp\left(2 \int_{\tau}^t \lambda(s) ds\right) (\|y(\tau) - x(\tau)\|^2 + \|y(\tau)\|^2) d\tau \\ &\leq \rho T \exp\left(2 \int_{t_0}^{t_0+T} \lambda(s) ds\right) \int_{t_0}^{t_0+T} (\|y(\tau) - x(\tau)\|^2 + \|y(\tau)\|^2) d\tau. \end{aligned}$$

Объединяя последнее неравенство с (9), (11), приходим к оценке

$$|y(t) - x(t)| \leq \sqrt{\rho\mu}(T)|x(t_0)|, \quad (10)$$

постоянная $\mu(\cdot)$ зависит от T и $\|\lambda; M_1\|$.

В предшествующих рассуждениях не использовалась экспоненциальная устойчивость в малом нулевого решения включения (1). Пусть теперь для решений $x(t)$ включения (1) справедливо неравенство (4), если только $|x(t_0)| < \varepsilon$. Положим $T = \ln(4B/\alpha)$. Если только $0 < \rho < k_1$ и $\sqrt{\rho\mu}(T) < 1/4$, то для пары решений $x(t)$, $y(t)$ включений (1), (5) соответственно, совпадающих при $t = t_0$, справедливо вытекающее из (10) неравенство

$$|y(t) - x(t)| \leq \frac{1}{4}|x(t_0)|, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

влекущее [9, с. 191–193] экспоненциальную устойчивость в малом нулевого решения включения (5). Теорема доказана.

Отметим новые моменты, отличающие теорему 1 от аналогичных результатов в [9]:

- 1) отображение $\mathcal{A}(t)$ многозначно и действует не в одном пространстве, а из пространства V в сопряженное к нему пространство V^* ;
- 2) предполагаемое в [9] условие Липшица заменено его односторонним вариантом.

Проверка экспоненциальной устойчивости нулевого решения включения (1) существенно упрощается, если выполнено

УСЛОВИЕ III. Имеет место равенство $\mathcal{A}(t, cv) = c\mathcal{A}(t, v)$, $t \geq 0$, $v \in V$, $c > 0$.

Условие III означает 1-однородность m -отображения $\mathcal{A}$ по фазовому переменному. Из 1-однородности $\mathcal{A}$ вытекает инвариантность множества решений включения (1) относительно гомотетий: если $x(t)$ – решение включения (1), то функция $cx(t)$, $c \geq 0$, также есть решение этого включения. Экспоненциальная устойчивость нулевого решения в малом влечет справедливость оценки (4) для любого начального значения $x(t_0)$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнено условие III и существуют такие положительные числа T , K и $q < 1$, что для любого решения x включения (1) верны оценки

$$\max\{|x(t)|, t_0 \leq t \leq t_0 + T\} \leq K|x(t_0)|, \quad (11)$$

$$\min\{|x(t)|, t_0 \leq t \leq t_0 + T\} \leq q|x(t_0)|. \quad (12)$$

Тогда для любого решения x включения (1) справедлива оценка (4), в которой $B = K/q$, $\alpha = (1/T) \ln(1/q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду инвариантности множества решений включения (1) относительно гомотетий достаточно доказать оценку (4) в случае $|x(t_0)| = 1$. Из (11) следует неравенство $|x(t)| \leq K, t_0 \leq t \leq t_0 + T$; оценка (12) влечет существование числа $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$, для которого $|x(t_1)| = q$. Положим $c_i = q^i, i = 1, 2, \dots$. Установим существование последовательности $t_i, i = 1, 2, \dots$, обладающей свойствами

$$|x(t)| \leq Kq^{i-1}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad |x(t_i)| = c_i, \quad 0 < t_{i+1} - t_i < T. \quad (13)$$

Существование t_1 уже установлено. Если известно t_i , то для построения t_{i+1} введем функцию $u(t) = x(t)/c_i$. Она является решением включения (1). Очевидно, что $|u(t_i)| = 1$. Заменяя в (11), (12) t_0 числом t_i , получаем, что $|u(t)| \leq K, t_i \leq t \leq t_i + T$ и $|u(t_{i+1})| = q$ для некоторого t_{i+1} из $[t_i, t_i + T]$. Число t_{i+1} является искомым; тем самым, последовательность t_i определена при всех i .

Оценка (13) влечет неравенство $|x(t)| \leq Kq^{i-1}$, если $t - t_0 \geq (i-1)T, i = 1, 2, \dots$. В частности, если $(i-1)T \leq t - t_0 \leq iT$, то

$$i \geq \frac{t - t_0}{T} \quad \text{и} \quad |x(t)| \leq \frac{K}{q} q^i \leq \frac{K}{q} q^{(t-t_0)/T} = Be^{-\alpha(t-t_0)}$$

с $B = K/q, \alpha = (1/T) \ln(1/q) > 0$. Лемма доказана.

Очевидно, что оценка (4) влечет оценки (11), (12) с подходящими T, K, q . Таким образом, в случае 1-однородного отображения $\mathcal{A}$ оценки (11), (12) и (4) эквивалентны. Отметим, что при доказательстве леммы 1 условия I, II не использовались. В силу (7) неравенство (6) с $k_1 = 0$ влечет неравенство (11) с постоянной K , зависящей от $\|\gamma_0; M_1\|$.

ЛЕММА 2. Пусть m -отображение $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию III и неравенству (6) с $k_1 = 0$. Если при некотором $T > 0$

$$\sup_{t_0 \geq 0} \int_{t_0}^{t_0+T} \gamma_0(t) dt < 0,$$

то нулевое решение включений (1) экспоненциально устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из леммы 1 и оценки (7).

Наряду с дифференциальным включением (1) рассмотрим дифференциальное включение вида

$$0 \in y' + \mathcal{F}(t, y), \quad (14)$$

где $\mathcal{F}$ – отображение класса $\mathcal{C}_*(\mathbb{R}_+, V)$. Если $0 \in \mathcal{F}(t, 0), t \in \mathbb{R}_+$, то включение (14) имеет нулевое решение. Как и в п. 1, определяются асимптотическая устойчивость и экспоненциальная устойчивость в малом нулевого решения включения (14). Если m -отображения $\mathcal{F}, \mathcal{A}: \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow V^*$ в определенном смысле близки, то устойчивость тривиального решения включения (14) может быть выведена из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть отображение $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Пусть $\mathcal{F} \in \mathbb{C}_*(\mathbb{R}_+, V)$ и справедлива оценка

$$\theta_{V^*}(\mathcal{F}(t, v), \mathcal{A}(t, v)) \leq \psi(|v|)\|v\|, \quad (15)$$

где $t \geq 0$, $v \in V$, $|v| \leq R$, $R > 0$, $\psi: [0, R] \rightarrow \mathbb{R}_+$ – возрастающая функция, причем $\psi(+0) < \rho_0$, ρ_0 – положительная постоянная, фигурирующая в теореме 1. Тогда нулевое решение включения (14) экспоненциально устойчиво в малом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем ρ из $(\psi(+0), \rho_0)$ и число $\eta > 0$ так, что $\psi(s) < \rho$ при $s < \eta$. Поскольку $\rho < \rho_0$, то в силу теоремы 1 нулевое решение включения (5) экспоненциально устойчиво в малом. Следовательно, найдется такое $\varepsilon > 0$, что для решений x включения (5) с $|x(t_0)| < \varepsilon$ верна оценка (4). Если $\delta > 0$ и $B\delta < \min(\eta, \varepsilon)$, то для решений $x(t)$ включения (5) с $|x(t_0)| < \delta$ справедливо неравенство

$$|x(t)| \leq B|x(t_0)| \exp(-\alpha(t - t_0)) < B\delta < \eta, \quad t \geq t_0.$$

В этом случае $\psi(|x(t)|) < \rho$ и $\mathcal{F}(t, x(t)) \subset \mathcal{A}_\rho(t, x(t))$. Проведенное рассуждение означает, что для всех решений x включения (14) с $|x(t_0)| < \delta$ имеет место оценка (4), т.е. нулевое решение включения (14) экспоненциально устойчиво в малом. Теорема доказана.

Теоремы 1, 2 можно рассматривать как многозначные варианты теорем об устойчивости по первому приближению. Условие $\psi(+0) < \rho_0$ в теореме 2 заведомо выполняется, если $\psi(+0) = 0$. Этот частный случай удобен для проверки, так как не требует знания постоянной ρ_0 из теоремы 1.

3. Замечания и примеры. Предшествующие результаты могут быть распространены на случай, когда отображения $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\rho$, $\mathcal{F}$ определены на цилиндре $\mathbb{R}_+ \times \{v \in V, |v| \leq R\}$ с некоторым $R > 0$. Это замечание существенно, например, при проверке условий I, II. Одностороннее условие Липшица, естественное для параболических включений, в ряде ситуаций оказывается слишком жестким. Заменим условие I следующим менее обременительным предположением.

УСЛОВИЕ IV. Порождаемый $\mathcal{A}$ оператор суперпозиции A принадлежит классу $\alpha_1(Y(J), Z(J))$ для любого отрезка $J \subset \mathbb{R}_+$.

Введем еще одно определение. M -отображение $\mathcal{A}: \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow V^*$ назовем ω -периодическим, $\omega > 0$, если

$$\mathcal{A}(t + \omega, v) = \mathcal{A}(t, v), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad v \in V.$$

Из условия ω -периодичности $\mathcal{A}$ следует инвариантность множества решений включения (1) относительно сдвига аргумента на ω : если $x(t)$ – решение включения (1), то $x(t + \omega)$ – также есть решение включения (1).

ТЕОРЕМА 3. Пусть ω -периодическое m -отображение $\mathcal{A}$ класса $\mathbb{C}_*(\mathbb{R}_+, V)$ удовлетворяет условиям II–IV и нулевое решение включения (1) асимптотически устойчиво. Тогда справедливо заключение теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО удобно разбить на ряд этапов. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество решений x включения (1) с $|x(0)| \leq 1$. В силу асимптотической устойчивости нулевого решения включения (1) функции класса $\mathcal{R}$ равномерно ограничены в пространстве H .

Положим

$$\eta_n = \sup\{|x(n\omega)|, x \in \mathcal{R}\}.$$

На первом этапе докажем, что $\eta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В предположении противного найдутся такое $\eta > 0$ и такие функции x_n из $\mathcal{R}$, что $|x_n(n\omega)| \geq \eta$ для бесконечного множества $\mathbb{N}_0$ индексов n . Фиксируем $\mu > 0$ так, что для решений y включения (1), удовлетворяющих неравенству $|y(0)| < \mu$, выполнялась оценка $|y(t)| < \eta$. Тогда для всех x_n , $n \in \mathbb{N}_0$, справедливы соотношения

$$\mu \leq |x_n(i\omega)| \quad \text{при } i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Действительно, если бы $|x_n(t^*)| < \mu$ при $t^* = i\omega$, то для решения $y(t) = x_n(t + t^*)$ включения (1) имели место неравенства $|y(0)| < \mu$, $|y(n\omega - t^*)| = |x_n(n\omega)| \geq \eta$, что противоречит выбору числа μ .

Из оценки (8) следует ограниченность последовательности x_n в пространстве $Y(J)$ для каждого отрезка $J = [0, b]$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность x_n , $n \in \mathbb{N}_0$, сходится в $\sigma(Y(J), Z(J))$ к некоторой функции x . Согласно предложению 1 x есть решение включения (1) и $tx_n \rightarrow tx$ в $C(J, H)$. Для предельной функции x верны оценки $|x(i\omega)| \geq \mu$, $i = 1, 2, \dots$. Это противоречит асимптотической устойчивости нулевого решения включения (1). Итак, $\eta_n \rightarrow 0$, что завершает первый этап доказательства.

Пусть

$$K_0 = \sup_{t_0 \geq 0} \exp \left(\int_{t_0}^{t_0+\omega} \gamma_0(t) dt \right),$$

$q_0 > 0$ и $q_0 K_0 < 1$. В силу доказанного выше найдется такое число m , что $\eta_m < q_0$. Фиксируем положительное число ε так, что $(q_0 + \varepsilon)K_0 < 1$. На втором этапе докажем существование такого $\rho_0 > 0$, что для решений y включения (5) с $|y(0)| \leq 1$, $0 < \rho < \rho_0$ выполняется оценка $|y(m\omega)| < q_0 + \varepsilon$.

В предположении противного можно считать, что существует последовательность y_n , $n = 1, 2, \dots$, решений включения (5) при $\rho = \rho_n$, $\rho_n > 0$, $\rho_n \rightarrow 0$, для которой $|y_n(0)| \leq 1$, но $|y_n(m\omega)| \geq q_0 + \varepsilon$. Последовательность y_n в силу оценки (9) ограничена в пространствах $C(J, H)$, $Y(J)$, где $J = [0, m\omega]$. Без ограничения общности можно считать, что $y_n \rightarrow y$ в $\sigma(Y(J), Z(J))$. В силу предложения 1 y есть решение включения (1) и $ty_n \rightarrow ty$ в $C(J, H)$. В частности, $|y_n(m\omega)| \rightarrow |y(m\omega)|$, а так как $|y_n(m\omega)| \geq q_0 + \varepsilon$, то $|y(m\omega)| \geq q_0 + \varepsilon$. Из оценки (9) вытекает неравенство

$$|y_n(t)| \leq \exp \Gamma_0(t), \quad \Gamma'_0 = \gamma_0, \quad \Gamma_0(0) = 0,$$

сохраняющееся и для предельной функции y . Следовательно, $y \in \mathcal{R}$; в таком случае $|y(m\omega)| \leq \eta_m < q_0$. Полученное противоречие завершает второй этап доказательства.

Фиксируем ρ из $(0, \rho_0)$, $\rho < k_1$. Если x – решение включения (5), то в силу выбора ρ справедлива оценка $|x((n+m)\omega)| \leq (q_0 + \varepsilon)|x(n\omega)|$ для любого натурального числа n . Пусть $t_0 \geq 0$, $q = (q_0 + \varepsilon)K_0 < 1$. Фиксируем натуральное число n так, что

$(n-1)\omega \leq t_0 \leq n\omega$. Из оценки (9) следует неравенство $|x(n\omega)| \leq K_0|x(t_0)|$. Объединяя установленные оценки, приходим к соотношению

$$|x((n+m)\omega)| \leq (q_0 + \varepsilon)|x(n\omega)| \leq K_0(q_0 + \varepsilon)|x(t_0)| \leq q|x(t_0)|. \quad (16)$$

Так как $(n+m)\omega - t_0 \leq (m+1)\omega$, то (16) влечет (12) с $T = (m+1)\omega$. Теперь экспоненциальная устойчивость нулевого решения включения (5) следует из леммы 1. Теорема доказана.

Из теоремы 3 следует экспоненциальная устойчивость в малом тривиального решения включения (14), если m -отображение $\mathcal{F}$ близко к m -отображению $\mathcal{A}$; достаточно, например, чтобы имела место оценка (15). При этом m -отображение $\mathcal{F}$ может и не быть ω -периодическим. Для конечномерных дифференциальных включений аналогичный теореме 3 результат установлен в [11]. В более ранних работах рассматривались автономные дифференциальные включения (см., например, [12] и приведенную там литературу).

Рассмотрим пример иллюстративного характера. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\dot{W}_2^1(\Omega)$ – пространство Соболева [13, гл. 1] функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$ области Ω . Норма в пространстве $V = \dot{W}_2^1(\Omega)$ определена равенством $\|u\| = \|\nabla u; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)\|$; здесь и далее

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)_{V^*}$$

– градиент функции u . Сопряженное к V пространство состоит из функционалов l , допускающих представление

$$l(u) = \int_{\Omega} f(x) \cdot \nabla u(x) dx,$$

где $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\xi \cdot \xi^*$ – скалярное произведение векторов ξ и ξ^* из $\mathbb{R}^n$. Пространство V компактно и плотно вложено в пространство $H = L^2(\Omega)$ с нормой $|u| = \|u; L^2(\Omega)\|$. Пара пространств V, H однозначно определяет соответствующие им пространства Y, Z, W на отрезке $J \subset \mathbb{R}$. В частности, $Y = L^2(J, \dot{W}_2^1(\Omega)) \cap L^\infty(J, L^2(\Omega))$; Y можно интерпретировать как пространство функций на цилиндре $Q = \Omega \times J$. Совершенно аналогично, с каждой функцией $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ можно связать функцию $y(x, t)$, определенную на цилиндре $Q_+ = \Omega \times \mathbb{R}_+$. Ниже используется обозначение

$$\nabla_x y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right).$$

Через $K_v(\mathbb{R}^n)$ обозначается совокупность непустых выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$; $|\xi| = \sqrt{\xi \cdot \xi}$ – евклидова норма элемента ξ из $\mathbb{R}^n$.

Перейдем теперь к определению многозначных отображений на пространствах V, Y . Напомним, что m -отображение Γ из топологического пространства $\mathcal{M}$ в B -пространство E называют *полунепрерывным свертку*, если для любого открытого множества $G \subset E$ его малый прообраз

$$\Gamma_+^{-1}(G) = \{v \in \mathcal{M}, \Gamma(v) \subset G\}$$

есть открытое подмножество $\mathcal{M}$ [2], [14]. Обозначим через $\mathcal{U}(Q_+, \mathbb{R}^n)$ совокупность m -отображений $a: Q_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям

- $a_1)$ при любом ξ из $\mathbb{R}^n$ отображение $a(\cdot, \xi): Q_+ \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ имеет измеримое сечение, при всех (x, t) из Q_+ отображение $a(x, t, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху;
- $a_2)$ $a(x, t, c\xi) = ca(x, t, \xi)$, $(x, t) \in Q_+$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $c > 0$;
- $a_3)$ справедливы неравенства

$$(\xi_1 - \xi_2) \cdot (\xi_1^* - \xi_2^*) \geq 0, \quad \kappa_1 |\xi|^2 \leq \xi \cdot \xi^*, \quad |\xi^*| \leq \kappa_2 |\xi|,$$

в которых $\xi_i \in \mathbb{R}^n$, $\xi_i^* \in a(x, t, \xi_i)$, κ_i – положительные постоянные ($i = 1, 2$; постоянные κ_1, κ_2 могут быть различными для разных отображений), $\xi \subset \mathbb{R}^n$, $\xi^* \in a(x, t, \xi)$.

Условие $a_1)$ можно рассматривать как многозначный аналог условия Каратеодори; в близкой форме оно использовалось в [15, с. 81]. Условие $a_2)$ означает 1-однородность отображения a по ξ . Первое из неравенств в условии $a_3)$ означает монотонность отображения $a(x, t, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$; два последних представляют собою оценки роста a . Условия $a_1)$ – $a_3)$ выполнены, например, если m -отображение a имеет вид $a(x, t, \xi) = \partial\Psi(\xi)$, где $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклая 2-однородная функция, $\Psi(\xi) > 0$ для $\xi \neq 0$, $\partial\Psi(\xi)$ – субдифференциал функции Ψ в точке ξ [2, гл. 1, п. 1]; в частности, можно положить $\Psi(\xi) = \|\xi\|^2$ ($\|\cdot\|$ – произвольная норма в $\mathbb{R}^n$).

Пусть $b: Q_+ \rightarrow \mathbb{R}$ – функция класса $M_1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega))$. Определим m -отображение $\mathcal{A}: \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow V^*$ равенством

$$\mathcal{A}(t, v) = -\text{div } a(\cdot, t, \nabla v) + b(\cdot, t)v.$$

Более точно, функционал v^* на пространстве V принадлежит $\mathcal{A}(t, v)$, если существует такое измеримое сечение f отображения $\Gamma(x) = a(x, t, \nabla v(x))$, что

$$(w, v^*) = \int_{\Omega} (f \cdot \nabla w + b(\cdot, t)w) dx \quad \forall w \in V.$$

В силу результатов работ [4], [6] отображение $\mathcal{A}$ принадлежит классу $\mathbb{C}_*(\mathbb{R}_+, V)$. Если $v_j \in V$, $v_j^* \in \mathcal{A}(y, v_j)$, $j = 1, 2$, $t \in \mathbb{R}_+$, то из монотонности отображения $a(x, t, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ следует оценка

$$(v_1 - v_2, v_1^* - v_2^*) \geq \int_{\Omega} b(\cdot, t) |v_1 - v_2|^2 dx. \quad (17)$$

Так как $b \in M_1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega))$, то оценка (17) влечет выполнение условия I с функцией $\lambda(t) = -\|b(\cdot, t); L^\infty(\Omega)\|$ класса $M_1(\mathbb{R}_+)$. Для отображения $\mathcal{A}: \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow V^*$ выполнено условие II. Это без труда вытекает из неравенства $\xi \cdot \xi^* \geq \kappa_1 |\xi|^2$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi^* \in a(x, t, \xi)$) и включения $b \in M_1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega))$. Наконец, условие III есть очевидное следствие 1-однородности отображения $a(x, t, \cdot)$.

Поскольку $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_*(\mathbb{R}_+, V)$ и выполнено условие I, то порождаемый $\mathcal{A}$ оператор суперпозиции A принадлежит классу $\alpha_1(Y(J), Z(J))$ для любого отрезка $J \subset \mathbb{R}_+$. В

рассматриваемом случае решения задачи Коши (1), (2) совпадают с обобщенными решениями начально-краевой задачи

$$0 \in \frac{\partial y}{\partial t} - \operatorname{div}(a(\cdot, t, \nabla_x y)) + b(\cdot, t)y, \quad (18)$$

$$y(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad y(\cdot, t_0) = h. \quad (19)$$

Для однозначного отображения a данное определение решения совпадает с принятым в теории параболических уравнений (см., например, [1], [8], [13]). Задача Коши (18), (19) имеет единственное решение y при любых $t_0 \geq 0$, $h \in L^2(\Omega)$.

Для исследования устойчивости нулевого решения этой задачи можно использовать предшествующие результаты. Приведем пример применения леммы 2. В изучаемом случае отображение $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию III. Справедливо вытекающее из условия a_3) неравенство

$$(v, v^*) \geq \int_{\Omega} (\kappa_1 |\nabla v|^2 + b(\cdot, t)v^2) dx, \quad (20)$$

где $v \in V$, $v^* \in \mathcal{A}(t, v)$, $t \geq 0$. Обозначим через $\lambda_1(t)$ первое собственное значение задачи

$$-\kappa_1 \Delta u + b(\cdot, t)u = \lambda u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Так как $b \in M_1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega))$, то $\lambda_1 \in M_1(\mathbb{R}_+)$. Из определения функции $\lambda_1(t)$ вытекает оценка

$$\int_{\Omega} (\kappa_1 |\nabla v|^2 + b(\cdot, t)v^2) dx \geq \lambda_1(t) \int_{\Omega} v^2 dx, \quad v \in V. \quad (21)$$

Неравенства (20), (21) означают, что отображение $\mathcal{A}$ удовлетворяет неравенству (6) с $k_1 = 0$, $\gamma_0(t) = -\lambda_1(t)$. В силу леммы 2 нулевое решение включения (18) экспоненциально устойчиво, если при некотором $T > 0$

$$\inf_{t_0 \geq 0} \int_{t_0}^{t_0+T} \lambda_1(t) dt > 0.$$

Наряду с включением (18) рассмотрим его возмущение – включение

$$0 \in \frac{\partial y}{\partial t} - \operatorname{div}(a(\cdot, t, \nabla_x y)) + b(\cdot, t)y + g(\cdot, t, y), \quad (22)$$

где функция $g: Q_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори [16, гл. 5] и неравенству $|g(x, t, \eta)| \leq \operatorname{const} |\eta|^r$, $1 \leq r < 1 + 4/n$. Определяемый равенством $\mathcal{G}(t)v = g(\cdot, t, v)$ оператор суперпозиции действует и непрерывен из пространства V в сопряженное к нему пространство V^* . Справедлива оценка

$$\|\mathcal{G}(t)v; V^*\| \leq \kappa \|v\| |v|^{r-1}, \quad v \in V, \quad (23)$$

с некоторой постоянной $\kappa > 0$. Для доказательства (23) достаточно воспользоваться мультипликативным неравенством [13, с. 79]

$$\|v; L^{rp}\| \leq \operatorname{const} \|v\|^{1/r} |v|^{1-1/r},$$

где $p \in (1, \infty)$ и таково, что $L^p(\Omega) \rightarrow V^*$; возможность подобного выбора p вытекает из теорем вложения и неравенства $1 < r < 1 + 4/n$.

Положим $\mathcal{F}(t, v) = \mathcal{A}(t, v) + \mathcal{G}(t, v)$. Оценка (23) влечет неравенство (17) с $\psi(t) = \kappa|t|^{r-1}$. В данном случае $\psi(+0) = 0$, поэтому применима теорема 2, в соответствии с которой нулевое решение включения (22) экспоненциально устойчиво в малом, если аналогичным свойством обладает нулевое решение включения (18).

Развитая выше схема применима, разумеется, и к более общим, чем (22), параболическим включениям. Дополнительная библиография, относящаяся к затронутым выше вопросам, может быть найдена в [8]–[16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гаевский Г., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
- [2] Обен Ж. П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
- [3] Климов В. С. К задаче о периодических решениях операторных дифференциальных включений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 2. С. 309–327.
- [4] Климов В. С. Эволюционные параболические неравенства с многозначными операторами // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 8. С. 37–54.
- [5] Похожаев С. И. О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами // Функцион. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 3. С. 48–55.
- [6] Климов В. С. Об операторе сдвига по траекториям параболических включений // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1716–1721.
- [7] Климов В. С. Ограниченные решения дифференциальных включений с однородной главной частью // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 4. С. 109–130.
- [8] Дубинский Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Современные проблемы математики. 1976. Т. 9. С. 5–130.
- [9] Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
- [10] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
- [11] Морозов М. В. О свойствах периодических дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 612–617.
- [12] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- [13] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [14] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // УМН. 1960. Т. 35. № 1. С. 59–126.
- [15] Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986.
- [16] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.