Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Печенцов, А. Ю. Попов, Асимптотическое поведение спектральных функций дифференциальных операторов $-y'' - \varepsilon x^2 y$, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 302–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:21:40

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ $-y'' - \varepsilon x^2 y$

А. С. Печенцов, А. Ю. Попов

В пространстве $L_2[0, +\infty)$ рассмотрим оператор $\mathbf{L}$, задаваемый дифференциальным выражением

$$ly(x) \equiv -y''(x) - \varepsilon x^2 y(x), \quad \varepsilon \geq 0,$$

и граничным условием

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ и $\theta(x, \lambda)$ – решения уравнения

$$ly = \lambda y \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\varphi(0, \lambda) = \theta'(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi'(0, \lambda) = -\cos \alpha, \quad \theta(0, \lambda) = \cos \alpha.$$

Тогда функция

$$\chi(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi(x, \lambda) \in L_2[0, +\infty) \quad \forall \lambda: \operatorname{Im} \lambda > 0, \tag{2}$$

где $m(\lambda)$ – функция Вейля–Титчмарша оператора $\mathbf{L}$ (см. [1]).

При $\varepsilon > 0$ спектр оператора $\mathbf{L}$ непрерывный и заполняет всю действительную ось $\mathbb{R}$. В этом случае спектральная функция оператора $\rho(\lambda, \varepsilon)$ имеет непрерывную производную при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, связанную с $m(\lambda)$ соотношением:

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) = \frac{-\operatorname{Im} m(\lambda)}{\pi}. \tag{3}$$

В этой работе мы ограничимся случаем $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ и будем исследовать поведение $\rho'(\lambda, \varepsilon)$ на всей оси при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Предельный случай $\varepsilon = 0$ был исследован Титчмаршем в работе [2]. Оказалось, что

$$\rho'(\lambda, 0) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}, & \lambda > 0, \\ \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin^2 \alpha} \delta(\lambda - \lambda_0), & \lambda < 0, \end{cases}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-15-96049.

где δ — дельта-функция Дирака, $\lambda_0 = -\operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Возникает следующая задача. Верно ли, что в каком-нибудь смысле $\rho'(\lambda, \varepsilon) \rightarrow \rho'(\lambda, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ в соответствующем пространстве обобщенных функций? Насколько известно авторам, подобные исследования ранее не проводились. В работе [3] было дано решение такой задачи для спектральных функций семейства операторов, задаваемых дифференциальным выражением $-y'' - \varepsilon xy$. Оказалось, что и для рассматриваемого нами семейства операторов сходимость имеет место.

Через C_a , $a > 0$, обозначим пространство всех непрерывных на $(-\infty, 0]$ функций f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)e^{ax} = 0, \quad \|f\|_a = \max_{x \leq 0} |f(x)e^{ax}|.$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Функция Вейля–Титчмарша $m(\lambda, \varepsilon)$ оператора $\mathbf{L}$ аналитична в полуплоскости $\{\operatorname{Im} \lambda > -\sqrt{\varepsilon}\}$. На действительной оси при любом $\varepsilon > 0$ функция $\rho(\lambda, \varepsilon)$ является аналитической по λ . Каково бы ни было $a > 0$, при любых $\varepsilon \in [0, \pi^2/(4a^2))$ имеет место включение $\rho'(\lambda, \varepsilon) \in C_a^*$.*

2) *При любом $a > 0$ в $*$ -слабой топологии пространства C_a^* выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \rho'(\lambda, \varepsilon) = \rho'(\lambda, 0).$$

Сходимость на любом компакте в C_a равномерна.

3) *Разность $\rho'(\lambda, \varepsilon) - \rho'(\lambda, 0)$ принадлежит всем пространствам $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq +\infty$, при любом $\varepsilon > 0$ и стремится к 0 при $\varepsilon \rightarrow +0$ по норме этих пространств.*

Ниже мы приводим более точные результаты о поведении $\rho'(\lambda, \varepsilon)$, из которых следует теорема 1. Основой проводимого исследования являются полученные нами явные формулы для $m(\lambda, \varepsilon)$ и $\rho'(\lambda, \varepsilon)$.

При $\varepsilon > 0$ замена переменной $z = \sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}x$ приводит уравнение (1) к виду

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}i\lambda - \frac{1}{4}z^2 \right) y = 0.$$

Полагая

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}i\lambda = n + \frac{1}{2},$$

получим уравнение Вебера [4, § 16.5], решениями которого являются функции $D_n(z)$ и $D_n(-z)$. Поэтому $y_1(x, \lambda) = D_n(\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}x)$, $y_2(x, \lambda) = D_n(-\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta > 0$. Тогда

$$n = \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\alpha i - \frac{1}{2}(\varepsilon^{-1/2}\beta + 1),$$

и из асимптотического разложения функции $D_n(z)$ при $z \rightarrow \infty$ (см. [4, § 16.5]) получаем включение

$$y_2(x, \lambda) = D_n(-\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}x) \in L_2[0, +\infty).$$

Следовательно, функции $y_2(x, \lambda)$ и $\chi(x, \lambda)$ из (2) пропорциональны:

$$\chi(x, \lambda) = C(\lambda)D_n(-\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}x),$$

и $C(\lambda)$ не зависит от x . Поэтому имеем

$$C(\lambda)D_n(0) = \cos \alpha + m(\lambda) \sin \alpha, \quad C(\lambda)D'_n(0)(-\sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{3\pi i/4}) = \sin \alpha - m(\lambda) \cos \alpha.$$

Отсюда находим, что

$$m(\lambda, \varepsilon) = \frac{D_n(0) \sin \alpha - \sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{-\pi i/4}D'_n(0) \cos \alpha}{D_n(0) \cos \alpha + \sqrt{2}\varepsilon^{1/4}e^{-\pi i/4}D'_n(0) \sin \alpha}.$$

Значения $D_n(0)$ и $D'_n(0)$ выражаются через гамма-функцию (см. [4, § 16.6]):

$$D_n(0) = -2^{-n/2-1} \frac{\sin n\pi}{\pi} \Gamma(n+1) \Gamma\left(-\frac{n}{2}\right), \quad D'_n(0) = 2^{-n/2-1/2} \frac{\sin n\pi}{\pi} \Gamma(n+1) \Gamma\left(-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, верна теорема.

ТЕОРЕМА 2. Функция Вейля–Титчмарша $m(\lambda, \varepsilon)$ рассматриваемой задачи имеет следующее представление при $\text{Im } \lambda > 0$:

$$m(\lambda, \varepsilon) = \frac{e^{\pi i/4} \Gamma(1/4 - i\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})) \sin \alpha + 2\varepsilon^{1/4} \Gamma(3/4 - i\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})) \cos \alpha}{e^{\pi i/4} \Gamma(1/4 - i\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})) \cos \alpha - 2\varepsilon^{1/4} \Gamma(3/4 - i\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})) \sin \alpha}. \quad (4)$$

Используя теорему 2, по формуле (3) получим явное выражение для $\rho'(\lambda, \varepsilon)$. Для этого поделим числитель и знаменатель дроби в выражении (4) на $\Gamma(3/4 - i\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})) \neq 0$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ и любом $\varepsilon > 0$.

Введем обозначения:

$$A = \frac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon}}, \quad w = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(1/4 - iA)}{\Gamma(3/4 - iA)}, \quad \Omega(t) = \frac{1}{2\pi} \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + it\right) \right|^2, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

В этих обозначениях функция $m(\lambda, \varepsilon)$ перепишется в виде

$$m(\lambda, \varepsilon) = \frac{w \sin \alpha + 2\varepsilon^{1/4} \cos \alpha}{w \cos \alpha - 2\varepsilon^{1/4} \sin \alpha},$$

откуда находим, что

$$-\text{Im } m(\lambda, \varepsilon) = \frac{2v\varepsilon^{1/4}}{(u \cos \alpha - 2\varepsilon^{1/4} \sin \alpha)^2 + v^2 \cos^2 \alpha}, \quad (6)$$

где $u = \text{Re } w$, $v = \text{Im } w$. Из (5) вытекают равенства

$$u(A) = \Omega(A) e^{-\pi A}, \quad v(A) = \Omega(A) e^{\pi A}. \quad (7)$$

Из теоремы 2 следует, что функция $m(\lambda, \varepsilon)$ мероморфна по λ в $\mathbb{C}$ и может иметь полюсы только в точках $\{-i\sqrt{\varepsilon}(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$. Поэтому функция $m(\lambda, \varepsilon)$, первоначально определенная при $\text{Im } \lambda > 0$, допускает аналитическое продолжение, задаваемое формулой (4), в полуплоскость $\text{Im } \lambda > -\sqrt{\varepsilon}$, а в частности, и на всю действительную ось. Ввиду сказанного формулы (3), (6) и (7) позволяют установить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. При $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливо тождество

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{2v(A)\varepsilon^{1/4}}{(u(A) \cos \alpha - 2\varepsilon^{1/4} \sin \alpha)^2 + v^2(A) \cos^2 \alpha}.$$

Для детального исследования асимптотического поведения $\rho'(\lambda, \varepsilon)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном $\varepsilon > 0$, а также при $\varepsilon \rightarrow +0$, необходимо знать асимптотику функции $\Omega(A)$, где $A = \lambda/(4\sqrt{\varepsilon})$. Следующие оценки получаются из хорошо известных свойств гамма-функции.

ЛЕММА 1. При $|A| \geq 1$, $A \in \mathbb{R}$, с абсолютной постоянной в символе O справедливы соотношения

$$\Omega(A) = \frac{e^{-\pi|A|}}{\sqrt{|A|}} \left(1 + \frac{1}{64A^2} + O\left(\frac{1}{A^4}\right) \right),$$

$$u(A) = \begin{cases} \frac{e^{-2\pi A}}{\sqrt{A}} \left(1 + \frac{1}{64A^2} + O\left(\frac{1}{A^4}\right) \right), & A \geq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{-A}} \left(1 + \frac{1}{64A^2} + O\left(\frac{1}{A^4}\right) \right), & A \leq -1, \end{cases} \quad v(A) \equiv u(-A), \quad A \in \mathbb{R}.$$

Из теоремы 3 и леммы 1 непосредственно следует асимптотика $\rho'(\lambda, \varepsilon)$ при $\lambda \rightarrow -\infty$, которая для рассматриваемого частного случая уточняет оценку, справедливую для спектральной функции оператора с произвольным непрерывным вещественным потенциалом $q(x)$ [5, с. 144].

ТЕОРЕМА 4. При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ и $\lambda \rightarrow -\infty$ справедлива асимптотика

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) \sim \frac{\exp(\pi\lambda/(2\sqrt{\varepsilon}))}{\pi \sin^2 \alpha \sqrt{-\lambda}}.$$

При любом фиксированном $\lambda < 0$, $\lambda \neq -\operatorname{ctg}^2 \alpha$, и $\varepsilon \rightarrow +0$ справедлива асимптотика

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) \sim \frac{\sqrt{-\lambda} \exp(\pi\lambda/(2\sqrt{\varepsilon}))}{\pi \sin^2 \alpha (\sqrt{-\lambda} - \operatorname{ctg} \alpha)^2}.$$

Прямое вычисление $\rho'(0, \varepsilon)$ показывает, что при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\rho'(0, \varepsilon) = \frac{2\Omega(0)\varepsilon^{1/4}}{\pi((\Omega(0)\cos\alpha - 2\varepsilon^{1/4}\sin\alpha)^2 + \Omega^2(0)\cos^2\alpha)} = \frac{2\varepsilon^{1/4}}{\Gamma^2(1/4)\cos^2\alpha} + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Эта оценка легко переносится на множество $|\lambda| \leq 4\sqrt{\varepsilon}$, а именно, справедлива

ТЕОРЕМА 5. Существуют положительные постоянные C_1 и C_2 , эффективно зависящие от α , такие, что для любого $\varepsilon \in (0, C_1)$ при $|\lambda| \leq 4\sqrt{\varepsilon}$ выполняется неравенство

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) \leq C_2 \varepsilon^{1/4}.$$

Асимптотика функции $u(A)$ при $A \leq -1$ влечет за собой следующую лемму, которая является ключевой в доказательстве сходимости $\rho'(\lambda, \varepsilon)$ к $\rho'(\lambda, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ на отрицательной части $\mathbb{R}$ (см. ниже теорему 6).

ЛЕММА 2. Существует положительная постоянная C_3 , эффективно зависящая от α , такая, что для любого $\varepsilon \in (0, C_3)$ уравнение

$$u\left(\frac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon}}\right) = 2\varepsilon^{1/4} \operatorname{tg} \alpha$$

имеет единственный отрицательный корень (обозначим его через $\lambda_1(\varepsilon)$), который лежит на отрезке $I = [-2\operatorname{ctg}^2 \alpha, -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 \alpha]$ и при $\varepsilon \rightarrow +0$ имеет асимптотику

$$\lambda_1(\varepsilon) = -\operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha + O(\varepsilon^2).$$

ТЕОРЕМА 6. При $\varepsilon \in (0, C_3)$, где постоянная C_3 определена в лемме 2, справедливы следующие оценки:

- 1) $\rho'(\lambda, \varepsilon) = O\left(\sqrt{-\lambda} \exp\left(\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)$, $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 \alpha, -4\sqrt{\varepsilon}\right)$;
- 2) $\rho'(\lambda, \varepsilon) = O\left((- \lambda)^{-1/2} \exp\left(\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)$, $\lambda \in (-\infty, -2\operatorname{ctg}^2 \alpha)$;
- 3) если $\exp\left(-\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{4\sqrt{\varepsilon}}\right) \leq d \leq \varepsilon^2$, то

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) = O\left(d^{-2} \exp\left(\frac{\pi\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)$$

при $\lambda \in I \setminus I_{d,\varepsilon}$, где $I_{d,\varepsilon} = [\lambda_1(\varepsilon) - d, \lambda_1(\varepsilon) + d]$;

- 4) $\int_{I_{d,\varepsilon}} \rho'(\lambda, \varepsilon) d\lambda = \frac{2\operatorname{ctg} \alpha}{\sin^2 \alpha} + O(\varepsilon)$.

Из теоремы 3 и леммы 1 следует теорема 7, которая вместе с теоремой 5 устанавливает характер сходимости $\rho'(\lambda, \varepsilon)$ к $\rho'(\lambda, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ на положительной части действительной оси.

ТЕОРЕМА 7. Верна асимптотическая формула

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) - \rho'(\lambda, 0) = O(\varepsilon \lambda^{-5/2}), \quad \lambda \geq 1,$$

и существует постоянная $C_4 > 0$, эффективно зависящая от α , такая, что

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) - \rho'(\lambda, 0) = \begin{cases} O(\varepsilon \lambda^{-3/2}), & C_4 \sqrt{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} \leq \lambda < 1, \\ O\left(\varepsilon^{1/4} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), & 4\sqrt{\varepsilon} \leq \lambda < C_4 \sqrt{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Из теоремы 6 следует утверждение 2) теоремы 1, а утверждение 3) теоремы 1 вытекает из теоремы 7.

Интерес к рассматриваемому в настоящей работе оператору возник при обсуждении результатов работы [3] на семинаре под руководством профессора А. А. Шкаликова. Для потенциалов $q(x) = -\varepsilon x^p$, $p > 0$, $\varepsilon > 0$, в точке $p = 2$ меняется характер спектра, а именно: при $p > 2$ спектр дискретный, при $p \leq 2$ спектр непрерывный и заполняет всю действительную ось. Авторы благодарят участников этого семинара и особенно его руководителя, обратившего внимание на актуальность изучения “пограничного” случая $p = 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. М., 1960. 2. Titchmarsh E. C. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1951. V. 207. P. 321–328. 3. Печенцов А. С., Попов А. Ю. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 5. С. 793–796. 4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. 2. М.: ГИФМЛ, 1963. 5. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.