Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Приходько, Джойнинги действия группы $GL(n, \mathbb{Z})$
на n -мерном торе, *Матем. заметки*, 1998, том 63, вы-
пуск 2, 306–308

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1281>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 03:34:32

ДЖОЙНИНГИ ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ $GL(n, \mathbb{Z})$ НА n -МЕРНОМ ТОРЕ

А. А. Приходько

Пусть $\Psi = \{\Psi^t\}$ – действие группы $GL(n, \mathbb{Z})$ на n -мерном торе $\mathbb{T}^n$ сохраняющими меру Хаара λ преобразованиями

$$\Psi^t: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n, \quad (\Psi^t \xi)^j := \sum_{k=1}^n t_k^j \xi^k,$$

где $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{T}^n$, а $t = (t_k^j)_{j,k=1}^n$ – элемент группы $GL(n, \mathbb{Z})$. Рассмотрим диагональное действие

$$\Psi_{(m)} := \{\Psi_{(m)}^t := \underbrace{\Psi^t \times \dots \times \Psi^t}_{m \text{ раз}} : t \in GL(n, \mathbb{Z})\},$$

заданное на пространстве

$$(\mathbb{T}^n)^{\times m} := \prod_{i=1}^m \mathbb{T}^n.$$

Работа выполнена при частичной поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00418-96.

Пусть x – элемент группы $(\mathbb{T}^n)^{\times m}$. Координаты x будем записывать в виде $x = (\xi_i^j)$, где i – номер сомножителя в прямом произведении, $1 \leq i \leq m$, а ξ_i^j – j -я координата элемента $x_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^n) \in \mathbb{T}^n$. Тогда

$$(\Psi_{(m)}^t \xi)_i^j = \sum_{k=1}^n t_k^j \xi_i^k.$$

Переставляя сомножители в $\mathbb{T}^{nm}$, пространство $(\mathbb{T}^n)^{\times m}$, на котором задан джойнинг, можно представить в виде

$$(\mathbb{T}^n)^{\times m} = \mathbb{T}^{nm} = (\mathbb{T}^m)^{\times n} = \{x = (x^1, \dots, x^n) : x^j = (\xi_i^j)_{i=1}^m \in \mathbb{T}^m\}.$$

В координатах $x^1, \dots, x^n$ действие преобразования $\Psi_{(m)}^t$ на элемент x есть умножение матрицы t на вектор-столбец $(x^1, \dots, x^n)^T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Джойнингом порядка m действия Ψ называется борелевская мера ν на $(\mathbb{T}^n)^{\times m}$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) ν является $\Psi_{(m)}$ -инвариантной;
- 2) одномерные проекции меры ν , $\pi_i \nu(A) = \nu(\{x : x_i \in A\})$, $A \subset \mathbb{T}^n$, совпадают с мерой Хаара λ на группе $\mathbb{T}^n$.

Задача изучения джойнингов $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ -действия на $\mathbb{T}^2$ была поставлена в [1]. В работе [2] Парк показала, что любой эргодический джойнинг ν второго порядка действия группы $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, отличный от меры $\mu^{\times 2}$, где μ – мера Хаара на $\mathbb{T}^m$, сосредоточен на некоторой собственной замкнутой подгруппе вида $H \times H$.

В настоящей работе результат Парк обобщается на случай джойнингов всех порядков действия группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 2$, а также дается классификация эргодических джойнингов.

ТЕОРЕМА 1. Если эргодический джойнинг ν порядка m действия Ψ отличен от меры $\mu^{\times n}$, то существует собственная замкнутая подгруппа H группы $\mathbb{T}^m$ такая, что

$$\mathrm{supp} \nu \subseteq H^{\times n} = \underbrace{H \times \dots \times H}_{n \text{ раз}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы проведем доказательство для случая джойнингов порядка m группы автоморфизмов $\mathbb{T}^3$. Рассмотрим несколько специальных элементов группы $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$, свойства которых нам понадобятся, а именно: преобразования $S_{i,j}$, заданные правилом $S_{i,j} x^j = x^j + x^i$, $S_{i,j} x^k = x^k$ при $k \neq j$, а также преобразования $F_{i,j}$, переставляющие координаты с номерами i и j .

Рассмотрим эргодическую Ψ -инвариантную меру ν на $(\mathbb{T}^m)^{\times 3}$ и покажем, что если $\nu \neq \mu^{\times 3}$, где μ – мера Хаара на $\mathbb{T}^m$, то $\mathrm{supp} \nu \subseteq H^{\times 3}$ для некоторой собственной замкнутой подгруппы H группы $\mathbb{T}^m$. Представим фазовое пространство $(\mathbb{T}^m)^{\times 3}$ в виде

$$(\mathbb{T}^m)^{\times 3} = Y \times \mathbb{T}^m, \quad \text{где } Y = \{(x^1, x^2)\} = (\mathbb{T}^m)^{\times 2},$$

а меру ν как интеграл условных мер:

$$\nu(\cdot) = \int_Y \nu_y(\cdot) d\gamma(y),$$

где ν_y – меры на $\mathbb{T}^m$.

Рассмотрим преобразования $S_{1,3}$ и $S_{2,3}$. Так как разбиение фазового пространства на множества $\mathbb{T}^m \times \{y\}$ инвариантно относительно этих преобразований, для γ -почти всех $y = (x^1, x^2) \in Y$ мера ν_y инвариантна относительно сдвига на элементы x^2 и x^3 (см. определение преобразований

$S_{i,j}$). Так как мера ν_y борелевская, ν_y инвариантна относительно сдвига на любой элемент, принадлежащий замкнутой подгруппе $\mathbb{T}^m$, порожденной элементами x^2 и x^3 ; обозначим ее через $V(y)$.

Предположим, что $\nu \neq \mu^{\times 3}$. Тогда существует множество $C \subseteq Y$ положительной γ -меры такое, что для любого $y \in C$ мера $\nu_y \neq \mu$. Количество замкнутых подгрупп тора счетно, значит множество C можно выбрать так, что для $y \in C$ выполнено $V(y) \equiv V \subset \mathbb{T}^m$, причем $V \neq \mathbb{T}^m$.

Пусть $\mu(\cdot \mid V)$ – мера, равномерно распределенная на подгруппе V . Из свойства строгой эргодичности действия подгруппы V сдвигами на самой себе следует, что меры ν_y имеют вид

$$\nu_y(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^m/V} \mu(\cdot \mid x^3 + V) d c_y(\bar{x}), \quad (1)$$

где $\mu(\cdot \mid x^3 + V)$ – сдвиг меры $\mu(\cdot \mid V)$: $\mu(A \mid x^3 + V) := \mu(A - x^3 \mid V)$. Заметим, что $C \subseteq V \times V$, и воспользуемся тем, что мера ν инвариантна относительно преобразования $F_{2,3}$. Для множества $A \subseteq \mathbb{T}^m$ имеем $\nu(V \times V \times A) = \nu(V \times A \times V)$.

Рассмотрим точку $(v, a) \in V \times a$. Обозначим через W минимальную замкнутую подгруппу $\mathbb{T}^m$, содержащую V и a . В силу формулы (1) имеем

$$\nu(V \times A \times V) = \int_{V \times A} d\gamma(v, a) \int_{\mathbb{T}^m/V} \mu(V \mid x^3 + W) d c_{(a,v)}(\bar{x}^3).$$

Допустим $\#W/V = \infty$. Тогда $\mu(V \mid x^3 + W) = 0$. Таким образом, для $(a, v) \in \text{supp } \gamma$ точка a принадлежит некоторому конечному расширению подгруппы V . Так как число конечных расширений счетно, для некоторого конечного расширения H мера $\nu(V \times H \times V) > 0$. Тем более, $\nu(H \times H \times H) > 0$. Вспомним, что мера ν эргодична. Подгруппа $H \times H \times H$ является Ψ -инвариантной, следовательно, $\text{supp } \nu \subseteq H \times H \times H$, что и требовалось доказать.

Теорема 1 не дает общего вида эргодического джойнинга группы автоморфизмов тора. Примером джойнинга, не совпадающего с мерой Хаара на $H^{\times n}$, является $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ -инвариантная мера на $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$, равномерно распределенная на подгруппе $\Delta_2 \times \Delta_2$, $\Delta_2 := \Delta \sqcup (\Delta + (1/2, 0))$, за вычетом диагонали $\Delta := \{(\xi, \xi) : \xi \in \mathbb{T}\}$.

Рассмотрим замкнутую подгруппу H тора $\mathbb{T}^m$ и ее связную компоненту нуля U . Пусть $F := H/U$. Будем обозначать символом $\bar{f}$ соответствующий точке $f \in H$ смежный класс относительно подгруппы U . Пусть $\langle \bar{f}^1, \dots, \bar{f}^n \rangle$ – подгруппа F , порожденная элементами $\bar{f}^1, \dots, \bar{f}^n$.

ТЕОРЕМА 2. Мера ν является эргодической $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ -инвариантной борелевской мерой на $(\mathbb{T}^m)^{\times n}$ тогда и только тогда, когда ν равномерно распределена на многообразии вида

$$\mathcal{O}_H + U^{\times n}, \quad \mathcal{O}_H = \{(\bar{f}^1, \dots, \bar{f}^n) \in F^{\times n} : \langle \bar{f}^1, \dots, \bar{f}^n \rangle = F\}, \quad (2)$$

где H – произвольная замкнутая подгруппа $\mathbb{T}^m$ такая, что $F = H/U$ имеет n порождающих элементов. В частности, эргодические джойнинги порядка n действия группы $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$ на $\mathbb{T}^n$ суть в точности меры, равномерно распределенные на многообразиях вида (2), удовлетворяющие дополнительному условию на подгруппу U : все одномерные проекции U совпадают с $\mathbb{T}^1$.

Автор благодарит В. В. Рыжикова и А. М. Стёпина за обсуждение настоящей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. del Junco A., Rudolph D. // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1987. V. 7. № 4. P. 531–557.
2. Park K. // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 114. № 4. P. 955–963.