Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Хлямков, Замечание о сходимости метода парабол,
Матем. заметки, 1998, том 63, выпуск 2, 309

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1282>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:34:29

ЗАМЕЧАНИЕ О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПАРАБОЛ

А. В. Хлямков

Метод парабол является одним из наиболее удобных и широко применяемых способов нахождения действительных и комплексных корней произвольного многочлена

$$P(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m.$$

Как известно (см., например, [1]), этот метод состоит в следующем. Выбирается произвольная тройка z_0, z_1, z_2 различных точек комплексной плоскости и строится квадратичный интерполяционный многочлен $Q(z)$, имеющий те же значения, что и $P(z)$ в z_0, z_1, z_2 . Пусть z_3 – ближайший к z_2 корень $Q(z)$. Тройка z_0, z_1, z_2 заменяется тройкой z_1, z_2, z_3 , с которой затем поступаем аналогично, и т.д. Последовательность $\{z_n\}$ практически всегда сходится к одному из корней $P(z)$. После понижения степени также находятся и остальные корни.

Хотя сходимость этого метода для произвольных многочленов при произвольных начальных условиях не доказана, не зарегистрировано ни одного случая, когда этот метод не сходится или сходится медленно (см. [1, с. 329], [2, с. 221–229]).

ТЕОРЕМА. *Существует такой многочлен и такие начальные точки, что на некоторой итерации интерполяционный многочлен вырождается в константу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$P(z) = 3z^4 - 38z^3 + 128z^2 - 58z - 131$$

и $z_0 = 3, z_1 = -1, z_2 = 7$. На первом шаге итерационного процесса получаем интерполяционный многочлен $Q_0(z) = -4z^2 + 100$, откуда $z_3 = 5$. Повторная итерация для тройки точек $-1, 7, 5$ приводит к интерполяционному многочлену $Q_1(z) = 4z^2 - 48z + 44$, откуда $z_4 = 1$. Так как $P(z_2) = P(z_3) = P(z_4) = -96$, получаем $Q_2(z) = -96$, что и требовалось доказать.

Разумеется, значения исходного многочлена могут совпадать уже в начальных точках, но такие исходные данные представляют меньший интерес, так как в этом случае мы могли бы сразу помечать начальные точки.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существует такое ε , такой многочлен и такие начальные точки, что метод парабол не дает ε -приближения к корню многочлена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем многочлен и начальные точки из доказательства теоремы, примем $\varepsilon = 0.2$. В полученном после остановки метода множестве приближений $\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$ ни одно число не является ε -приближением к какому-либо корню исходного многочлена.

Непосредственно отсюда вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Метод парабол не является сходящимся при любых начальных данных.*

Сказанное ни в коей мере не умаляет практической ценности метода. Во-первых, подобные ситуации естественно рассматривать как исключительные и поэтому не имеющие серьезного значения для практики. Во-вторых, существуют различные приемы выхода из подобных тупиков. Вопросы сходимости таких модифицированных алгоритмов требуют, естественно, отдельного изучения. Что же касается метода парабол “в чистом виде”, то здесь, по-видимому, уместно ставить вопрос о сходимости метода при почти всех (но не всех) начальных точках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
2. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1966.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: 111@univ.uni.yar.ac.ru

Поступило
09.11.95