Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. З. Челидзе, О пересечении последовательности вложенных замкнутых множеств в банаховых пространствах, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 310–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:31:08

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЛОЖЕННЫХ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Г.З. Челидзе

Любое ограниченное замкнутое множество в конечномерном банаховом пространстве является компактным. Поэтому пересечение последовательности вложенных ограниченных замкнутых множеств в конечномерных банаховых пространствах всегда непусто. Справедливо и обратное предложение (которое легко следует из известной теоремы Рисса): если в банаховом пространстве пересечение каждой последовательности вложенных ограниченных замкнутых множеств непусто, то это пространство конечномерно. Действительно, рассмотрим замкнутый единичный шар этого пространства $S = \{x : \|x\| \leq 1\}$ и произвольную последовательность точек $\{x_n\}$, $x_n \in S$. Для множеств

$$K_n = \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} x_i},$$

имеем $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq \dots$, поэтому из условия следует, что пересечение множеств K_n непусто. Пусть y – произвольная точка этого пересечения. Очевидно, что существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что $x_{n_k} \rightarrow y$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, из любой последовательности точек шара S можно выделить сходящуюся подпоследовательность с пределом в S , т.е. множество S секвенциально компактно, а значит, и компактно, поскольку оно является подмножеством метрического пространства. Следовательно, замкнутый единичный шар данного банахова пространства компактен. Отсюда по теореме Рисса получаем конечномерность этого пространства.

Таким образом, задача о пересечении последовательности вложенных замкнутых множеств в случае конечномерного банахова пространства является тривиальной.

В настоящей статье мы рассматриваем один аспект этой задачи для бесконечномерного случая. Заметка является естественным продолжением работы [1]. Мы даем неполный ответ на вопрос, естественно возникающий в связи с этой работой.

Следуя [1], введем для каждого ограниченного непустого множества, содержащего по крайней мере две различные точки, следующие величины:

$$R_x(F) = \sup_{y \in F} \|x - y\|, \quad r_x(F) = \inf_{y \in F^c} \|x - y\|, \quad \varkappa(F) = \sup_{x \in F} \frac{r_x(F)}{R_x(F)},$$

где F^c – дополнение множества F до всего пространства.

Пусть $F_1 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$ – последовательность вложенных ограниченных замкнутых множеств в произвольном банаховом пространстве. В работе [1] доказано, что если $\overline{\lim} \varkappa(F_n) \geq 1/2$, то пересечение множеств F_n непусто. Показано, что число $1/2$ в определенном смысле критическое: для любого числа $\varkappa < 1/2$ существуют банахово пространство X и последовательность ограниченных выпуклых замкнутых множеств $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ в X таких, что $\varkappa(F_n) = \varkappa$ ($n = 1, 2, \dots$) и $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

Естественно, возникает вопрос: что можно сказать, если $\overline{\lim} \varkappa(F_n)$ равен критическому значению $1/2$?

В теореме 1 дается ответ на этот вопрос в случае, когда пространство является сопряженным к некоторому банахову пространству.

В теореме 2 показано, что число $1/2$ является критическим и для класса рефлексивных банаховых пространств. В работе [1] строится контрпример в пространстве сходящихся числовых последовательностей. Заметим, что в рефлексивном случае контрпримера с выпуклыми множествами не существует (см. [1]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – банахово пространство, сопряженное к некоторому банахову пространству Y , т.е. $X = Y^*$. Тогда если $\varkappa = \overline{\lim} \varkappa(F_n) \geq 1/2$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ для каждой последовательности вложенных ограниченных замкнутых множеств $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ пространства X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось, непустота пересечения при $\varkappa > 1/2$ имеет место в общем банаховом пространстве. Поэтому достаточно доказать теорему для случая $\varkappa = 1/2$. Поскольку непустота пересечения последовательности множеств F_n гарантируется непустотой пересечения одной (произвольно выбранной) подпоследовательности, можем считать, не ограничивая общности, что $\lim \varkappa(F_n) = 1/2$. В этом предположении имеем $\varkappa(F_n) > 1/2 - \delta'$ для любого $\delta' > 0$ и всех достаточно больших n . Поэтому, подбирая соответствующим образом точки x_n в каждом из множеств F_n , получим условие

$$\frac{1}{2} < \frac{r_n}{R_n} + \delta \quad \text{для всех } \delta > 0 \text{ и } n > N(\delta), \quad (1)$$

где $r_n = r_{x_n}(F_n)$ и $R_n = R_{x_n}(F_n)$. Далее, учитывая условие $F_n \subseteq F_m$ при $n > m$ и повторяя элементарные рассуждения из [1], легко получить условие $\|x_n - x_m\| + r_n \leq R_m$, которое вместе с неравенством (1) дает оценку $\|x_n - x_m\| \leq 2r_m - r_n + 2R_m\delta$ для достаточно больших m и всех $n > m$. Предположим, не ограничивая общности, что последовательность r_n имеет предел (т.е. фундаментальна). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется N_ε такое, что

$$\|x_n - x_m\| < r_m + \varepsilon \quad \text{для всех } m > N_\varepsilon \text{ и } n > m. \quad (2)$$

В силу условия (2) существует возрастающая последовательность номеров n_k ($k = 1, 2, \dots$) такая, что $\|x_{n_k} - x_m\| \leq r_{n_k} + \varepsilon/k$ для любого $m > n_k$, где ε — некоторое фиксированное положительное число.

Для каждого натурального k рассмотрим замкнутый шар $B(x_{n_k}, r_{n_k} + \varepsilon/k)$ с центром в точке x_{n_k} радиуса $r_{n_k} + \varepsilon/k$. Легко видеть, что семейство этих шаров центрировано. Действительно, если рассмотреть любое конечное число шаров $B(x_{n_k}, r_{n_k} + \varepsilon/k)$, то центр шара с наибольшим номером будет принадлежать их пересечению.

По известной теореме Алаоглу–Бурбаки эти шары являются компактными пространства X в его Y -топологии, значит $\bigcap_{k=1}^{\infty} B(x_{n_k}, r_{n_k} + \varepsilon/k) \neq \emptyset$, т.е. существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что

$$\|\bar{x} - x_{n_k}\| \leq r_{n_k} + \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{для каждого } k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Покажем, что $\bar{x}$ принадлежит всем F_n . Для этого построим последовательность $\{y_k\}$ такую, что $\|y_k - \bar{x}\| \rightarrow 0$ и $y_k \in F_{n_k}$ ($k = 1, 2, \dots$). Такого построения достаточно ввиду вложенности множеств F_n и замкнутости каждого из них.

Рассмотрим теперь множества F_{n_k} и в качестве y_k возьмем саму точку $\bar{x}$, если $\bar{x} \in B(x_{n_k}, r_{n_k})$. В противном случае в качестве y_k возьмем точку на поверхности шара $B(x_{n_k}, r_{n_k})$, которая лежит на отрезке прямой, соединяющем точку x_{n_k} с $\bar{x}$. Очевидно, что $\|\bar{x} - x_{n_k}\| = \|\bar{x} - y_k\| + \|y_k - x_{n_k}\|$. Поэтому в силу неравенства (3) имеем

$$r_{n_k} + \frac{\varepsilon}{k} \geq \|\bar{x} - x_{n_k}\| = \|\bar{x} - y_k\| + r_{n_k}.$$

Следовательно, $\|\bar{x} - y_k\| \leq \varepsilon/k$ для тех k , при которых $B(x_{n_k}, r_{n_k})$ не содержит $\bar{x}$. Для остальных k в качестве y_k мы взяли элемент $\bar{x}$, который для этих k удален от x_{n_k} не более чем на r_{n_k} и, следовательно, принадлежит F_{n_k} (так как $B(x_{n_k}, r_{n_k}) \subseteq F_{n_k}$, $k = 1, 2, \dots$). Таким образом, $\|\bar{x} - y_k\| \rightarrow 0$ и все $y_k \in F_{n_k}$. Доказательство теоремы завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что утверждение теоремы 1 верно и в пространстве, изоморфном и изометричном некоторому сопряженному банахову пространству, т.е. $X = Y^*$.

В силу теоремы 1 ясно, что в рефлексивных банаховых пространствах пересечение последовательности вложенных замкнутых ограниченных множеств $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$ непусто, если $\varkappa = \overline{\lim} \varkappa(F_n) \geq 1/2$. Теорема 2 показывает, что при $\varkappa < 1/2$ утверждение теоремы 1 неверно.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного числа $\varkappa < 1/2$ существуют рефлексивное банахово пространство X и последовательность ограниченных замкнутых множеств $F_1 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$, $F_1 \subset X$, таких, что

$$\varkappa \leq \overline{\lim} \varkappa(F_n) < \frac{1}{2}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем, что в качестве X можно взять пространство ℓ_p , $p > 1$, при соответствующем выборе числа $p = p(\kappa)$. В самом деле, пусть κ , $0 < \kappa < 1/2$, — заранее заданное произвольное число. В пространстве ℓ_p рассмотрим последовательность точек $\{x_n\}$, где

$$x_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ раз}}, 1 + \varepsilon, 0, \dots), \quad \varepsilon > 0,$$

а p и ε выберем позднее. Пусть $B(x_n, 1)$ — замкнутый единичный шар с центром в точке x_n и $F_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} B(x_m, 1)$. Ясно, что для любого n имеем $\|x_n\| = 1 + \varepsilon$, а также

$$\|x_m - x_n\| = ((1 + \varepsilon)^p + (1 + \varepsilon)^p)^{1/p} = 2^{1/p}(1 + \varepsilon) \quad \text{для любого } m, m \neq n.$$

Отсюда следует, что

$$\kappa(F_n) = \sup_{x \in F_n} \frac{r_x(F_n)}{R_x(F_n)} \geq \frac{r_{x_n}(F_n)}{R_{x_n}(F_n)} \geq \frac{1}{(1 + \varepsilon)2^{1/p} + 1}.$$

Подберем теперь $\varepsilon > 0$ и $p < \infty$ так, чтобы

$$\frac{1}{(1 + \varepsilon)2^{1/p} + 1} \geq \kappa.$$

Тогда $\kappa(F_n) \geq \kappa$, т.е. $\overline{\lim} \kappa(F_n) \geq \kappa$.

Заметим, что если $y \in B(x_n, 1)$, $y = (y^1, y^2, \dots)$, то

$$\|x_n - y\| = \left(|1 + \varepsilon - y^n|^p + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} |y^k|^p \right)^{1/p} \leq 1,$$

откуда $y^n \geq \varepsilon$.

Покажем, что для каждого n множество F_n замкнуто. Допустим противное: найдется $y \notin F_n$ и $y \in \overline{F_n}$, т.е. для некоторой последовательности $\{y_k\}$, $y_k \in F_n$, выполнено $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k - y\| = 0$. Поскольку $y = (y^1, y^2, \dots) \in \ell_p$, найдется N такое, что $|y^n| \leq \varepsilon/2$ для любого $n \geq N$. Из последовательности $\{y_k\} \subset F_n$ выделим подпоследовательность (обозначим ее опять через $\{y_k\}$) так, чтобы

$$y_1 \in B(x_{N_1}, 1), \quad y_2 \in B(x_{N_2}, 1), \quad \dots, \quad y_k \in B(x_{N_k}, 1), \quad \dots, \\ N < N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots, \quad N_k \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

(Ясно, что если выбор такой последовательности невозможен, т.е. последовательность $\{y_k\}$ принадлежит конечному множеству замкнутых шаров, то $y \in F_n$.)

Учитывая это, имеем $\|y_k - y\| \geq |y_k^{N_k} - y^{N_k}| > \varepsilon/2$ ($k = 1, 2, \dots$), т.е. y не является пределом $\{y_k\}$. Тем самым показано, что множества F_n замкнуты.

Осталось показать, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Допустим противное. Пусть существует $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, $y = (y^1, y^2, \dots)$. Поскольку $y \in \ell_p$, то, начиная с некоторого номера N , выполнено $|y^n| \leq \varepsilon/2$ для любого $n \geq N$. Следовательно, $y \notin B(x_n, 1)$ для всякого $n \geq N$, т.е. $y \notin \bigcup_{n=N}^{\infty} B(x_n, 1) = F_n$, что приводит к противоречию. Отсюда вытекает неравенство $\kappa \leq \overline{\lim} \kappa(F_n) < 1/2$, поскольку в случае $\overline{\lim} \kappa(F_n) \geq 1/2$ имеем $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность своему руководителю профессору Н. Н. Вахания за предложенную тему и ценные советы при выполнении этой работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вахания Н. Н., Карцивадзе И. И. // Матем. заметки. 1968. Т. 3. № 2. С. 165–170.

г. Тбилиси

Поступило
18.02.97
Исправленный вариант
03.11.97