Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Шелкович, Теория обобщенных функций Коломбо, использующая гармонические регуляризации, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 313–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1284>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:15:41

ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ КОЛОМБО, ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ ГАРМОНИЧЕСКИЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В. М. Шелкович

Введение. Более десяти лет назад Ж. Коломбо [1] построил ассоциативную алгебру новых обобщенных функций, в которую вкладывалось пространство распределений Шварца. Произведения распределений в общем случае являлись новыми обобщенными функциями. Связь новых обобщенных функций с распределениями осуществлялась через понятие ассоциированного распределения или асимптотики. Используемая при вложении пространства распределений регуляризация (см. [1], [2]) делает весьма затруднительным вычисление асимптотик и использование теории в приложениях.

Мы строим версию теории Коломбо, в которой для вложения пространства распределений используется гармоническая (точнее полигармоническая) регуляризация. Такой подход позволяет легко находить асимптотические разложения произведений распределений и применять теорию в аналитических приложениях. В [3], [4] была продемонстрирована эффективность гармонических регуляризаций для приложений. Данная задача упоминается в книге [2, задача 27.3] в списке нерешенных проблем. В нашу алгебру инъективно вкладывается подалгебра распределений из [3], [4], элементы которой являются вектор-распределениями.

1. Алгебра Коломбо. Пусть $\mathcal{E}_M$ – дифференциальная алгебра бесконечно дифференцируемых функций-последовательностей $f_m(x, y)$, где $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $y > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$, умеренного роста: для любого $K \subset \mathbb{R}^n$ и любого $D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ найдутся $p, m \in \mathbb{N}$ и константа $M > 0$ такие, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$|D^k f_m(x, y)| < M y^{-p}, \quad x \in K, \quad y \in (0, \varepsilon_0).$$

Пусть $\mathcal{N}$ – множество элементов $f_m(x, y) \in \mathcal{E}_M$ таких, что для любых $K \subset \mathbb{R}^n$, D^k и $p \in \mathbb{N}$ существуют число $m = m(K, k, p) \in \mathbb{N}$ и константа $M > 0$, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$|D^k f_m(x, y)| < M y^p, \quad x \in K, \quad y \in (0, \varepsilon_0). \quad (1)$$

Очевидно, что $\mathcal{N}$ – идеал в алгебре $\mathcal{E}_M$. Элементы факторпространства (факторалгебры) $\mathcal{G} = \mathcal{E}_M / \mathcal{N}$ назовем *обобщенными функциями Коломбо*.

Мы привели один из стандартных вариантов конструкции Коломбо [1, гл. 1], [2, III], [5], [6], где, как правило, элементы $\mathcal{E}_M$ зависят как от параметра, так и от функции $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$, $D = D(\mathbb{R}^n)$ – пространство основных функций с компактным носителем.

Вложение D' и C^∞ в $\mathcal{G}$ осуществляется при помощи регуляризации Коломбо

$$f_{\psi, y}(x) = \left\langle f(\xi), \frac{1}{y^n} \psi\left(\frac{\xi - x}{y}\right) \right\rangle \in \mathcal{E}_M, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\psi(x) = \prod_{i=1}^n \chi(x_i) \in D(\mathbb{R}^n)$ и $\chi(x_i) \in D(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$ (подробнее см. [1], [2], [5], [6]).

Регуляризации δ -функции и функции Хевисайда $\theta(x)$ могут иметь вид

$$\delta_{\psi, y}(x) = y^{-n} \psi\left(\frac{-x}{y}\right), \quad \theta_{\psi, y}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} y^{-n} \psi\left(\frac{\xi - x}{y}\right) d\xi.$$

Ясно, что поиск соотношений, связывающих такие представления, весьма затруднителен.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 95-01-01084 и № 96-01-01199а.

2. Полигармонические представления распределений. Пусть $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$. Обозначим через $G = G(\mathbb{R}_+^{n+1})$ пространство функций $f(x, y)$:

- 1) гармонических в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, т.е. $\Delta f(x, y) = 0$, $\Delta = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ – оператор Лапласа, $x_{n+1} = y$;
- 2) имеющих конечный порядок роста при подходе к $\mathbb{R}^n$, т.е. если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдутся константы $C > 0$, $\alpha > 0$, для которых

$$|f(x, y)| \leq C y^{-\alpha}, \quad y \in (0, 1], \quad x \in K. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1 [7, следствие 11.9]. *Всякая функция $f(x, y) \in G(\mathbb{R}_+^{n+1})$ определяет на $\mathbb{R}^n$ некоторое распределение $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$:*

$$\lim_{y \rightarrow +0} \langle f(x, y), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle \quad \forall \varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n). \quad (3)$$

Для всякого распределения $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ найдется функция $f(x, y) \in G(\mathbb{R}_+^{n+1})$, для которой выполняется равенство (3). Причем $f(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1} \cup (\mathbb{R}^n \setminus \text{supp } f(x)))$ и на $\mathbb{R}^n \setminus \text{supp } f(x)$ функция $f(x, y) = 0$.

Пусть $G_m = G_m(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $m = 1, 2, \dots$, – пространство функций $f(x, y)$:

- 1) полигармонических (m -гармонических) в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, т.е. $\Delta^m f(x, y) = 0$;
- 2) имеющих конечный порядок роста при подходе к $\mathbb{R}^n$.

Из (1) и (2) следует, что $G_m(\mathbb{R}_+^{n+1}) \subset \mathcal{E}_M$ для любого m .

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы функция $f(x, y) \in G_m(\mathbb{R}_+^{n+1})$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} y^k f_k(x, y), \quad (4)$$

где $f_k(x, y) \in G(\mathbb{R}_+^{n+1})$ – гармонические функции, имеющие конечный порядок роста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из [7, лемма 12.8]. Докажем достаточность, применяя к (4) формулу из [7, § 12.7]:

$$\Delta f(x, y) = \sum_{j=0}^{m-3} y^j (j+1) \left((j+2) f_{j+2} + 2 \frac{\partial f_{j+1}}{\partial y} \right) + 2 y^{m-2} (m-1) \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y}.$$

Используя для последнего выражения Δ^{m-1} , получим утверждение.

Из теорем 1, 2 и следствия 12.9 из [7] вытекает, что любая функция $f(x, y) \in G_m(\mathbb{R}_+^{n+1})$ определяет на $\mathbb{R}^n$ некоторое распределение $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$, т.е. имеет место (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ – распределение, $f(x, y)$ – его гармоническая аппроксимация. Функцию

$$f_{(m)}(x, y) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s}{s!} y^s D_y^s f(x, y) \in G_m(\mathbb{R}_+^{n+1}) \quad (5)$$

назовем канонической m -гармонической аппроксимацией распределения $f(x)$, $m = 1, 2, \dots$.

ЛЕММА 1. Пусть $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ – распределение, $f_{(m)}(x, y) \in G_m(\mathbb{R}_+^{n+1})$ – его каноническая m -гармоническая аппроксимация. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем в слабом смысле $f_{(m)}(x, y) = f(x) + o(y^{m-1})$, $y \rightarrow +0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим все члены (5) с помощью формулы Тейлора по $y \in (0, \varepsilon_0)$ при $s = 0, 1, \dots, m-1$:

$$y^s D_y^s f(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1-s} \frac{1}{k!} y^{k+s} D_y^{k+s} f(x, 0) + \frac{1}{m!} y^m D_y^m f(x, \theta_s y), \quad 0 < \theta_s < 1.$$

Здесь $D_y^m f(x, \theta_s y) \in G(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $D_y^j f(x, 0) \in D'(\mathbb{R}^n)$ – распределения, определяемые как

$$\langle D_y^j f(x, 0), \varphi(x) \rangle = \lim_{y \rightarrow +0} \langle D_y^j f(x, y), \varphi(x) \rangle \quad \forall \varphi(x) \in D,$$

и $f(x, 0) = f(x)$. Используя эти представления, из (5) получим

$$f_{(m)}(x, y) = f(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s}{s!(k-s)!} y^k D_y^k f(x, 0) + y^m \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s}{s!(m-s)!} D_y^m f(x, \theta_s y).$$

Так как

$$\sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s}{s!(k-s)!} = 0,$$

получим, что

$$f_{(m)}(x, y) = f(x) + y^m \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s}{s!(m-s)!} D_y^m f(x, \theta_s y). \quad (6)$$

Учитывая, что при достаточно малых $y > 0$ для $s = 1, \dots, m-1$

$$|\langle D_y^m f(x, \theta_s y), \varphi(x) \rangle| \leq C \quad \forall \varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n),$$

где $C > 0$ – некоторая константа, из (6) получим утверждение леммы.

Если $f(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (или $\mathcal{O}'_{-n}(\mathbb{R}^n)$), то его каноническую m -гармоническую аппроксимацию можно получить с помощью m -интегрального представления Пуассона:

$$f_{(m)}(x, y) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s}{s!} y^s D_y^s f(x, y) = \langle f(t), P_m(x-t, y) \rangle, \quad y > 0, \quad m \geq 1. \quad (7)$$

Ядро интегрального представления (7) имеет вид

$$P_m(x, y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j!} y^j D_y^j \left(\frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} \right),$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Интегральное представление (7) получается из представления Пуассона [7, § 11, § 12] (см. [8, 13.5]) с использованием леммы 1.

Применяя к (7) формулу Тейлора, аналогично лемме 1 получим, что если $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ и любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ $f_{(m)}(x, y) = f(x) + o(y^{m-1})$, $y \rightarrow +0$, где $f_{(m)}(x, y)$ – каноническая m -гармоническая аппроксимация (7).

3. Вложения $C^\infty \subset \mathcal{G}$ и $D' \subset \mathcal{G}$. Вложения пространств C^∞ и D' в алгебру Коломбо проведем аналогично [1], [2, § 9], [3, п. 6, п. 7] с помощью отображения $f(x) \mapsto f_{(m)}(x, y) \in \mathcal{E}_M$.

ЛЕММА 2. Вложение $C^\infty \subset \mathcal{G}$ – алгебраический изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В алгебре Коломбо $\mathcal{G}$, как подмножество, имеется пространство C^∞ , элементы которого суть классы функций вида $f_{(m)}(x, y) = f(x)$ для любых $m \in \mathbb{N}$, $y > 0$, где $f(x) \in C^\infty$. Тогда согласно лемме 1 для любого $K \subset \mathbb{R}^n$ и любого $m \in \mathbb{N}$

$$g_{(m)}(x, y) = f(x) - f_{(m)}(x, y) = o(y^{m-1}), \quad y \rightarrow +0, \quad x \in K.$$

Таким образом, $f(x) - f_{(m)}(x, y) \in \mathcal{N}$.

ЛЕММА 3. Пусть $f(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (или $\mathcal{O}'_n(\mathbb{R}^n)$) – распределение, $f_{(m)}(x, y)$ – его каноническая m -гармоническая аппроксимация (7). Тогда $f(x) = 0$ в том и только том случае, когда $f_{(m)}(x, y) \in \mathcal{N}$.

Доказательство проводится как в лемме 4.10 из [5]. Несложно обобщить лемму 3 на случай $f(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$ (см. [7, § 11.4]). Из леммы 3 следует, что вложение $D' \subset \mathcal{G}$ инъективно (см. [2], [5]).

Можно показать, что ассоциативно-коммутативная алгебра E^* из [3], [4], порожденная распределениями $\delta^{(m-1)}(x)$, $P(x^{-m})$ и мультипликаторами x^{m-1} , $m = 1, 2, \dots$, инъективно вкладывается в $\mathcal{G}$ при $n = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Colombeau J. F. Elementary Introduction to New Generalized Functions. Amsterdam: North-Holland, 1985.
2. Oberguggenberger M. Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations. New York, 1992.
3. Шелкович В. М. // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 159–164.
4. Шелкович В. М. // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 5. С. 765–783.
5. Todorov T. D. Sequential Approach to Colombeau's Theory of Generalized Functions. Preprint IC/87/26. Trieste: ICTP, 1987.
6. Егоров Ю. В. // УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 3–40.
7. Кытманов А. М. Интеграл Мартинелли–Бохнера и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.
8. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.