Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, Одна экстремальная задача для функций распределения, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1285>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 08:34:05

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В. А. Юдин

В исследованиях Н. И. Черных [1], [2] по прямым теоремам теории приближения функций в пространстве L_2 центральную роль играет периодическая функция

$$\Psi_n(t) = \begin{cases} |\sin nt|, & |t| \leq \frac{\pi}{n}, \\ 0, & \frac{\pi}{n} \leq |t| \leq \pi, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Отметим свойства функции $\Psi_n(t)$:

- 1) $\text{supp } \Psi_n(t) = [-\pi/n, \pi/n]$;
- 2) $\Psi_n(t) \geq 0, t \in \mathbb{T} = (-\pi, \pi]$;
- 3) $(\hat{\Psi}_n)_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \Psi_n(t) e^{-i\nu t} dt \leq 0, \nu \in \mathbb{Z}, |\nu| \geq n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ГФЕН Китая, грант № 96-01-00036С.

Как “мал” носитель функции, удовлетворяющей условиям 2), 3)? Из результатов [3] вытекает, что для любого числа $a, a \in (0, \pi/n)$, не существует функции распределения (ФР) $\sigma(t)$ с точками роста на интервале $(-a, a)$, коэффициенты Фурье–Стилтьеса которой удовлетворяли бы неравенству

$$c_\nu(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-i\nu t} d\sigma(t) \leq 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad |\nu| \geq n. \quad (2)$$

В настоящей заметке докажем, что мера точек роста любой ФР, удовлетворяющей неравенству (2), не меньше чем $2\pi/n$, $n \in \mathbb{N}$. Близкие вопросы для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа рассмотрены в [4], [5]. Прежде всего отметим, что условие (2) “столь жесткое” для ФР, что оно исключает из ее разложения Лебега дискретную и сингулярную составляющие.

ЛЕММА. Пусть ФР $\sigma(t)$ такова, что за исключением конечного множества B , $B \subset \mathbb{Z}$, $|B| = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} 1$, выполнены неравенства $c_\nu(\sigma) \leq 0$, $\nu \in \mathbb{Z} \setminus B$. Тогда числовой ряд

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu(\sigma)$$

абсолютно сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно $0 \in B$, поскольку

$$c_0(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} d\sigma(t) = 1 > 0.$$

Так как ядро Фейера неотрицательно

$$K_N(t) = \sum_{|\nu| < N} \left(1 - \frac{|\nu|}{N}\right) e^{i\nu t} \geq 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

для произвольного N

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_N(t) d\sigma(t) = \sum_{|\nu| \leq N} c_\nu(\sigma) \left(1 - \frac{|\nu|}{N}\right) \geq 0.$$

Поскольку $|c_\nu(\sigma)| \leq c_0(\sigma) = 1$, $\nu \in \mathbb{Z}$, имеет место

$$\sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \setminus B \\ |\nu| \leq N}} c_\nu(\sigma) \left(1 - \frac{|\nu|}{N}\right) \leq \sum_{\substack{\nu \in B \\ |\nu| \leq N}} c_0(\sigma) \left(1 - \frac{|\nu|}{N}\right) \leq |B|.$$

Устремляя $N \rightarrow \infty$, находим

$$\|c\|_A = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |c_\nu| = \sum_{\nu \in B} c_\nu - \sum_{\nu \in \mathbb{Z} \setminus B} c_\nu \leq |B|c_0 + |B|c_0 = 2|B|.$$

Абсолютная сходимость ряда из коэффициентов (2) доказана.

Определим функцию $f(t)$ как сумму абсолютно сходящегося ряда ($f \in A(\mathbb{T})$):

$$f(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu t}.$$

Функция $f(t)$ непрерывна на $\mathbb{T}$ и по теореме единственности для коэффициентов Стильтьеса

$$d\sigma(t) = f(t) dt, \quad t \in \mathbb{T}.$$

При этом точкам роста ФР $\sigma(t)$ соответствуют точки положительности функции $f(t)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой неотрицательной ($f \not\equiv 0$) функции $f(t) \in A(\mathbb{T})$, коэффициенты Фурье которой удовлетворяют условиям

$$\widehat{f}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-i\nu t} dt \leq 0, \quad |\nu| \geq n, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

справедливо неравенство

$$\text{mes}\{t \in \mathbb{T} : f(t) > 0\} \geq \frac{2\pi}{n}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: существует функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям теоремы, для которой

$$\text{mes}\{t \in \mathbb{T} : f(t) > 0\} < \frac{2\pi}{n}.$$

Рассмотрим периодизацию

$$f_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(t - \frac{2k\pi}{n}\right).$$

Так как мера множества не изменяется при сдвиге, имеем

$$\begin{aligned} \text{mes}\{t \in \mathbb{T} : f_n(t) > 0\} &= \text{mes}\left\{t \in \mathbb{T} : \sum_{k=0}^{n-1} f\left(t - \frac{2k\pi}{n}\right) > 0\right\} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \text{mes}\left\{t \in \mathbb{T} : f\left(t - \frac{2k\pi}{n}\right) > 0\right\} = n \text{mes}\{t \in \mathbb{T} : f(t) > 0\} < 2\pi. \end{aligned}$$

Получаем, что функция $f_n(t)$ обращается в 0 на множестве положительной меры. Обозначим его через E , $|E| = \text{mes } E > 0$. Используя неравенства (3) и разложение периодизации в ряд Фурье, находим

$$f_n(t) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ \nu \equiv 0 \pmod{n}}} \widehat{f}_\nu e^{i\nu t} = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\widehat{f}_{\nu n}| (1 - \cos \nu n t) + \left(\widehat{f}_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} |\widehat{f}_{\nu n}| \right).$$

Поскольку $f(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{T}$, то и $f_n(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{T}$. Значит, второе слагаемое, равное $f_n(0)$, неотрицательно. Неотрицательность первого слагаемого очевидна. Условие $f_n(t)|_E = 0$ приводит к обращению в 0 второго слагаемого. Таким образом, получаем, что функция

$$f_n(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\widehat{f}_{\nu n}| (1 - \cos \nu n t)$$

обращается в 0 на множестве E . Так как $|E| > 0$, существует иррациональное число ϑ такое, что $t_0 = 2\pi\vartheta \in E$. Поскольку $1 - \cos k\alpha \leq k^2(1 - \cos \alpha)$ при любых $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, имеем

$$f_n(kt_0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\widehat{f}_{\nu n}| (1 - \cos \nu n kt_0) \leq k^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |\widehat{f}_{\nu n}| (1 - \cos \nu n t_0) = k^2 f_n(t_0) = 0.$$

Множество точек $\{kt_0\}_{k \in \mathbb{N}}$ всюду плотно на $\mathbb{T}$, следовательно, ввиду непрерывности $f_n(t)$ заключаем, что $f_n(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{T}$. Так как $f(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{T}$, имеем $f(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{T}$. Получено противоречие. Теорема доказана.

В непрерывном случае (интеграл Фурье) в [5] доказана теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \int_0^1 \cos xt \, dF(x), \quad f(0) = 1,$$

где $dF(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq 1$. Тогда $f(t)$ удовлетворяет неравенству $f(t) \leq 0$, $|t| \geq T$, в том и только том случае, когда $T \geq \pi$, а в случае $T = \pi$ $f(t)$ — положительно определенная функция:

$$f(t) = \frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{1 - t^2/\pi^2} = \int_0^1 \cos xt \, dF(x), \quad dF(x) = \frac{\pi}{2} \sin \pi x \, dx.$$

Таким образом, в непрерывном случае экстремальная функция является единственной. В периодическом случае ситуация иная, оценка (4) достигается не только на функции (1). При $n = 1$ нетрудно описать всю совокупность экстремальных функций для неравенства (4). При $n \geq 2$ приведем один пример. Пусть $0 < \beta \leq 1$

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta - |x|\right), & |x| \leq \frac{\pi\beta}{2}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi\beta}{2}. \end{cases}$$

Подсчитаем преобразование Фурье функции $f_1(x)$:

$$\hat{f}_1(s) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) e^{-isx} \, dx = 2 \frac{\cos \frac{s\pi\beta}{2} - \cos \frac{\pi\beta}{2}}{1 - s^2}.$$

Рассмотрим новую функцию

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \left(f_1\left(x - \frac{\pi\beta}{2}\right) + f_1\left(x + \frac{\pi\beta}{2}\right) \right).$$

Найдем ее преобразование Фурье:

$$\hat{f}_2(s) = \hat{f}_1(s) \cos \frac{s\pi\beta}{2} = 2 \frac{\cos \frac{s\pi\beta}{2} (\cos \frac{s\pi\beta}{2} - \cos \frac{\pi\beta}{2})}{1 - s^2}.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, положим $\beta = (n-1)/n$, $f_3(x) = f_2((n-1)x)$. Используя свойства преобразования Фурье, найдем

$$\hat{f}_3(s) = \frac{1}{n-1} \hat{f}_2\left(\frac{s}{n-1}\right) = \frac{2}{n-1} \frac{\cos \frac{s\pi}{2n} (\cos \frac{s\pi}{2n} - \sin \frac{\pi}{2n})}{1 - \left(\frac{s}{n-1}\right)^2}. \quad (5)$$

Функция $f_3(x)$ неотрицательна по построению, и ее носителем является отрезок $[-\pi/n, \pi/n]$. Из формулы (5) находим, что ее преобразование Фурье неположительно на множестве $\{s \in \mathbb{R} : |s| \geq n\}$ за исключением интервалов

$$\pm((4j-1)n, (4j-1)n+1), \quad \pm((4j+1)n-1, (4j+1)n), \quad j, n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку эти интервалы не содержат целых точек, периодическая функция

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_3(x - 2k\pi)$$

удовлетворяет условиям 1)–3). Действительно, условия 1), 2) очевидны. Справедливость условия 3) вытекает из неравенства

$$\begin{aligned}\hat{f}_\nu &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-i\nu x} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} f_3(x - 2k\pi) e^{-i\nu x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f_3(x) e^{-i\nu x} dx = \frac{1}{2\pi} \hat{f}_3(\nu) \leq 0, \quad |\nu| \leq n, \quad \nu \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

В частности, при $n = 2$ функция

$$\begin{cases} |\sin x|, & 0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{4}, \\ \cos x, & \frac{\pi}{4} \leq |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi, \end{cases}$$

является экстремальной.

В заключение выражаю благодарность А. Г. Бабенко и В. А. Скворцову за полезное обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черных Н. И. // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
2. Черных Н. И. // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522.
3. Arestov V. V., Chernykh N. I. // Approximation and Function Spaces. Proc. Conf. Gdansk, 1979. Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
4. Бабенко А. Г. // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 3. С. 349–356.
5. Logan B. F. // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14. № 2. P. 253–257.

Московский энергетический институт

Поступило
23.10.97