Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. Г. Абдуллаев, О мгновенном сжатии носителя решения
нелинейного вырождающегося параболического уравнения,
Матем. заметки, 1998, том 63, выпуск 3, 323–331

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1286>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:16:19

УДК 517.958

О МГНОВЕННОМ СЖАТИИ НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

У. Г. Абдуллаев

Изучается эффект сжатия носителя решения нелинейного параболического уравнения с сильным стоком тепла при малых температурах.

Библиография: 9 названий.

Исследуя эффект мгновенного сжатия носителя решения задачи Коши для нелинейного вырождающегося параболического уравнения

$$u_t = \operatorname{div}(u^n \nabla u) - u^\beta, \quad n \geq 0, \quad 0 < \beta < 1,$$

с положительной и бесконечно малой при $|x| \rightarrow +\infty$ начальной функцией φ , доказаны точные локальные оценки для границы носителя решений. В случае $n \geq 1 - \beta$ доказана асимптотически точная формула

$$\varphi(\xi(t)) \sim ((1 - \beta)t)^{1/(1-\beta)}, \quad \varphi(\eta(t)) \sim ((1 - \beta)t)^{1/(1-\beta)}, \quad t \rightarrow 0,$$

где

$$\xi(t) = \inf\{\rho > 0 : u(x, t) = 0, |x| \geq \rho\}, \quad \eta(t) = \sup\{\rho > 0 : u(x, t) > 0, |x| < \rho\}. \quad (1)$$

1. Введение и основные результаты. Рассмотрим задачу Коши

$$u_t = \operatorname{div}(u^n \nabla u) - u^\beta, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (3)$$

где $u = u(x, t) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, $t \geq 0$, $n \geq 0$, $0 < \beta < 1$. Уравнение (2) описывает процессы нелинейной теплопроводности со стоком, одновременно протекающие процессы диффузии и абсорбции, и т.д. [1]. Всюду в дальнейшем будем считать, что выполнено условие

$$u_0(x) = \varphi(|x|) > 0, \quad \varphi \in C^1(0, +\infty), \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = 0, \quad (4)$$

причем никаких ограничений на скорость убывания не накладывается. Решение задачи (2), (3) будем понимать в обобщенном смысле (см. [1]). Очевидно, что при выполнении условия (4) решение является радиально-симметричным.

Теоремы существования и единственности обобщенных решений, различные теоремы сравнения для задачи (2), (3) установлены в [2]–[4]. Качественному исследованию свойств решений задачи (2), (3) посвящены многие работы. Подробный обзор имеется в [1], [5]. Интересным является эффект мгновенной локализации (или же эффект мгновенной компактификации носителя решений), обнаруженный для уравнения (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть выполнено условие (4). Для решения задачи (2), (3) имеет место *эффект мгновенной локализации* (МЛ), если для любого $t \in (0, \delta]$, $\delta > 0$, существует $\eta(t) \in [0, +\infty)$ такое, что $u(x, t) = 0$ при $|x| \geq \eta(t)$.

Впервые эффект МЛ для уравнения (2) при $N = 1$, $n \geq 0$, $0 < \beta < 1$ (в случае произвольного N при $n = 0$, $0 < \beta < 1$) был обнаружен авторами [6]. В [7] исследовано влияние коэффициента, зависящего от точек пространства, на эффект МЛ для полулинейного уравнения $u_t = u_{xx} - c(x)u^\beta$ при степенных начальных функциях. Эффект МЛ в задаче Коши для уравнения $u_t = (u^n u_x)_x + (u^\beta)_x$ установлен в [8]. В [9] установлены локальные оценки границы носителя решений задачи (2), (3) при $n = 0$, $0 < \beta < 1$. Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ заданы согласно (1). В [9] доказано, что если $u_0(x) \leq M(1 + |x|)^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^N$, $M > 0$, $\alpha > 0$, то найдутся числа $T > 0$ и $A > 0$ такие, что $\xi(t) \leq At^{-1/(\alpha(1-\beta))}$, $0 < t \leq T$. Если же $u_0(x) \geq m(1 + |x|)^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^N$, $m > 0$, $\alpha > 0$, то найдутся числа $T > 0$ и $a > 0$ такие, что $\eta(t) \geq at^{-1/(\alpha(1-\beta))}$, $0 < t \leq T$.

В настоящей работе установлены точные локальные оценки границы носителя решений задачи (2), (3). Доказаны асимптотически точные формулы для границы носителя. В следующих теоремах сформулированы основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 1 - \beta$, выполнено условие (4), существует $\bar{r} > 0$ такое, что $\varphi' < 0$ при $r \geq \bar{r}$ и

$$\sup_{r \geq \bar{r}} |(\varphi^\gamma)''| < \infty, \quad \gamma = 1 - \beta.$$

Тогда для решения задачи (2), (3) имеет место эффект МЛ и для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что справедливы следующие локальные оценки:

$$\varphi^{-1}\left(\frac{1}{1-\varepsilon}((1-\beta+\varepsilon)t)^{1/(1-\beta)}\right) \leq \eta(t) \leq \xi(t) \leq \varphi^{-1}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}((1-\beta-\varepsilon)t)^{1/(1-\beta)}\right),$$

$$t \in (0, \delta], \quad (5)$$

где φ^{-1} — обратная к φ функция.

СЛЕДСТВИЕ 1. При условиях теоремы 1 справедлива следующая асимптотически точная формула:

$$\xi(t) \sim \varphi^{-1}(((1-\beta)t)^{1/(1-\beta)}), \quad \eta(t) \sim \varphi^{-1}(((1-\beta)t)^{1/(1-\beta)}), \quad t \rightarrow 0. \quad (6)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют $\rho_\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$[(1-\varepsilon)\varphi(|x|)]^{1-\beta} - (1-\beta+\varepsilon)t \Big|_+^{1/(1-\beta)} \leq u(x, t) \leq [((1+\varepsilon)\varphi(|x|))^{1-\beta} - (1-\beta-\varepsilon)t] \Big|_+^{1/(1-\beta)}, \quad (x, t) \in \{|x| \geq \rho_\varepsilon\} \times [0, \delta].$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \beta < 1$, $0 \leq n < 1 - \beta$, функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1 с $\gamma = (n + 1 - \beta)/2$ и в случае $n = 0$ дополнительно выполнено условие

$$(\varphi^{1-\beta})'' = o(1), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Тогда для решения задачи (2), (3) имеет место эффект МЛ и для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что справедливы следующие локальные оценки:

$$\varphi^{-1} \left(\frac{1}{1-\varepsilon} ((1-\beta+\varepsilon)t)^{1/(1-\beta)} \right) \leq \eta(t) \leq \xi(t) \leq \varphi^{-1}(k_1 t^{2/(n+1-\beta)}), \quad t \in (0, \delta], \quad (7)$$

где $k_1 > 0$ – произвольная постоянная.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют $\rho_\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} & [((1-\varepsilon)\varphi(|x|))^{1-\beta} - (1-\beta+\varepsilon)t]_+^{1/(1-\beta)} \leq u(x, t) \\ & \leq [((1+\varepsilon)\varphi(|x|))^{(n+1-\beta)/2} - kt]_+^{2/(n+1-\beta)}, \quad (x, t) \in \{|x| \geq \rho_\varepsilon\} \times [0, \delta], \end{aligned}$$

где $k = ((1+\varepsilon)k_1)^{(n+1-\beta)/2}$.

2. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим следующую функцию типа бегущей волны:

$$g(x, t) = f(\xi), \quad \xi = C - t - \int_0^r v(\eta) d\eta, \quad r = |x| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{1/2}, \quad (8)$$

где $C > 0$ – произвольная постоянная, $v \in C^1(0, +\infty)$, $|v'(r)| \leq M < +\infty$, $0 < v(r) \leq \mu$, и выполнено условие $\int_0^{+\infty} v(r) dr = C$. Возьмем произвольное достаточно малое $\varepsilon > 0$ и в качестве $f(\xi)$ рассмотрим функцию

$$f(\xi) = [(1-\beta-\varepsilon)\xi]_+^{1/(1-\beta)}, \quad \text{где } [\varkappa]_+ = \begin{cases} \varkappa, & \text{если } \varkappa \geq 0, \\ 0, & \text{если } \varkappa < 0. \end{cases}$$

Функция g удовлетворяет условию

$$g(x, 0) = \left((1-\beta-\varepsilon) \left(C - \int_0^r v(\eta) d\eta \right) \right)_+^{1/(1-\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (9)$$

Согласно (9) $g(x, 0) > 0$ при $x \in \mathbb{R}^N$ и $g(x, 0) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow +\infty$. Однако, в любой момент времени $t \in (0, C]$

$$g(x, t) = 0, \quad |x| \geq l(C - t),$$

где $r = l(z)$ – обратная функция к $z = \int_0^r v(\eta) d\eta$. Проверим, что $g(x, t)$ является супер-решением уравнения (2) при $(x, t) \in \{|x| > 0\} \times [0, t_1]$ для некоторого $t_1 > 0$:

$$\begin{aligned} Lg & \equiv g_t - \operatorname{div}(g^n \nabla g) + g^\beta = -f'(\xi) + v'(r) f^n f' + \frac{N-1}{r} v(r) f^n f' - v^2(r) (f^n f')' + f^\beta \\ & \geq -\frac{1-\beta-\varepsilon}{1-\beta} ((1-\beta-\varepsilon)\xi)^{\beta/(1-\beta)} - M \left(1 - \frac{\varepsilon}{1-\beta} \right) ((1-\beta-\varepsilon)\xi)^{(n+\beta)/(1-\beta)} \\ & \quad + \frac{N-1}{r} v(r) \frac{1-\beta-\varepsilon}{1-\beta} ((1-\beta-\varepsilon)\xi)^{(n+\beta)/(1-\beta)} + ((1-\beta-\varepsilon)\xi)^{\beta/(1-\beta)} \\ & \quad - (1-\beta)^{-2} (1-\beta-\varepsilon)^2 (n+\beta) \mu^2 ((1-\beta-\varepsilon)\xi)^{(n+2\beta-1)/(1-\beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq ((1 - \beta - \varepsilon)\xi)^{\beta/(1-\beta)} (\varepsilon(1 - \beta)^{-1} - M(1 - \beta)^{-1}(1 - \beta - \varepsilon)((1 - \beta - \varepsilon)\xi)^{n/(1-\beta)} \\ &\quad - \mu^2(1 - \beta)^{-2}(1 - \beta - \varepsilon)^2(n + \beta)((1 - \beta - \varepsilon)\xi)^{(n+\beta-1)/(1-\beta)}). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) следует, что если $n > 1 - \beta$, $0 < \beta < 1$, то для некоторого $\xi_0 = \xi_0(\varepsilon) > 0$

$$Lg \geq 0, \quad \xi \in [0, \xi_0]. \quad (11)$$

Если же $n = 1 - \beta$, $0 < \beta < 1$, то условие (11) также выполняется, если

$$0 < \mu < \varepsilon^{1/2}(1 - \beta)^{-1/2}. \quad (12)$$

Таким образом, если $0 < \beta < 1$, $n \geq 1 - \beta$, то для любого $C \in (0, \xi_0)$ функция g является суперрешением уравнения (2) при $(x, t) \in \{|x| > 0\} \times [0, t_1]$, $t_1 \in (0, C)$. Из условия (4) следует, что для любого $t > 0$ $u(x, t) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow +\infty$. Обозначим

$$r_\varepsilon(t) = \min\{r_* \geq 0 : u(x, t) \leq \varepsilon, |x| \geq r_*\}.$$

Пусть $\rho_\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию $\rho_\varepsilon \geq \bar{r}$ и

$$\rho_\varepsilon \geq \max_{0 \leq t \leq T} r_\varepsilon(t)$$

для некоторого $T > 0$. Обозначим

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(r) &= -(1 - \beta - \varepsilon)^{-1} ((1 + \varepsilon)\varphi(r))^{1-\beta}', \quad \rho_\varepsilon \leq r < +\infty, \\ C_\varepsilon &= (1 - \beta - \varepsilon)^{-1} ((1 + \varepsilon)\varphi(\rho_\varepsilon))^{1-\beta}. \end{aligned}$$

По выбранному $\varepsilon > 0$ сделаем ρ_ε настолько большим, чтобы $C_\varepsilon \in (0, \xi_0]$. Нетрудно проверить, что

$$\int_{\rho_\varepsilon}^{+\infty} v_\varepsilon(\eta) d\eta = C_\varepsilon. \quad (13)$$

Так как по условию теоремы $v'_\varepsilon(r)$ является ограниченной функцией при $r \in [\rho_\varepsilon, +\infty)$, из (13) следует

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} v_\varepsilon(r) = 0. \quad (14)$$

Ввиду (14) для некоторого r_1 $0 < v_\varepsilon(r) \leq \mu$ при $r \geq r_1$, где $\mu > 0$ удовлетворяет условию (12). Будем считать, что $\rho_\varepsilon \geq r_1$.

Теперь рассмотрим функцию

$$g_\varepsilon(x, t) = \left((1 - \beta - \varepsilon) \left[C_\varepsilon - t - \int_{\rho_\varepsilon}^{|x|} v_\varepsilon(\eta) d\eta \right]_+ \right)^{1/(1-\beta)}.$$

Как это сделано выше, можно доказать, что существует $t_1 \in (0, T)$ такое, что g_ε является суперрешением уравнения (2) при $(x, t) \in B_{\rho_\varepsilon} \times [0, t_1]$, где $B_{\rho_\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \geq \rho_\varepsilon\}$. Из (13) следует, что $g_\varepsilon(x, 0) > 0$ при $|x| \geq \rho_\varepsilon$. Далее имеем

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x, 0) &= \left((1 - \beta - \varepsilon) \left(C_\varepsilon - \int_{\rho_\varepsilon}^{|x|} v_\varepsilon(\eta) d\eta \right) \right)^{1/(1-\beta)} \\ &= \left((1 - \beta - \varepsilon) \int_{|x|}^{+\infty} v_\varepsilon(\eta) d\eta \right)^{1/(1-\beta)} = (1 + \varepsilon) \varphi(|x|) > \varphi(|x|), \quad |x| \geq \rho_\varepsilon, \\ g_\varepsilon(x, t)|_{|x|=\rho_\varepsilon} &= ((1 - \beta - \varepsilon)[C_\varepsilon - t]_+)^{1/(1-\beta)}, \quad 0 \leq t \leq t_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как

$$g_\varepsilon(x, 0)|_{|x|=\rho_\varepsilon} = ((1 - \beta - \varepsilon)C_\varepsilon)^{1/(1-\beta)} = (1 + \varepsilon)\varphi(\rho_\varepsilon) > \varphi(\rho_\varepsilon), \quad (16)$$

существует $\delta_1 > 0$ такое, что

$$g_\varepsilon(x, t)|_{|x|=\rho_\varepsilon} = u(x, t)|_{|x|=\rho_\varepsilon} \quad t \in [0, \delta_1].$$

Обозначим $\delta_2 = \min\{\delta_1, t_1\}$. Учитывая (15), (16) и применяя теорему сравнения для уравнения (2), получим оценку $0 \leq u(x, t) \leq g_\varepsilon(x, t)$, $(x, t) \in B_{\rho_\varepsilon} \times [0, \delta_2]$. Отсюда и из свойств g_ε следует, что

$$u(x, t) = 0, \quad |x| \geq l_\varepsilon(C_\varepsilon - t), \quad 0 < t \leq \delta_2, \quad (17)$$

где $r = l_\varepsilon(z)$ – обратная функция к функции $z = \int_{\rho_\varepsilon}^r v_\varepsilon(\eta) d\eta$. Так как

$$\int_{\rho_\varepsilon}^r v_\varepsilon(\eta) d\eta = C_\varepsilon - (1 - \beta - \varepsilon)^{-1}((1 + \varepsilon)\varphi(r))^{1-\beta},$$

имеем

$$l_\varepsilon(C_\varepsilon - t) = \varphi^{-1}((1 + \varepsilon)^{-1}((1 - \beta - \varepsilon)t)^{1/(1-\beta)}).$$

Поэтому из (17) следует, что

$$u(x, t) = 0, \quad |x| \geq \varphi^{-1}((1 + \varepsilon)^{-1}((1 - \beta - \varepsilon)t)^{1/(1-\beta)}), \quad t \in (0, \delta_2),$$

откуда следует наличие эффекта МЛ и правая часть оценки (5).

Перейдем к доказательству левой части оценки (5). Схема доказательства такая же. Рассмотрим функцию g из (8), где C, v такие же, как и в (8), (9). В качестве f возьмем функцию

$$f(\xi) = [(1 - \beta + \varepsilon)\xi]_+^{1/(1-\beta)}.$$

Проверим, что g является субрешением уравнения (2) при $(x, t) \in B_{r_0} \times [0, t_1]$ для некоторых $t_1 > 0$ и $r_0 > 0$:

$$\begin{aligned} Lg &= -f'(\xi) + v'(r)f^n f' + r^{-1}(N - 1)v(r)f^n f' - v^2(r)(f^n f')' + f^\beta \\ &\leq -f' + Mf^n f' + r_0^{-1}(N - 1)\mu f^n f' + f^\beta \\ &= -\left(1 + \frac{\varepsilon}{1 - \beta}\right)((1 - \beta + \varepsilon)\xi)^{\beta/(1-\beta)} + M_1\left(1 + \frac{\varepsilon}{1 - \beta}\right)((1 - \beta + \varepsilon)\xi)^{(n+\beta)/(1-\beta)} \\ &\quad + ((1 - \beta + \varepsilon)\xi)^{\beta/(1-\beta)} \\ &= ((1 - \beta + \varepsilon)\xi)^{\beta/(1-\beta)} \left\{ -\frac{\varepsilon}{1 - \beta} + M_1\left(1 + \frac{\varepsilon}{1 - \beta}\right)((1 - \beta + \varepsilon)\xi)^{n/(1-\beta)} \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $M_1 = M + (\mu(N - 1))/r_0$. Из (18) следует, что существует $\xi_1 = \xi_1(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$Lg \leq 0, \quad \xi \in [0, \xi_1].$$

Таким образом, для любого $C \in (0, \xi_1)$ функция g является субрешением уравнения (2) при $(x, t) \in B_{r_0} \times [0, t_1]$, $t_1 \in (0, C)$.

Как и выше, определим точку $\rho_\varepsilon \geq \max\{r_0, \bar{r}\}$. Пусть

$$v_\varepsilon(r) = -(1 - \beta + \varepsilon)^{-1} \left(((1 - \varepsilon)\varphi(r))^{1-\beta} \right)', \quad \rho_\varepsilon \leq r < +\infty, \\ C_\varepsilon = (1 - \beta + \varepsilon)^{-1} \left(((1 - \varepsilon)\varphi(\rho_\varepsilon))^{1-\beta} \right).$$

Точно также доказываются условия (13), (14). Пусть

$$g_\varepsilon(x, t) = \left((1 - \beta + \varepsilon) \left[C_\varepsilon - t - \int_{\rho_\varepsilon}^{|x|} v_\varepsilon(\eta) d\eta \right]_+ \right)^{1/(1-\beta)}.$$

Аналогично тому, как это сделано выше, можно доказать, что g является субрешением уравнения (2) при $(x, t) \in B_{\rho_\varepsilon} \times [0, t_1]$, $t_1 > 0$. Из (13) следует, что $g_\varepsilon(x, 0) > 0$ при $|x| \geq \rho_\varepsilon$. Далее имеем

$$g_\varepsilon(x, 0) = (1 - \varepsilon)\varphi(|x|) < \varphi(|x|), \quad |x| \geq \rho_\varepsilon, \\ g_\varepsilon(x, t)|_{|x|=\rho_\varepsilon} = ((1 - \beta + \varepsilon)[C_\varepsilon - t]_+)^{1/(1-\beta)}, \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (19)$$

Так как

$$g_\varepsilon(x, 0)|_{|x|=\rho_\varepsilon} = ((1 - \beta + \varepsilon)C_\varepsilon)^{1/(1-\beta)} = (1 - \varepsilon)\varphi(\rho_\varepsilon) < \varphi(\rho_\varepsilon),$$

существует $\delta_1 > 0$ такое, что

$$g_\varepsilon(x, t)|_{|x|=\rho_\varepsilon} \leq u(x, t)|_{|x|=\rho_\varepsilon}, \quad t \in [0, \delta_1]. \quad (20)$$

Обозначим $\delta_2 = \min\{\delta_1, t_1\}$. Учитывая (19), (20) и применяя теорему сравнения для уравнения (2), получим оценку

$$u(x, t) \geq g_\varepsilon(x, t), \quad (x, t) \in B_{\rho_\varepsilon} \times [0, \delta_2].$$

Отсюда и из свойств g_ε следует, что

$$u(x, t) > 0, \quad \rho_\varepsilon \leq |x| < l_\varepsilon(C_\varepsilon - t), \quad 0 \leq t \leq \delta_2,$$

где $r = l_\varepsilon(z)$ — обратная функция к $z = \int_{\rho_\varepsilon}^r v_\varepsilon(\eta) d\eta$. Отметим, что если $u(x, 0) > 0$ при $|x| \leq \rho_\varepsilon$, то, уменьшая в случае необходимости δ_2 , всегда можно добиться выполнения условия

$$u(x, t) > 0, \quad |x| < l_\varepsilon(C_\varepsilon - t), \quad 0 \leq t \leq \delta_2. \quad (21)$$

Очевидно,

$$l_\varepsilon(C_\varepsilon - t) = \varphi^{-1} \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} ((1 - \beta + \varepsilon)t)^{1/(1-\beta)} \right).$$

Поэтому из (21) следует, что

$$u(x, t) > 0, \quad |x| < \varphi^{-1} \left(\frac{1}{1-\varepsilon} ((1-\beta+\varepsilon)t)^{1/(1-\beta)} \right), \quad t \in (0, \delta_2].$$

Таким образом, оценка (5) полностью доказана. Теорема доказана.

Так как φ является строго монотонно убывающей при $|x| \rightarrow +\infty$, из (5) следует

$$\frac{1}{1+\varepsilon} ((1-\beta-\varepsilon)t)^{1/(1-\beta)} \leq \varphi(\xi(t)) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} ((1-\beta+\varepsilon)t)^{1/(1-\beta)}, \quad t \in (0, \delta],$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{((1-\beta-\varepsilon)t)^{1/(1-\beta)}}{((1-\beta)t)^{1/(1-\beta)}} &\leq \frac{\varphi(\xi(t))}{((1-\beta)t)^{1/(1-\beta)}} \\ &\leq \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{((1-\beta+\varepsilon)t)^{1/(1-\beta)}}{((1-\beta)t)^{1/(1-\beta)}}, \quad t \in (0, \delta]. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \left(\frac{1-\beta-\varepsilon}{1-\beta} \right)^{1/(1-\beta)} \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi(t))}{((1-\beta)t)^{1/(1-\beta)}} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \left(\frac{1-\beta+\varepsilon}{1-\beta} \right)^{1/(1-\beta)}.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi(t))}{((1-\beta)t)^{1/(1-\beta)}} = 1$$

или

$$\varphi(\xi(t)) \sim ((1-\beta)t)^{1/(1-\beta)}, \quad t \rightarrow 0,$$

откуда следует асимптотическая формула (6) для $\xi(t)$. Аналогично доказывается асимптотическая формула для $\eta(t)$. Следствие доказано. Следствие 2 непосредственно следует из доказательства теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 2. Отметим, что левая часть оценки (7) доказана нами в теореме 1. Действительно, как нетрудно заметить, при доказательстве левой части оценки (5) мы использовали только лишь условие $n > 0$ (см. (18)). Остается рассмотреть случай $n = 0$. В этом случае второе слагаемое в фигурных скобках из (18) не равно 0 при $\xi = 0$. Однако, опираясь на условие теоремы 2, по любому заданному достаточно малому $\varepsilon > 0$ точка ρ_ε может быть выбрана так, что

$$M_1 = M + (N-1)\rho_\varepsilon^{-1}\mu \equiv \sup_{r \geq \rho_\varepsilon} (|v'_\varepsilon(r)| + (N-1)\rho_\varepsilon^{-1}|v_\varepsilon(r)|) < \varepsilon(1-\beta+\varepsilon)^{-1}.$$

В этом случае из (18) опять следует, что $Lg \leq 0$ при $\xi \in [0, \xi_1]$ для некоторого $\xi_1 > 0$. Следовательно, нам достаточно доказать правую часть оценки (7). Схема доказательства такая же, как и в доказательстве теоремы 1.

Рассмотрим функцию g из (8), где C, v такие же, как и в (8), (9). В качестве f возьмем функцию

$$f(\xi) = (k\xi)^{2/(n+1-\beta)}, \quad k > 0.$$

Проверим, что g является суперрешением уравнения (2) при $(x, t) \in \{|x| > 0\} \times [0, t_1]$ для некоторого $t_1 > 0$:

$$\begin{aligned} Lg &= -f'(\xi) + v'(r)f^n f' + (N-1)r^{-1}v(r)f^n f' - v^2(r)(f^n f')' + f^\beta \\ &\geq -2k(n+1-\beta)^{-1}(k\xi)^{(1+\beta-n)/(n+1-\beta)} - 2kM(n+1-\beta)^{-1}(k\xi)^{(n+1+\beta)/(n+1-\beta)} \\ &\quad - 2k^2\mu^2(n+1+\beta)(n+1-\beta)^{-2}(k\xi)^{2\beta/(n+1-\beta)} + (k\xi)^{2\beta/(n+1-\beta)} \\ &= (k\xi)^{2\beta/(n+1-\beta)} \left(1 - \frac{2k}{n+1-\beta}(k\xi)^{(1-\beta-n)/(n+1-\beta)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2k^2M}{n+1-\beta}\xi - \frac{2k^2\mu^2(n+1+\beta)}{(n+1-\beta)^2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть выполнено условие

$$0 < \mu^2 < (2k^2(n+1+\beta))^{-1}(n+1-\beta)^2. \quad (23)$$

В этом случае из (22) следует, что для некоторого $\xi_0 = \xi_0(\varepsilon) > 0$

$$Lg \geq 0, \quad \xi \in [0, \xi_0].$$

Таким образом, для любого $C \in (0, \xi_0)$ функция g является суперрешением уравнения (2) при $\{|x| > 0\} \times [0, t_1]$, $t_1 \in (0, C)$.

Аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 1, определим $\rho_\varepsilon > 0$. Пусть

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(r) &= -k^{-1}(((1+\varepsilon)\varphi(r))^{(n+1-\beta)/2})', \quad \rho_\varepsilon \leq r < +\infty, \\ C_\varepsilon &= k^{-1}((1+\varepsilon)\varphi(\rho_\varepsilon))^{(n+1-\beta)/2}. \end{aligned}$$

Сделаем ρ_ε настолько большим, чтобы $C_\varepsilon \in [0, \xi_0]$. Нетрудно проверить, что для выбранных v_ε и C_ε выполняются условия (13) и (14).

Ввиду (14) для некоторого r_1 $0 \leq v_\varepsilon \leq \mu$ при $r \geq r_1$, где $\mu > 0$ удовлетворяет условию (23). Будем считать, что $\rho_\varepsilon \geq r_1$. Далее рассмотрим функцию

$$g_\varepsilon(x, t) = \left(k \left[C_\varepsilon - t - \int_{\rho_\varepsilon}^{|x|} v_\varepsilon(\eta) d\eta \right]_+ \right)^{2/(n+1-\beta)}.$$

Аналогично тому, как это сделано выше, можно доказать, что существует $t_1 > 0$ такое, что $g_\varepsilon(x, t)$ является суперрешением уравнения (2) при $(x, t) \in B_{\rho_\varepsilon} \times [0, t_1]$. Далее имеем

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x, 0) &= (1+\varepsilon)\varphi(|x|) > \varphi(|x|), \quad |x| \geq \rho_\varepsilon, \\ g_\varepsilon(x, t)|_{|x|=\rho_\varepsilon} &= (k[C_\varepsilon - t]_+)^{2/(n+1-\beta)}, \quad 0 \leq t \leq t_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Так как

$$g_\varepsilon(x, 0)|_{|x|=\rho_\varepsilon} = (kC_\varepsilon)^{2/(n+1-\beta)} = (1+\varepsilon)\varphi(\rho_\varepsilon) > \varphi(\rho_\varepsilon),$$

существует $\delta_1 > 0$ такое, что

$$g_\varepsilon(x, t)|_{|x|=\rho_\varepsilon} \geq u(x, t)|_{|x|=\rho_\varepsilon}, \quad t \in [0, \delta_1]. \quad (25)$$

Обозначим $\delta_2 = \min\{\delta_1, t_1\}$. Учитывая (24), (25) и теорему сравнения для уравнения (2), получим оценку

$$0 \leq u(x, t) \leq g_\varepsilon(x, t), \quad (x, t) \in B_{\rho_\varepsilon} \times [0, \delta_2]. \quad (26)$$

Отсюда и из свойств g_ε следует, что

$$u(x, t) = 0, \quad |x| \geq l_\varepsilon(C_\varepsilon - t), \quad 0 < t \leq \delta_2,$$

где $r = l_\varepsilon(z)$ — обратная функция к

$$z = \int_{\rho_\varepsilon}^r v_\varepsilon(\eta) d\eta = C_\varepsilon - k^{-1}((1+\varepsilon)\varphi(r))^{(n+1-\beta)/2},$$

т.е.

$$l_\varepsilon(C_\varepsilon - t) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}(kt)^{2/(n+1-\beta)}\right).$$

Таким образом, из (26) получаем, что

$$u(x, t) = 0, \quad |x| \geq \varphi^{-1}(k_1 t^{2/(n+1-\beta)}), \quad t \in (0, \delta],$$

откуда следует наличие эффекта МЛ и правая часть оценки (7).

Очевидно, что длина временного интервала δ зависит от k_1 . Теорема доказана.

Следствие 3 непосредственно вытекает из доказательства теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Калашников А. С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. 1987. Т. 42. № 2 (254). С. 135–176.
- [2] Кершнер Р. О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Acta Math. Hungar. 1978. V. 32. P. 301–330.
- [3] Sacks P. E. The initial and boundary value problem for a class of degenerate parabolic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1983. V. 8. P. 693–733.
- [4] Bertch M. A. A class of degenerate diffusion equations with a singular term // Nonlinear Anal. 1983. V. 7. P. 117–127.
- [5] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
- [6] Evans L. C., Knerr B. K. Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities // Illinois J. Math. 1979. V. 23. № 1. P. 153–166.
- [7] Калашников А. С. О зависимости свойств решений параболических уравнений в неограниченных областях от поведения коэффициентов на бесконечности // Матем. сб. 1984. Т. 125. № 3. С. 398–409.
- [8] Gilding B. H., Kersner R. Instantaneous shrinking in nonlinear diffusion convection // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109. P. 385–394.
- [9] Калашников А. С. О поведении вблизи начальной гиперплоскости решений задачи Коши для параболических систем с нелинейной диссипацией // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. 1992. Т. 16. С. 106–113.

Бакинский государственный университет им. М. Э. Расулзаде

Поступило

13.07.94

Исправленный вариант

10.09.97