Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, Об аддитивных неравенствах для промежуточных производных дифференцируемых отображений банаховых пространств, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 332–342

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1287>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 04:54:30

УДК 517.5

ОБ АДДИТИВНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов

Пусть X, Y – вещественные банаховы пространства, $U \subset X$ – открытое ограниченное множество, звездное относительно некоторой точки, $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$, $M_{n,k}(U, Y)$ – точная константа в неравенстве типа Маркова для производных полиномиальных отображений. Доказано, что при любом $M \geq M_{n,k}(U, Y)$ существует константа $B > 0$ такая, что для любой функции $f \in C^n(U, Y)$ имеет место неравенство

$$\|f^{(k)}\|_U \leq M \|f\|_U + B \|f^{(n)}\|_U.$$

Константа $M = M_{n-1,k}(U, Y)$ является наилучшаемой в том смысле, что $M_{n-1,k}(U, Y) = \inf M$, где $\inf$ берется по всем M таким, что для некоторого $B > 0$ оценка выполняется для всех $f \in C^n(U, Y)$.

Библиография: 15 названий.

1. Пусть X и Y – банаховы пространства над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Для любого $n \in \mathbb{N}$ будем через $\mathcal{L}_n(X, Y)$ обозначать пространство n -линейных (т.е. линейных по каждой переменной при фиксированных остальных переменных) отображений $F: X \rightarrow Y$, где X^n – декартово произведение n экземпляров пространства X . В частности, $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}_1(X, Y)$ – пространство линейных непрерывных отображений $F: X \rightarrow Y$. Норма отображения $F \in \mathcal{L}_n(X, Y)$ определяется равенством

$$\|F\|_{\mathcal{L}_n(X, Y)} := \sup\{\|F(x_1, \dots, x_n)\|_Y : x_i \in X, \|x_i\|_X = 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Пусть $U \subset X$ – непустое, открытое, ограниченное множество; $f: U \rightarrow Y$ – отображение класса $C^n = C^n(U; Y)$; $f^{(k)}$ – k -е производное отображение для f (по поводу используемых в данной статье понятий теории дифференцируемых отображений банаховых пространств см. [1, гл. 1]). Как известно, при любом $n \geq 2$ имеет место естественная изометрия

$$\mathcal{L}(X; \mathcal{L}_{n-1}(X, Y)) \approx \mathcal{L}_n(X, Y),$$

в силу которой k -е производное отображение для f можно трактовать как отображение $f^{(k)}: U \rightarrow \mathcal{L}_k(X, Y)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда, грант U92000, и Государственного комитета Украины по науке и технике.

Для $f \in C^n(U; Y)$ положим

$$\|f\|_U = \sup_{x \in U} \|f(x)\|_Y$$

и (при $1 \leq k \leq n$)

$$\|f^{(k)}\|_U = \sup_{x \in U} \|f^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}_k(X, Y)}.$$

В данной статье нас будет интересовать вопрос о существовании постоянных A и B таких, что для любого отображения $f \in C^n(U; Y)$ при фиксированных n и $1 \leq k < n$ имеет место неравенство

$$\|f^{(k)}\|_U \leq A\|f\|_U + B\|f^{(n)}\|_U, \quad (1)$$

а также вопрос о точных константах в этом неравенстве. Эти вопросы восходят к работам Ландау [2] и Адамара [3] и для функций $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ исследовались многими авторами (постановки задач, изложение ряда результатов и библиографию можно найти, например, в [4]–[6]). По поводу некоторых результатов, относящихся к числовым функциям многих переменных, см., например, [7].

Мы покажем, что вопрос о принципиальной возможности неравенства (1) тесно связан с выполнимостью неравенства типа Маркова для полиномиальных отображений X в Y и, более того, точная константа в соответствующем неравенстве типа Маркова дает наилучшаемую константу A в (1).

2. Через $\mathcal{P}_n(X, Y)$ будем обозначать *пространство полиномиальных отображений* (полиномов) степени не выше n , действующих из X в Y , т.е. (см. [1, гл. 1]) пространство всех отображений $P_n: X \rightarrow Y$ вида

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n u_j(x, \dots, x),$$

где $u_j \in \mathcal{L}_j(X, Y)$ для $j \geq 1$, а u_0 – постоянное отображение X в Y (однородный полином степени 0). Отметим, что если $P_n \in \mathcal{P}_n(X, Y)$ и $0 \leq k \leq n$, то $P_n^{(k)} \in \mathcal{P}_{n-k}(X, \mathcal{L}_k(X, Y))$.

Для фиксированных $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$, и ограниченного открытого множества $U \subset X$ положим

$$M_{n,k}(U, Y) := \sup\{\|P_n^{(k)}\|_U : P_n \in \mathcal{P}_n(X, Y), \|P_n\|_U \leq 1\}.$$

Если $X = Y = \mathbb{R}$ и $U = (a, b) \subset \mathbb{R}$, то $M_{n,k}(U, Y)$ есть точная константа в неравенстве Маркова [8] для производных алгебраических полиномов. В частности, если

$$T_n(x) = \cos n \arccos x = 2^{n-1}x^n + \dots, \quad x \in [-1, 1],$$

– полином Чебышева первого рода, то

$$M_{n,k}((-1, 1), \mathbb{R}) = \|T_n^{(k)}\|_{C[-1, 1]} = T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2 - 1) \cdots (n^2 - (k - 1)^2)}{(2k - 1)!!}.$$

В общем случае конечность $M_{n,k}(U, Y)$ означает справедливость для полиномов из $\mathcal{P}_n(X, Y)$ неравенства типа Маркова

$$\|P_n^{(k)}\|_U \leq M\|P_n\|_U, \quad (2)$$

и $M_{n,k}(U, Y)$ в этом случае есть точная константа в неравенстве (2).

Очевидно, что если найдутся числа A и B такие, что неравенство (1) имеет место для любого $f \in C^n(U, Y)$, то $M_{n-1,k}(U, Y) \leq A < \infty$, и следовательно, для полиномов из $\mathcal{P}_{n-1}(X, Y)$ имеет место неравенство (2). Мы покажем, что если множество U является звездным, то верно и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $U \subset X$ – открытое, ограниченное множество, звездное относительно некоторой своей точки, $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$. Если $M_{n-1,k}(U, Y) < \infty$, то найдется $B > 0$ такое, что для любого $f \in C^n(U, Y)$

$$\|f^{(k)}\|_U \leq M_{n-1,k}(U, Y) \|f\|_U + B \|f^{(n)}\|_U. \quad (3)$$

При этом константа $M_{n-1,k}(U, Y)$ в (3) неуплучшаема в том смысле, что

$$M_{n-1,k}(U, Y) = \inf A,$$

где $\inf$ берется по всем A таким, что с некоторой константой B неравенство (1) имеет место для всех $f \in C^n(U, Y)$.

Отметим, что для функций $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ задача отыскания неуплучшаемой в указанном смысле константы A в неравенствах типа (1) изучалась в работах [4], [5], [9]–[11]. В частности, в [11] была отмечена связь такой константы с точной константой в некотором неравенстве типа Маркова–Никольского.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть множество U является звездным относительно точки $a \in U$, и пусть $f \in C^n(U, Y)$. Обозначим через $P_{n-1}(f, a)$ связанный с точкой a полином Тейлора степени $n - 1$ для отображения f , т.е. для $h \in X$

$$P_{n-1}(f, a)(h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (h)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \cdot (h)^{n-1},$$

где для краткости через $(h)^k$ обозначен элемент $(h, \dots, h) \in X^k$. Отметим, что для любого $k = 1, 2, \dots, n - 1$ и любого $h \in X$

$$P_{n-k-1}(f^{(k)}, a)(h) = (P_{n-1}(f, a))^{(k)}(h).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}\|_U &= \sup_{h \in -a+U} \|f^{(k)}(a+h)\|_{\mathcal{L}_k(X, Y)} \\ &= \sup_{h \in -a+U} \|f^{(k)}(a+h) - P_{n-k-1}(f^{(k)}, a)(h) + (P_{n-1}(f, a))^{(k)}(h)\|_{\mathcal{L}_k(X, Y)} \\ &\leq \sup_{h \in -a+U} \|f^{(k)}(a+h) - P_{n-k-1}(f^{(k)}, a)(h)\|_{\mathcal{L}_k(X, Y)} \\ &\quad + \sup_{h \in -a+U} \|(P_{n-1}(f, a))^{(k)}(h)\|_{\mathcal{L}_k(X, Y)}. \end{aligned}$$

Полагая $f^{(0)} = f$ и применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (см. [1, теорема 5.6.2]), будем при всех $k = 0, 1, \dots, n - 1$ и $h \in -a + U$ иметь

$$\|f^{(k)}(a+h) - P_{n-k-1}(f^{(k)}, a)(h)\|_{\mathcal{L}_k(X, Y)} \leq \frac{\|f^{(n)}\|_U \cdot \|h\|_X^{n-k}}{(n-k)!} \leq \frac{R_a(U)^{n-k}}{(n-k)!} \|f^{(n)}\|_U, \quad (4)$$

где $R_a(U) = \sup\{\|x - a\|_X : x \in U\}$ – радиус наименьшего шара с центром в a , содержащего множество U .

Далее заметим, что при любом $a \in X$ $M_{n,k}(a+U, Y) = M_{n,k}(U, Y)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{h \in -a+U} \|(P_{n-1}(f, a))^{(k)}(h)\|_{\mathcal{L}_k(X, Y)} &= \| (P_{n-1}(f, a))^{(k)} \|_{-a+U} \\ &\leq M_{n-1,k}(U, Y) \|P_{n-1}(f, a)\|_{-a+U} = M_{n-1,k}(U, Y) \sup_{h \in -a+U} \|P_{n-1}(f, a)(h)\|_Y \\ &\leq M_{n-1,k}(U, Y) \left(\sup_{h \in -a+U} \|f(a+h) - P_{n-1}(f, a)(h)\|_Y + \sup_{h \in -a+U} \|f(a+h)\|_Y \right), \end{aligned}$$

откуда, используя (4), получаем

$$\sup_{h \in -a+U} \|(P_{n-1}(f, a))^{(k)}(h)\|_{\mathcal{L}_k(X, Y)} \leq M_{n-1,k}(U, Y) \left(\frac{R_a(U)^n}{n!} \|f^{(n)}\|_U + \|f\|_U \right). \quad (5)$$

Учитывая полученную в начале доказательства оценку для $\|f^{(k)}\|_U$ и неравенства (4), (5), будем иметь

$$\|f^{(k)}\|_U \leq M_{n-1,k}(U, Y) \|f\|_U + \left(M_{n-1,k}(U, Y) \frac{R_a(U)^n}{n!} + \frac{R_a(U)^{n-k}}{(n-k)!} \right) \|f^{(n)}\|_U. \quad (6)$$

Таким образом, неравенство (3) с константой

$$B = M_{n-1,k}(U, Y) \frac{R_a(U)^n}{n!} + \frac{R_a(U)^{n-k}}{(n-k)!}$$

доказано.

Неулучшаемость константы $M_{n-1,k}(U, Y)$ при $\|f\|_U$ в (3) легко следует из того, что $P_{n-1}^{(n)} = 0$ для любого $P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}(X, Y)$.

Теорема доказана.

Из (6) немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Если U – непустое, открытое, ограниченное, выпуклое множество и

$$R(U) = \inf_{a \in U} R_a(U)$$

– чебышевский радиус множества U , то для константы B в неравенстве (3) справедлива оценка

$$B \leq M_{n-1,k}(U, Y) \frac{R(U)^n}{n!} + \frac{R(U)^{n-k}}{(n-k)!}. \quad (7)$$

Из результатов работы [12] следует, что если U – непустое, открытое, ограниченное, выпуклое множество и

$$r(U) = \sup\{r \geq 0 : \exists x \in U, B(x, r) \subset U\},$$

где $B(x, r)$ – открытый шар радиуса r с центром x , то для точной константы $M_{n,1}(U, Y)$ справедливы оценки

$$\frac{n^2}{r(U)} \leq M_{n,1}(U, Y) \leq \frac{4n^2}{r(U)}, \quad (8)$$

где левое неравенство получено при дополнительном предположении, что множество U центрально-симметричное.

Сопоставляя теорему 1, соотношение (8) и неравенство (7), устанавливаем, что имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если $U \subset X$ – непустое, открытое, ограниченное, выпуклое множество, то для любого $f \in C^n(U, Y)$ имеет место неравенство

$$\|f'\|_U \leq \frac{4(n-1)^2}{r(U)} \|f\|_U + \left(\frac{4(n-1)^2}{r(U)} \frac{R(U)^n}{n!} + \frac{R(U)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \|f^{(n)}\|_U.$$

В работе [12, теорема 3] доказано неравенство для нормы производной полиномиального отображения $\|P'_n(x)\|_{\mathcal{L}_1(X, Y)}$, учитывающего положение точки x . А именно, для заданного непустого, открытого, ограниченного, выпуклого множества $U \subset X$, точки $x_0 \in U$ и числа $\omega \in (0, 1)$ через $U_\omega(x_0)$ обозначим ω -сжатие U относительно точки x_0 , т.е.

$$U_\omega(x_0) = \left\{ x \in X : x_0 + \frac{x - x_0}{\omega} \in U \right\}.$$

Пусть также для $x_0, x \in U$

$$r(x_0) = \sup\{r > 0 : B(x_0, r) \subset U\}, \quad \rho(x, x_0) = \inf\{\omega \geq 0 : x \in U_\omega(x_0)\},$$

$$b(x) = \inf_{x_0 \in U} \frac{1}{r(x_0) \sqrt{1 - \rho(x, x_0)}}.$$

Тогда [12]

$$\|P'_n(x)\|_{\mathcal{L}_1(X, Y)} \leq 3b(x)n\|P_n\|_U. \quad (9)$$

Теперь из теоремы 1 и неравенства (9) мы получаем оценку нормы производной отображения $f(x)$ с учетом положения аргумента x .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $U \subset X$ – непустое, открытое, ограниченное, выпуклое множество. Тогда для данного $n \in \mathbb{N}$ найдется $B > 0$ такое, что для любого $f \in C^n(U, Y)$ и любого $x \in U$ справедливо неравенство

$$\|f'(x)\|_{\mathcal{L}_1(X, Y)} \leq \min \left\{ \frac{4(n-1)^2}{r(U)}, 3b(x)(n-1) \right\} \|f\|_U + B \|f^{(n)}\|_U.$$

3. Через $W_\infty^n((-1, 1)^m)$, $m, n \in \mathbb{N}$, обозначим класс вещественнозначных функций $f \in L_\infty(-1, 1)^m$, имеющих для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ такого, что $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$, обобщенную в смысле Соболева производную $D^\alpha f$, принадлежащую $L_\infty(-1, 1)^m$.

Положим для $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$,

$$\nabla^k f = (D^\alpha f)_{|\alpha|=k}, \quad \|\nabla^k f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L_\infty(-1, 1)^m}.$$

Пусть для $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$,

$$M_{n,k}^* := \sup\{\|\nabla^k P_n\|_\infty : P_n \in \mathcal{P}_{n,m}, \|P_n\|_{L_\infty(-1, 1)^m} \leq 1\},$$

где $\mathcal{P}_{n,m} = \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ – множество алгебраических полиномов от m переменных, степени не выше n в том смысле, что сумма степеней в каждом мономе не превосходит n .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $k, m, n \in \mathbb{N}$, $k < n$. Тогда для любой функции $f \in W_\infty^n((-1, 1)^m)$ имеет место неравенство

$$\|\nabla^k f\|_\infty \leq M_{n-1,k}^* \|f\|_{L_\infty((-1,1)^m)} + B \|\nabla^n f\|_\infty \quad (10)$$

с некоторой константой B , не зависящей от f . При этом константа $M_{n-1,k}^*$ в (10) неуклучаема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала неравенство (10) мы докажем для функций f , имеющих в $(-1, 1)^m$ непрерывные частные производные до порядка n включительно. Такие функции f являются функциями класса $C^n((-1, 1)^m, \mathbb{R})$. Тогда в силу теоремы 1 будем иметь

$$\|f^{(k)}\|_{(-1,1)^m} \leq M_{n-1,k}((-1, 1)^m, \mathbb{R}) \|f\|_{(-1,1)^m} + B \|f^{(n)}\|_{(-1,1)^m}. \quad (11)$$

Отметим (см., например, [13, с. 210], что для $f \in C^n((-1, 1)^m, \mathbb{R})$ при любом $0 < k \leq n$ для любого набора векторов $h^i = (h_1^i, \dots, h_m^i)$, $i = 1, \dots, k$, имеет место равенство

$$f^{(k)}(x)(h^1, \dots, h^k) = \sum_{(j_1, \dots, j_k)} \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} f(x) h_{j_1}^1 h_{j_2}^2 \dots h_{j_k}^k, \quad (12)$$

где сумма распространяется на все m^k наборов различных последовательностей $(j_1, \dots, j_k)$ целых чисел, принадлежащих $[1, m]$.

Считая, что пространство $\mathbb{R}^m$ снабжено l_1 -нормой

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^m |x_j|,$$

и вычисляя норму k -линейного функционала

$$f^{(k)}(x): \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{k \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R},$$

определяемого соотношением (12), получаем

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})} &= \sup_{\substack{\|h^i\|_1 \leq 1 \\ i=1, \dots, k}} \left| \sum_{(j_1, \dots, j_k)} \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} f(x) h_{j_1}^1 \dots h_{j_k}^k \right| \\ &= \max_{(j_1, \dots, j_k)} \left| \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} f(x) \right|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}\|_{(-1,1)^m} &= \sup_{x \in (-1,1)^m} \|f^{(k)}(x)\|_{\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})} \\ &= \|\nabla^k f\|_\infty, \quad M_{n-1,k}((-1, 1)^m, \mathbb{R}) = M_{n-1,k}^*. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь из (11) и (13) следует (10) для любой $f \in C^n((-1, 1)^m, \mathbb{R})$.

Пусть теперь f – произвольная функция из $W_\infty^n((-1, 1)^m)$. Продолжим ее на все $\mathbb{R}^m$, полагая равной 0 вне $(-1, 1)^m$, и рассмотрим ее усреднение f_ε по Соболеву [14, с. 71]

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi\left(\frac{|x-u|}{\varepsilon}\right) f(u) du, \quad \varepsilon > 0,$$

где $\varphi(t): [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ – бесконечно дифференцируемая, четная, неотрицательная функция, причем

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 1.$$

Тогда f_ε также бесконечно дифференцируема,

$$\|f_\varepsilon\|_{L_\infty(-1,1)^m} \leq \|f\|_{L_\infty(-1,1)^m}$$

и $(D^\alpha f_\varepsilon)(x) = (D^\alpha f)_\varepsilon(x)$ для всех α ($|\alpha| \leq n$), $x \in (-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^m$.

Заметим, что если в (10) область аргументов $(-1, 1)^m$ заменить на $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^m$ ($\varepsilon \in (0, 1)$), то неравенство (10) для функций g из $W_\infty^n((-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^m)$ приобретет вид

$$\|\nabla^k g\|_{\infty, \varepsilon} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^k} M_{n-1, k}^* \|g\|_{L_\infty(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^m} + (1-\varepsilon)^{n-k} B \|\nabla^n g\|_{\infty, \varepsilon},$$

где

$$\|\nabla^k g\|_{\infty, \varepsilon} := \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha g\|_{L_\infty(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^m}$$

(для доказательства этого факта достаточно применить (10) к функции $g(y(1-\varepsilon)^{-1})$ из $W_\infty^n((-1, 1)^m)$).

Следовательно, для любого α такого, что $|\alpha| = k$, $k < n$,

$$\begin{aligned} \|(D^\alpha f)_\varepsilon\|_{L_\infty(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^m} &= \|D^\alpha(f_\varepsilon)\|_{L_\infty(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^m} \\ &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^k} M_{n-1, k}^* \|f_\varepsilon\|_{L_\infty(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^m} + (1-\varepsilon)^{n-k} B \|\nabla^n(f_\varepsilon)\|_{\infty, \varepsilon} \\ &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^k} M_{n-1, k}^* \|f\|_{L_\infty(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^m} + (1-\varepsilon)^{n-k} B \|(\nabla^n f)_\varepsilon\|_{\infty, \varepsilon} \\ &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^k} M_{n-1, k}^* \|f\|_{L_\infty(-1, 1)^m} + (1-\varepsilon)^{n-k} B \|\nabla^n f\|_{L_\infty(-1, 1)^m}. \end{aligned}$$

Теперь нужно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учесть тот факт, что функции $D^\alpha f$ при $|\alpha| < n$ непрерывны (это следует из теорем вложения [14, с. 145]), и следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|(D^\alpha f)_\varepsilon\|_{L_\infty(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)^m} \rightarrow \|D^\alpha f\|_{L_\infty(-1, 1)^m}.$$

Теорема 4 доказана.

4. В заключение отметим два частных случая, когда константу $M_{n-1,k}^*$ в (10) удается вычислить явно.

Пусть $T_{n-1}(t) = \cos(n-1) \arccos t$, $t \in (-1, 1)$, — полином Чебышева первого рода.

Случай $k = 1$.

$$M_{n-1,1}^* = \|T'_{n-1}\|_{L_\infty(-1,1)} = T'_{n-1}(1) = (n-1)^2.$$

Действительно,

$$\|\nabla P_{n-1}\|_\infty = \max_{|\alpha|=1} \|D^\alpha P_{n-1}\|_{L_\infty(-1,1)^m} = \max_{1 \leq j \leq m} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} P_{n-1} \right\|_{L_\infty(-1,1)^m}.$$

Применяя к полиному $P_{n-1}(x)$, как к функции от x_j (при фиксированных остальных переменных), неравенство Маркова, получаем

$$\|\nabla P_{n-1}\|_\infty \leq (n-1)^2 \|P_{n-1}\|_{L_\infty(-1,1)^m},$$

так что $M_{n-1,1}^* \leq (n-1)^2$. Полагая $P_{n-1}(x) = T_{n-1}(x_1)$, получаем для $M_{n-1,1}^*$ нужную оценку снизу.

Случай $k = n-1$.

$$M_{n-1,n-1}^* = \|T_{n-1}^{(n-1)}\|_{L_\infty(-1,1)} = T_{n-1}^{(n-1)}(1) = 2^{n-2}(n-1)!.$$

Пусть $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$, $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!$,

$$P_{n-1}(x) = \sum_{|\alpha| \leq n-1} a_\alpha x^\alpha. \quad (14)$$

Тогда для данного α , $|\alpha| = n-1$,

$$D^\alpha P_{n-1} = D^\alpha (a_\alpha x^\alpha) = \alpha! a_\alpha$$

и

$$\begin{aligned} \sup_{\|P_{n-1}\|_{L_\infty(-1,1)^m} = 1} \|D^\alpha P_{n-1}\|_{L_\infty(-1,1)^m} &= \alpha! \sup_{\|P_{n-1}\|_{L_\infty(-1,1)^m} = 1} |a_\alpha| \\ &= \frac{\alpha!}{\inf_{|a_\alpha|=1} \|P_{n-1}\|_{L_\infty(-1,1)^m}} = \frac{\alpha!}{\inf_{\{a_\beta\}} \|x^\alpha - \sum_{|\beta| \leq n-1, \beta \neq \alpha} a_\beta x^\beta\|_{L_\infty(-1,1)^m}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Следовательно,

$$M_{n-1,n-1}^* = \sup_{|\alpha|=n-1} \frac{\alpha!}{\inf_{\{a_\beta\}} \|x^\alpha - \sum_{|\beta| \leq n-1, \beta \neq \alpha} a_\beta x^\beta\|_{L_\infty(-1,1)^m}}. \quad (16)$$

Таким образом, задача вычисления $M_{n-1,n-1}^*$ сводится фактически к нахождению при каждом α , $|\alpha| = n-1$, полиномов вида (14) с фиксированным коэффициентом $a_\alpha = 1$, наименее уклоняющихся от нуля в равномерной метрике.

Для формулировки соответствующего результата обозначим через m_α число ненулевых координат мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$.

ЛЕММА. Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$, $|\alpha| = n - 1$, фиксировано. Тогда

$$\inf_{\{a_\beta\}} \left\| x^\alpha - \sum_{|\beta| \leq n-1, \beta \neq \alpha} a_\beta x^\beta \right\|_{L_\infty(-1,1)^m} = \|T_\alpha\|_{L_\infty(-1,1)^m} = \frac{1}{2^{n-1-m_\alpha}},$$

где

$$T_\alpha(x) = \prod_{j: \alpha_j \neq 0} 2^{-(\alpha_j-1)} T_{\alpha_j}(x_j). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты изложения рассмотрим случай $m = 2$. Случай $m > 2$ исследуется аналогично. Итак, мы ограничимся доказательством равенств

$$\begin{aligned} & \inf_{\{a_{\beta_1\beta_2}\}} \left\| x_1^j x_2^{n-1-j} - \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2 \leq n-1 \\ (\beta_1, \beta_2) \neq (j, n-1-j)}} a_{\beta_1\beta_2} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \right\|_{L_\infty(-1,1)^2} \\ &= \begin{cases} 2^{-(n-3)}, & j = 1, 2, \dots, n-2, \\ 2^{-(n-2)}, & j = 0 \text{ или } j = n-1. \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть сначала $1 \leq j \leq n-2$. Заметим, что произведение полиномов Чебышева $2^{-(n-3)} T_j(x_1) T_{n-j-1}(x_2)$ имеет вид (14) и при этом $a_{j, n-j-1} = 1$. Поэтому левая часть (18) не превосходит величины

$$2^{-(n-3)} \|T_j(x_1) T_{n-j-1}(x_2)\|_{L_\infty(-1,1)^2} = 2^{-(n-3)}.$$

Для оценки левой части (18) снизу используем тот факт, что класс аппроксимирующих полиномов в (18) содержится в более широком множестве функций вида

$$Q(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{j-1} x_1^k \varphi_k(x_2) + \sum_{l=0}^{n-2-j} x_2^l \psi_l(x_1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \inf_{\{a_{\beta_1\beta_2}\}} \left\| x_1^j x_2^{n-1-j} - \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2 \leq n-1 \\ (\beta_1, \beta_2) \neq (j, n-1-j)}} a_{\beta_1\beta_2} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \right\|_{L_\infty(-1,1)^2} \\ & \geq \inf_{\{\varphi_k, \psi_l\} \subset L_\infty(-1,1)} \left\| x_1^j x_2^{n-1-j} - \left(\sum_{k=0}^{j-1} x_1^k \varphi_k(x_2) + \sum_{l=0}^{n-2-j} x_2^l \psi_l(x_1) \right) \right\|_{L_\infty(-1,1)^2}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть (доказательство аналогичного факта см., например, в [15]), что последняя величина равна

$$\inf_{\{b_k, c_l\}} \left\| \left(x_1^j - \sum_{k=0}^{j-1} b_k x_1^k \right) \left(x_2^{n-1-j} - \sum_{l=0}^{n-2-j} c_l x_2^l \right) \right\|_{L_\infty(-1,1)^2},$$

а эта нижняя грань, в свою очередь, равна

$$\| (2^{-(j-1)}T_j(x_1)) (2^{-(n-j-2)}T_{n-j-1}(x_2)) \|_{L_\infty(-1,1)^2} = 2^{-(n-3)},$$

и первое из равенств (18) доказано.

Пусть теперь $j = 0$ (случай $j = n - 1$ аналогичен). Тогда

$$\begin{aligned} 2^{-(n-2)} &= \inf_{\{a_l\}} \left\| x_2^{n-1} - \sum_{l=0}^{n-2} a_l x_2^l \right\|_{L_\infty(-1,1)} \\ &\geq \inf_{\{a_{\beta_1\beta_2}\}} \left\| x_2^{n-1} - \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2 \leq n-1 \\ (\beta_1, \beta_2) \neq (0, n-1)}} a_{\beta_1\beta_2} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \right\|_{L_\infty(-1,1)^2} \\ &\geq \inf_{\{\psi_l\} \subset L_\infty(-1,1)} \left\| x_2^{n-1} - \sum_{l=0}^{n-2} x_2^l \psi_l(x_1) \right\|_{L_\infty(-1,1)^2} \\ &\geq \sup_{x_1 \in (-1,1)} \inf_{\{\psi_l\} \subset L_\infty(-1,1)} \sup_{x_2 \in (-1,1)} \left| x_2^{n-1} - \sum_{l=0}^{n-2} x_2^l \psi_l(x_1) \right| \\ &\geq \sup_{x_1 \in (-1,1)} \sup_{x_2 \in (-1,1)} |2^{-(n-2)}T_{n-1}(x_2)| = 2^{-(n-2)}, \end{aligned}$$

т.е. на самом деле эта цепочка неравенств превращается в цепочку равенств. Соотношения (18) доказаны.

Из этой леммы и соотношения (15) выводим

Следствие 2. Если $|\alpha| = n - 1$, то

$$\sup_{\|P_{n-1}\|_{L_\infty(-1,1)}=1} \|D^\alpha P_{n-1}\|_{L_\infty(-1,1)^m} = \alpha! 2^{n-1-m_\alpha},$$

причем верхняя грань достигается на полиноме (17).

Из равенства (16) следует, что

$$\begin{aligned} M_{n-1, n-1}^* &= 2^{n-1} \sup_{|\alpha|=n-1} (2^{-m_\alpha} \alpha!) = 2^{n-1} \max_{1 \leq k \leq \min(m, n-1)} 2^{-k} \max_{\substack{\sum_{j=1}^m \alpha_j = n-1 \\ m_\alpha = k}} \alpha! \\ &= 2^{n-1} \max_{1 \leq k \leq \min(m, n-1)} 2^{-k} \max_{\sum_{j=1}^k \alpha_j = n-1} \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_k!. \end{aligned}$$

Из очевидного неравенства $\alpha_1! \alpha_2! \leq (\alpha_1 + \alpha_2 - 1)!$ следует, что

$$\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_k! \leq \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j - (k-1) \right)!.$$

Поэтому

$$M_{n-1, n-1}^* = 2^{n-1} \max_{1 \leq k \leq \min(m, n-1)} 2^{-k} (n-k)!.$$

Так как функция $\varphi(k) = 2^{-k}(n-k)!$ является убывающей, то

$$M_{n-1, n-1}^* \leq 2^{n-1} \varphi(1) = 2^{-(n-1)} 2^{-1} (n-1)! = 2^{n-2} (n-1)!.$$

Легко видеть, что на самом деле выполняется равенство

$$M_{n-1, n-1}^* = 2^{n-2} (n-1)!.$$

Действительно, из определения $M_{n-1, n-1}^*$ следует, что

$$M_{n-1, n-1}^* \geq \|D^{(n-1, 0, \dots, 0)} T_{n-1}(x_1)\|_{L_\infty(-1, 1)^m} = 2^{n-2} (n-1)!.$$

Отметим, что задача о точных константах в аддитивных неравенствах для различных L_p -норм $\nabla^k f$, f , $\nabla^n f$ рассматривалась в [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
- [2] Landau E. Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Functionen // Proc. London Math. Soc. 1913. V. 13. P. 43–49.
- [3] Hadamard J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // C. R. Soc. Math. France. 1914. V. 41. P. 68–72.
- [4] Бурёнков В. И. О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Тр. МИАН. 1980. Т. 156. С. 22–29.
- [5] Бурёнков В. И. О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. II // Тр. МИАН. 1986. Т. 173. С. 38–49.
- [6] Shadrin A. Yu. To the Landau–Kolmogorov problem on a finite interval // Proc. Intern. Conf. (Voneshta Voda, June 18–24), 1993. P. 192–204.
- [7] Бурёнков В. И., Гусаков В. А. О точных константах в теоремах вложения Соболева. III // Тр. МИАН. 1993. Т. 204. С. 68–80.
- [8] Марков В. А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке: СПб, 1892.
- [9] Шадрин А. Ю. О точных константах в неравенствах между L_∞ -нормами производных на конечном интервале // Докл. РАН. 1992. Т. 326. С. 53–56.
- [10] Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А. О неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Укр. матем. ж. 1995. Т. 47. № 1. С. 105–107.
- [11] Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А. О неравенствах для норм производных на отрезке // Международная конференция “Теория приближений и задачи вычислительной математики” (Днепропетровск, 26–28 мая). Тезисы докл. Днепропетровск, 1993. С. 12.
- [12] Андрианов А. В. Аналоги неравенств А. Маркова и С. Бернштейна для многочленов в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 5. С. 15–20.
- [13] Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
- [14] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [15] Пичугов С. А. Точные оценки приближения в L_p функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$ // Укр. матем. ж. 1990. Т. 42. № 1. С. 122–125.