Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Богатырев, Геометрический способ решения серии интегральных уравнений Пуанкаре–Стеклова, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 343–353

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:52:49

УДК 517.5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ СЕРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПУАНКАРЕ–СТЕКЛОВА

А. Б. Богатырёв

В явном виде найдены собственные числа и собственные функции для одного семейства сингулярных интегральных уравнений. Показано, как дискретный спектр преобразуется в непрерывный при вырождении уравнения.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Семейство сингулярных интегральных уравнений (Пуанкаре–Стеклова) вида

$$\lambda \int_I \frac{u(x)}{x-y} dx - \int_I \frac{u(x)\mathcal{A}(x)}{\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)} dx = \text{const}, \quad y \in I = (-1, 1), \quad (1)$$

где λ – спектральный параметр, $\mathcal{A}(x)$ – заданная гладкая замена переменных на интервале интегрирования I , $u(x)$ – неизвестная функция из заранее оговоренного функционального класса и const – неизвестная константа, было введено автором в [1], [2] для исследования обобщенной спектральной задачи с двумя операторами Пуанкаре–Стеклова [3].

В [2] рассматривался операторный пучок, определяемый левой частью (1), действующий из пространства $H_{00}^{1/2}(I)$ с нормой [4], [5]:

$$\|u\|^2 = \int_I |u(x)|^2 (1-x^2)^{-1} dx + \int_{I \times I} |u(x) - u(y)|^2 |x-y|^{-2} dx dy \quad (2)$$

в факторпространство пространства Соболева $H^{1/2}(I)$ по подпространству, образованному константами. Показано, что при достаточной гладкости и равномерной на I невырожденности замены переменных $\mathcal{A}(x)$ спектр этого пучка действителен, дискретен, имеет единственную точку накопления $\lambda = 1$, а пространство $H_{00}^{1/2}(I)$ раскладывается в ортогональную сумму подпространств H_λ , образованных собственными функциями пучка, отвечающими собственному значению λ . Из результатов работы [6] следует, что напротив, при вырожденности замены $\mathcal{A}(x)$, спектр пучка содержит отрезок действительной оси, границы которого вычисляются по явным формулам.

В настоящей заметке в явном виде находятся все собственные числа и собственные функции уравнений (1), рассматриваемых в пространстве $H_{00}^{1/2}(I)$, когда функция сдвига $\mathcal{A}$ является квадратичным полиномом:

$$\mathcal{A}(x) = x + (2C)^{-1}(x^2 - 1), \quad (3)$$

где $C \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \overline{I}$ – параметр семейства полиномов. При $C = \pm 1$ замена переменных (3) вырождается на одном из концов I , и как следует из [6], спектр (1) заполняет отрезок $[1, 2]$. Для этого вырожденного случая мы находим в явном виде решения уравнения (1), не принадлежащие пространству $H_{00}^{1/2}(I)$, которые можно трактовать как обобщенные собственные функции. Соответствующие значения спектрального параметра λ заполняют интервал $(1, 2]$.

Используемый в данной работе метод исследования интегральных уравнений близок к методам, изложенным в [7], [8].

2. Невырожденный случай. Фиксируем на протяжении этого пункта функцию сдвига (3), полагая, без потери общности, параметр C в (3) большим единицы. Действительно, если $(u(x), \lambda)$ – собственная пара уравнения (1) с функцией сдвига $\mathcal{A}(x)$ из (3), то $(u(-x), \lambda)$ – собственная пара (1) с функцией сдвига, отвечающей противоположному значению параметра C в (3). Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Все собственные функции $u(x)$ класса $H_{00}^{1/2}(I)$ и соответствующие собственные значения λ уравнения (1) при $\mathcal{A}(x)$ из (3) и $C > 1$ даются формулами (4), (5). Собственные функции (4) образуют полную систему в пространстве $H_{00}^{1/2}(I)$,*

$$u_n(x) = \sin \left(\frac{n\pi}{K'} \int_1^{(C+x)/(C-1)} (s^2 - 1)^{-1/2} (1 - k^2 s^2)^{-1/2} ds \right), \quad (4)$$

$$\lambda_n = 1 + \operatorname{ch}^{-1}(2\pi\tau n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где

$$k(C) = \frac{C-1}{C+1}, \quad \tau(k) = \frac{K(k)}{K'(k)},$$

$$K(k) = \int_0^1 ((1-s^2)(1-k^2s^2))^{-1/2} ds, \quad K'(k) = \int_1^{1/k} ((s^2-1)(1-k^2s^2))^{-1/2} ds. \quad (6)$$

Докажем предварительно аналогичное утверждение для гёльдеровых решений.

ТЕОРЕМА 2. *Формулами (4), (5) исчерпываются все собственные пары $(u(x), \lambda)$ уравнения (1) при $\mathcal{A}(x)$ из (3), $C > 1$ и гёльдеровыми $u(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В лемме 1 устанавливается эквивалентность интегрального уравнения (1) и функционального уравнения (9), которое будет решено ниже.

ЛЕММА 1. Преобразования

$$\Phi(z) = \int_I \frac{u(x)}{x-z} dx, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}, \quad (7)$$

$$u(x) = (2\pi i)^{-1} (\Phi(x+i0) - \Phi(x-i0)), \quad x \in I, \quad (8)$$

осуществляют взаимно-однозначное соответствие между удовлетворяющими условию теоремы 2 собственными парами $(u(x), \lambda)$ уравнения (1) и убывающими на бесконечности голоморфными в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}$ функциями $\Phi(z)$, граничные значения

$\Phi^\pm(x) = \Phi(x \pm i0)$ которых существуют на $\bar{I}$, гёльдеровы и удовлетворяют функциональному уравнению

$$\frac{1}{2}(\lambda - 1)(\Phi^+(x) + \Phi^-(x)) = \Phi(-x - 2C) + \text{const}, \quad x \in I. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(u(x), \lambda)$ – собственная пара уравнения (1) с гёльдеровой $u(x)$. Рассмотрим голоморфную в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{I}$ функцию $\Phi(z)$, определенную формулой (7). Граничные значения Φ существуют во внутренних точках $\bar{I}$, локально гёльдеровы и удовлетворяют формулам Сохоцкого (8), (10) (см. [8]–[10]):

$$\text{V.p.} \int_I \frac{u(t)}{t - x} dt = \frac{1}{2}(\Phi^+(x) + \Phi^-(x)), \quad x \in I. \quad (10)$$

Уравнение (1), которому удовлетворяет $u(x)$, с учетом (10) и тождества

$$\frac{\dot{\mathcal{A}}(x)}{\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y)} = \frac{1}{x - y} + \frac{1}{x + y + 2C} \quad (11)$$

можно переписать в виде функционального уравнения (9) для Φ . Покажем, что $u(\pm 1) = 0$, откуда будет следовать существование предельных значений $\Phi(z)$ в точках ± 1 и глобальная гёльдеровость $\Phi^\pm$ на $\bar{I}$ [8], [9]. Пусть, например, $u(-1) \neq 0$, тогда левая часть (9) имеет логарифмический рост при $x \rightarrow -1$, правая же стремится к конечному значению, поскольку $1 - 2C$ – точка голоморфности функции $\Phi(z)$.

Наши рассуждения обратимы: если убывающая на бесконечности голоморфная в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{I}$ функция $\Phi(z)$ удовлетворяет на разрезе уравнению (9), а граничные значения Φ на $\bar{I}$ гёльдеровы, то функция $u(x)$, восстановленная из (8), связана с $\Phi(z)$ уравнением (7) (см. [8], [9]). Соотношение (9) на разрезе переписывается, учитывая тождество (11) и формулу Сохоцкого (10), в виде сингулярного интегрального уравнения (1) с постоянной const , той же, что и в (9).

Приступим к решению функционального уравнения (9). При $\lambda = 1$ имеется лишь тривиальное решение, поэтому далее считаем, что $\lambda \neq 1$. Задавшись удовлетворяющим условию леммы 1 решением $\Phi(z)$ уравнения (9), определим вектор

$$W(z) = (\Phi((C - 1)z - C), \Phi(-(C - 1)z - C))^T, \quad (12)$$

голоморфный на расширенной комплексной плоскости с разрезами:

$$\Omega = \bar{\mathbb{C}} \setminus ([-1/k, -1] \cup [1, 1/k]),$$

где $k(C)$ определено в (6). Введем матрицы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta = \frac{2}{\lambda - 1}. \quad (13)$$

В силу своего определения, а также соотношения (9) на разрезе, вектор $W(z)$ удовлетворяет соотношениям:

$$W(-z) = \mathbf{S}W(z), \quad z \in \Omega, \quad (14)$$

$$W^\pm(x) = \mathbf{D}W^\mp(x) + W_0, \quad x \in [1, 1/k], \quad (15)$$

где $W_0 = \delta \cdot \text{const} \cdot (1, 0)^T$.

Введем новую независимую переменную $t(z)$, изменяющуюся в концентрическом кольце при $z \in \Omega$. Эллиптический интеграл

$$F(z, k) = \int_0^z (1 - s^2)^{-1/2} (1 - k^2 s^2)^{-1/2} ds$$

конформно отображает $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup I$ на прямоугольник со сторонами $2K$ и $2K'$, верхняя и нижняя стороны которого склеиваются при экспоненциальном отображении $\omega(z) = \exp(\pi z / K'(k))$. Композиция $t(\cdot) = \omega(\cdot) \circ F(\cdot, k)$ отображает область Ω на кольцо T с внутренним радиусом $\exp(-\pi\tau)$ и внешним радиусом $\exp(\pi\tau)$, где τ — отношение полных эллиптических интегралов модуля k .

Функция $W_*(t)$, определенная в кольце T равенством $W_*(t(z)) = W(z)$, $z \in \Omega$, наследует свойства симметрии (14), (15) функции W :

$$W_*(1/t) = \mathbf{S}W_*(t), \quad t \in T, \quad (16)$$

$$W_*(\bar{t}) = \mathbf{D}W_*(t) + W_0, \quad t \in \{\text{внешняя граница } T\}. \quad (17)$$

Пусть t — произвольная точка внутренней границы нашего кольца, тогда $t \exp(2\pi\tau) = 1/\bar{t}$ — точка внешней границы, поэтому $W_*(e^{2\pi\tau}t) = W_*(1/\bar{t}) = \mathbf{D}W_*(1/t) + W_0 = \mathbf{D}\mathbf{S}W_*(t) + W_0$. Полагая t в равенстве

$$W_*(e^{2\pi\tau}t) = \mathbf{D}\mathbf{S}W_*(t) + W_0, \quad (18)$$

изменяющимся в кольце T , мы в силу непрерывности W_* на ∂T получим аналитическое продолжение W_* в кольцо $e^{2\pi\tau}T$. Продолжая применять равенство (18), мы аналитически продолжим W_* в $\mathbb{C} \setminus 0$, и в области определения продолженной функции останутся справедливыми соотношения (16) и (18).

Разложим аналитическую в $\mathbb{C} \setminus 0$ функцию $W_*(t)$ в ряд Лорана:

$$W_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n t^n. \quad (19)$$

В терминах коэффициентов A_n симметрии (16) и (18) переписываются соответственно в виде:

$$A_n = \mathbf{S}A_{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

$$A_0 = \mathbf{D}\mathbf{S}A_0 + W_0, \quad e^{2\pi\tau n} A_n = \mathbf{D}\mathbf{S}A_n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поскольку матрица $\mathbf{D}\mathbf{S}$ не может иметь более двух различных собственных чисел, то в ряде (19) не более трех членов. Всякое нетривиальное решение $W_*(t)$ обязано иметь вид

$$W_*^{(n)}(t) = A_n t^n + A_0^{(n)} + A_{-n} t^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

В этом случае величины $\exp(\pm 2\pi\tau n)$ являются корнями характеристического многочлена $\mu^2 - \delta\mu + 1$ матрицы $\mathbf{D}\mathbf{S}$, и следовательно, параметр δ принимает дискретный ряд значений:

$$\delta_n = 2 \operatorname{ch}(2\pi\tau n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Векторы A_n и A_{-n} – собственные векторы матрицы $\mathbf{DS}$ – должны удовлетворять условию (20), откуда с точностью до пропорциональности

$$A_{\pm n} = \begin{pmatrix} e^{\pm \pi \tau n} \\ e^{\mp \pi \tau n} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Вспоминая, что $\Phi(\infty) = 0$, т.е. в новых переменных $W_*(-1) = 0$, мы найдем значение вектора $A_0^{(n)}$, подставляя в (21) $t = -1$:

$$A_0^{(n)} = 2(-1)^{n+1} \operatorname{ch}(n\pi\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Функция $W_*^{(n)}(t)$, а значит и $\Phi(z)$, определены нами полностью.

Приведенные рассуждения обратимы: сужение любой из функций $W_*^{(n)}(t)$ (21) с коэффициентами A_n и A_{-n} из (23) и $A_0^{(n)}$ – из (24) на кольцо T удовлетворяет соотношениям (16), (17), если величину const в определении вектора W_0 положить равной

$$\operatorname{const}_n = 2(\lambda - 2)(-1)^n \operatorname{ch}(n\pi\tau). \quad (25)$$

Переходя к независимой переменной z , мы убеждаемся, что функции $W^{(n)}(z) = W_*^{(n)}(t)$ удовлетворяют условиям (14), (15) на плоскости с разрезами. Из (14) следует, что равенство (12) корректно определяет голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\overline{I} \cup (\overline{I} - 2C))$ функцию $\Phi(z)$, которая в силу (15) голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}$ и является решением функционального уравнения (9) с константой из (25). Полученная из (12) функция $\Phi(z)$ убывает на бесконечности, так как $W_*^{(n)}(-1) = 0$.

Решения $u_n(x)$ уравнения (1) могут быть восстановлены по формулам (8), (12), (21), (23), (24), что приводит к выражению (4). Собственные числа λ_n (5) получаются из выражения для δ_n (22) с учетом формулы связи между этими параметрами, приведенной в (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим в пространстве $H_{00}^{1/2}(I)$ норму, эквивалентную (2) (см. [2], [4], [5]):

$$\|u\|_*^2 = \int_{\{-\infty < x < \infty, y > 0\}} |\nabla U(x, y)|^2 dx dy, \quad (26)$$

где $U(x, y)$ – гармоническое продолжение функции $u(x)$ с I в верхнюю полуплоскость при нулевом условии Дирихле на $\mathbb{R} \setminus I$. В [2] показано, что пространство $H_{00}^{1/2}(I)$ раскладывается в ортогональную (в скалярном произведении, порожденном (26)) сумму подпространств H_λ , образованных собственными функциями (1), отвечающими собственному значению λ . Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что

- а) функции (4) лежат в пространстве Соболева $H_{00}^{1/2}(I)$,
- б) система этих функций полна в $H_{00}^{1/2}(I)$.

Действительно, собственные функции (1), отличные от перечисленных в (4), следует считать ортогональными всем функциям из полной системы, т.е. равными 0.

Рассмотрим конформное отображение G верхней полуплоскости на прямоугольник $\Pi = (0, 1) \times (0, 2\tau)$, задаваемое интегралом

$$G(z) = \frac{1}{K'} \int_1^{\frac{C+z}{C-1}} (s^2 - 1)^{-1/2} (1 - k^2 s^2)^{-1/2} ds.$$

Выберем в качестве квадрата нормы в $H_{00}^{1/2}((0, 1))$ интеграл Дирихле от гармонического продолжения функции с интервала $(0, 1)$ в Π при нулевом условии Дирихле на дополнительной к $(0, 1)$ части границы [2], [4], а в $H_{00}^{1/2}(I)$ – норму (26). Оператор замены переменных $G(x) : I \rightarrow (0, 1)$ является при таком выборе норм изометрическим изоморфизмом из $H_{00}^{1/2}((0, 1))$ в $H_{00}^{1/2}(I)$, поскольку конформное отображение сохраняет интеграл Дирихле. Функции $\sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \dots$, принадлежат пространству $H_{00}^{1/2}((0, 1))$ и образуют в нем полную систему [5]. Тем же свойством обладают, следовательно, и функции $\sin(n\pi G(x))$, $n = 1, 2, \dots$, в пространстве $H_{00}^{1/2}(I)$.

3. Вырожденный случай. Исследуем случай вырожденной замены переменных в (3): $\mathcal{A}(-1) = 0$ при $C = 1$. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Формулами (27), (28) исчерпываются все собственные пары $(u(x), \lambda)$ уравнения (1) с функцией сдвига $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$, для которых решение $u(x)$ удовлетворяет условиям:*

- А) $u(x)$ – гёльдерова на всяком отрезке $[s, 1]$, $-1 < s < 1$;
- Б) интеграл типа Коши от $u(x)$ в комплексной окрестности точки $z = -1$ имеет рост более слабый, чем степенной, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\left| \int_I \frac{u(x) dx}{x - z} \right| \leq C_\varepsilon |1 + z|^{-\varepsilon},$$

$$u_\mu(x) = \sin \left(\frac{\ln \mu}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{2 - \sqrt{(1-x)(3+x)}}{2 + \sqrt{(1-x)(3+x)}} \right| \right), \quad \lambda_\mu = 1 + \frac{2\mu}{\mu^2 + 1}, \quad \mu \in (0, 1), \quad (27)$$

$$u(x) = \ln \left| \frac{2 - \sqrt{(1-x)(3+x)}}{2 + \sqrt{(1-x)(3+x)}} \right|, \quad \lambda = 2. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Буквальное повторение доказательства леммы 1 устанавливает справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 2. *Формулы (7) и (8) предыдущего пункта осуществляют взаимно-однозначное соответствие между удовлетворяющими условию теоремы 3 собственными парами $(u(x), \lambda)$ уравнения (1) и убывающими на бесконечности голоморфными в $\mathbb{C} \setminus \bar{I}$ решениями $\Phi(z)$ функционального уравнения*

$$\frac{1}{2}(\lambda - 1)(\Phi^+(x) + \Phi^-(x)) = \Phi(-x - 2) + \text{const}, \quad x \in I, \quad (29)$$

чи граничные значения $\Phi^\pm$ существуют на $(-1, 1]$, гёльдеровы на всяком отрезке $[s, 1]$, $-1 < s < 1$, а рост в окрестности точки $z = -1$ – более слабый, чем степенной.

Функциональное уравнение (29) при указанных в лемме 2 ограничениях будет решено ниже сведением его к задаче линейного сопряжения для аналитических функций [8]–[11]. Рассмотрим три случая:

- I) $\lambda \notin \{1, 2\}$;
- II) $\lambda = 2$;
- III) $\lambda = 1$.

I) Вычитая в противном случае из решения Φ величину $\text{const}/(\lambda - 2)$, будем считать, что постоянная const в уравнении (29) равна 0, а само решение не обязано обращаться в 0 на бесконечности. Рассмотрим голоморфный в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}$ вектор

$$W(z) = (\Phi(2z - 1), \Phi(-2z - 1))^T \quad (30)$$

и голоморфное преобразование его области определения: $t(z) = \sqrt{1 - z^2}$, знак корня выбран так, чтобы при больших по модулю z выполнялось асимптотическое равенство $t(z) \sim iz$. Голоморфный в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}$ вектор W_* , определенный равенством $W_*(t) = W(z)$, является решением задачи линейного сопряжения с матричным коэффициентом $\mathbf{DS}$ на разрезе I . Действительно, W_* согласно определению и функциональному уравнению для Φ имеет симметрии

$$\begin{aligned} W_*(-t) &= \mathbf{S}W_*(t), \quad t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}, \\ W_*(-t + i0) &= \mathbf{D}W_*(t + i0), \quad t \in I, \end{aligned} \quad (31)$$

где матрицы $\mathbf{D}$, $\mathbf{S}$ определены в (13). Справедлива цепочка равенств: $W_*(t + i0) = \mathbf{D}W_*(-t + i0) = \mathbf{D}\mathbf{S}W_*(t - i0)$, $t \in I$.

ЛЕММА 3. *Нетривиальное голоморфное в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}$ и удовлетворяющее условию симметрии (31) решение W_* однородной задачи линейного сопряжения*

$$W_*^+(t) = \mathbf{D}\mathbf{S}W_*^-(t), \quad t \in I, \quad (32)$$

имеющее в окрестности концов I рост более слабый, чем степенной, а также непрерывные граничные значения $W_^\pm(t)$ на всяком содержащемся в I отрезке, существует лишь при $\delta \in [2, \infty)$. В этом случае решение с точностью до пропорциональности единственно:*

$$W_*(t) = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(t) \\ \tilde{w}_2(t) \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$\tilde{w}_1(t) = \tilde{w}_2(t) = \exp\left(\frac{\ln \mu}{2\pi i} \ln \frac{t-1}{t+1}\right), \quad (34)$$

где $\ln$ – главная ветвь Ln с разрезом вдоль отрицательной полуоси, а μ – (любое) собственное значение матрицы $\mathbf{DS}$: $\mu^2 - \delta\mu + 1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матричная задача линейного сопряжения (32) сводится к паре скалярных задач, если сделать замену переменных

$$W_*(t) = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где $\mathbf{P}$ – матрица, приводящая $\mathbf{DS}$ к нормальной жордановой форме $\mathbf{J}$, т.е. $\mathbf{DS} = \mathbf{PJP}^{-1}$. В зависимости от вида матрицы $\mathbf{J}$ будем различать три случая.

1) При $\mu \neq \pm 1$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}.$$

Уравнение (32) и симметрия (31) переписутся соответственно в виде

$$w_1^+(t) = \mu w_1^-(t), \quad w_2^+(t) = \mu^{-1} w_2^-(t), \quad t \in I, \quad (36)$$

$$w_1(-t) = w_2(t), \quad t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}. \quad (37)$$

Положим функции $\tilde{w}_1(t)$ и $\tilde{w}_2(t)$ равными правой части (34), при этом $\ln \mu$ принимает одно и то же значение из полосы $\{-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$. Нетрудно проверить, что функции $\tilde{w}_1(t)$ и $\tilde{w}_2(t)$ голоморфны в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}$, удовлетворяют соотношениям на разрезе (36) и условию симметрии (37).

Функция $w_1(t)/\tilde{w}_1(t)$ голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ за исключением, быть может, двух изолированных особых точек $t = \pm 1$. В окрестности $t = \pm 1$ рост $|w_1|$ – более слабый, чем степенной, а $|1/\tilde{w}_1(t)|$ мажорируется функцией $|t \mp 1|^{-1/2}$, поскольку

$$|\tilde{w}_1|(t) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \left(\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \cdot \arg \mu + \arg \frac{t-1}{t+1} \cdot \ln |\mu| \right) \right) = |\mu|^{\frac{1}{2\pi} \arg \frac{t-1}{t+1}} \left| \frac{t-1}{t+1} \right|^{\frac{1}{2\pi} \arg \mu} \quad (38)$$

и $|\arg \mu| \leq \pi$. Как видим, рост $|w_1/\tilde{w}_1|$ в окрестности каждой из особых точек достаточно слабый, поэтому эти точки являются устранимыми особыми точками $w_1/\tilde{w}_1$. Из теоремы Лиувилля теперь следует, что $w_1 = \operatorname{const}_1 \tilde{w}_1$. Такие же доводы можно привести в пользу равенства $w_2 = \operatorname{const}_2 \tilde{w}_2$, после чего из (37) следует, что $\operatorname{const}_1 = \operatorname{const}_2$.

Пусть $\arg \mu \neq 0$. В формуле $w_1(t) = \operatorname{const}_1 \tilde{w}_1(t)$ устремим t к $-\operatorname{sgn} \arg \mu$. Из (38) видно, что $|\tilde{w}_1|$ растет степенным образом, функция же $|w_1|$ обязана иметь рост более слабый, чем степенной, следовательно $\operatorname{const}_1 = \operatorname{const}_2 = 0$, если $\arg \mu \neq 0$.

Если $\mu \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, то формулы (33), (34) дают удовлетворяющее условиям леммы решение задачи линейного сопряжения (32).

2) При $\mu = 1$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Уравнение (32) и симметрия (31) переписутся соответственно в виде

$$w_1^+(t) = w_1^-(t) + w_2^-(t), \quad w_2^+(t) = w_2^-(t), \quad t \in I, \quad (40)$$

$$w_1(-t) = w_1(t) + w_2(t), \quad t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{I}. \quad (41)$$

Решения задачи линейного сопряжения (40), голоморфные в бесконечности и имеющие более слабый, чем степенной, рост вблизи $t = \pm 1$, – линейная оболочка векторов

$$\left(\ln \frac{t-1}{t+1}, 2\pi i \right)^T, \quad (1, 0)^T$$

(см. [8]–[10]). Условию симметрии (41) удовлетворяют лишь решения, пропорциональные вектору $(1, 0)^T$, что соответствует решению W_* , приведенному в (33) при $\mu = 1$.

3) При $\mu = -1$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (32) переписывается в виде

$$w_1^+(t) = -w_1^-(t) + w_2^-(t), \quad w_2^+(t) = -w_2^-(t), \quad t \in I.$$

Решения этой задачи линейного сопряжения – только нулевые. Действительно, рассмотрим голоморфную в $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ функцию $g_2(t) = w_2(t)/\sqrt{1-t^2}$. Учитывая условия роста $|w_2(t)|$ вблизи ± 1 , можно утверждать, что особые точки ± 1 устранимы и, следовательно, $g_2(t)$ – константа. Величина этой константы равна $g_2(\infty) = 0$. Эти рассуждения теперь применимы и к функции $w_1(t)$.

Можно проверить, что функции $\Phi(z) - \Phi(\infty)$, восстановленные из решений (33), (34) однородной задачи линейного сопряжения, действительно удовлетворяют функциональному уравнению (29) и ограничениям леммы 2. Соответствующая серия решений интегрального уравнения Пуанкаре–Стеклова приведена в (27).

II) Случай однородного функционального уравнения (29) при $\lambda = 2$ был, по существу, только что рассмотрен. Далее считаем не теряя в общности, что величина const в (29) равна $1/2$. Вводя векторную функцию $W_*(t)$ как в предыдущем случае, можно убедиться, что она является решением неоднородной задачи линейного сопряжения, рассмотренной в следующей лемме.

ЛЕММА 4. *Убывающее на бесконечности голоморфное в $\mathbb{C} \setminus \bar{I}$ и удовлетворяющее условию симметрии (31) решение W_* неоднородной задачи линейного сопряжения*

$$W_*^+(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_*^-(t) + (1, 0)^T, \quad t \in I, \quad (42)$$

имеющее в окрестности концов I рост более слабый, чем степенной, а также непрерывные граничные значения $W_^\pm(t)$ на всяком содержащемся в I отрезке, единственно:*

$$W_*(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8\pi^2} \ln^2 \frac{t-1}{t+1} + \frac{1}{4\pi i} \ln \frac{t-1}{t+1} \\ -\frac{1}{8\pi^2} \ln^2 \frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{4\pi i} \ln \frac{t-1}{t+1} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

где $\ln$ – главная ветвь Ln с разрезом вдоль отрицательной полуоси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену переменных (35) с матрицей $\mathbf{P}$ из (39). Перепишем задачу линейного сопряжения (42):

$$w_1^+(t) = w_1^-(t) + w_2^-(t), \quad w_2^+(t) = w_2^-(t) + 1, \quad t \in I. \quad (44)$$

Общее решение задачи (44) при $w_1(t), w_2(t)$, убывающих на бесконечности и растущих в окрестности $t = \pm 1$ слабее, чем степенным образом, следующее [8]–[10]:

$$\begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8\pi^2} \ln^2 \frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{4\pi i} \ln \frac{t-1}{t+1} \\ \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{t-1}{t+1} \end{pmatrix},$$

что приводит к приведенному в (43) решению, удовлетворяющему симметрии (31).

Функция $\Phi(z)$, восстановленная из решения (43) неоднородной задачи линейного сопряжения, удовлетворяет функциональному уравнению (29), ограничениям леммы 2 и приводит к решению (28) интегрального уравнения (1).

III) В этом случае решения функционального уравнения (29) при ограничениях леммы 2 только нулевые.

Теорема 3 доказана.

Рис. 1. Динамика собственных значений при $C \rightarrow 1$

Интересно проследить, как дискретный спектр (5) преобразуется в непрерывный $\{\lambda \in [1, 2]\}$ при $C \rightarrow 1 + 0$. При значениях параметра C в (3), больших 1, дискретный спектр содержится в интервале $(1, 2)$ и сгущается к $\lambda = 1$. Каждое собственное значение $\lambda_n(C)$ монотонно стремится к 2 при $C \rightarrow 1 + 0$. Тем самым, собственные значения “вытягиваются” из точки накопления $\lambda = 1$ и при C , близком к 1, “плотно” заполняют отрезок $[1, 2]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы решили уравнение (1) в вырожденном случае, сведя его к задаче линейного сопряжения. Существуют другие подходы к решению этой задачи:

1) Можно, как и во втором разделе, найти риманову поверхность вектора $W(z)$ (30) и решить функциональное уравнение, которому удовлетворяет $W(z)$.

2) Компоненты вектора $W(z)$ – фундаментальная система решений уравнения класса Фукса второго порядка с тремя особыми точками $0, \pm 1$, сводящегося к гипергеометрическому. Коэффициенты этого уравнения полностью находятся как функции от λ, z .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bogatyrev A. B. On spectra of pairs of Poincaré–Steklov operators // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. № 3. P. 171–194.
- [2] Богатырёв А. Б. Дискретный спектр задачи для пары операторов Пуанкаре–Стеклова // Докл. РАН 1998. Т. 358. № 3.
- [3] Лебедев В. И., Агошков В. И. Операторы Пуанкаре–Стеклова и их применение в анализе. М.: ОВМ АН, 1983.
- [4] Grisvard P. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Boston: Pitman, 1985.
- [5] Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их применение. М.: Мир, 1971.
- [6] Овчинников Э. Е. Сопряженные уравнения, алгоритмы возмущений и оптимальное управление // Сб. научных трудов / ред. В. И. Агошкова, В. П. Шутяев. М.: ВИНТИ, 1993. С. 64–100. (Деп. ВИНТИ № 453-В93 от 25.03.93).
- [7] Гахов Ф. Д., Чибрикова Л. И. О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме // Матем. сб. 1954. Т. 35. № 3. С. 395–491.
- [8] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1978.
- [9] Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [10] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950.
- [11] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

Институт вычислительной математики РАН
E-mail: gourmet@inm.ras.ru

Поступило
 06.03.96
 Исправленный вариант
 06.03.97