Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, Сингулярно возмущенная краевая задача для уравнения второго порядка в случае смены устойчивости, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 354–362

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:05:10

УДК 517.956.226

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ

В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефёдов

Рассмотрена краевая задача для нелинейного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка в случае смены устойчивости в результате пересечения корней вырожденного уравнения. Методом дифференциальных неравенств доказано существование решения, у которого предельное является негладким.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Рассмотрим краевую задачу

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y'' - f(x, y) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$y'(0) = y'(1) = 0, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $f(x, y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть вырожденное уравнение $f(x, y) = 0$ имеет корень $y = \bar{y}(x)$ и пусть

$$\bar{f}_y(x) \equiv f_y(x, \bar{y}(x)) > 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

Отметим, что условие (3) обеспечивает изолированность корня $\bar{y}(x)$. При этих условиях имеет место

ТЕОРЕМА 1. *При достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение $y(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) такое, что*

$$y(x, \varepsilon) = \bar{y}(x) + O(\varepsilon), \quad x \in [0, 1]. \quad (4)$$

Через $O(\varepsilon)$ здесь и далее обозначаются функции, которые имеют при всех достаточно малых ε оценку $|O(\varepsilon)| \leq C\varepsilon$, где C – не зависящее от ε положительное число.

Теорема 1 хорошо известна (см., например, [1]). Наиболее просто она доказывается методом дифференциальных неравенств, основанном на теоремах Нагумо (см. [2]). Этот метод базируется на понятиях нижнего и верхнего решения.

Функции $\underline{Y}(x, \varepsilon)$ и $\bar{Y}(x, \varepsilon)$ называются соответственно *нижним* и *верхним решениями задачи* (1), (2), если они удовлетворяют следующим трем условиям:

$$1^\circ) \underline{Y} \leq \bar{Y} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1;$$

$$2^\circ) L_\varepsilon \underline{Y} \geq 0, L_\varepsilon \bar{Y} \leq 0 \quad \text{при } 0 < x < 1;$$

$$3^\circ) \underline{Y}'(0, \varepsilon) \geq 0 \geq \bar{Y}'(0, \varepsilon), \underline{Y}'(1, \varepsilon) \leq 0 \leq \bar{Y}'(1, \varepsilon)$$

(здесь штрих означает производную по x).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00694.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если существуют нижнее и верхнее решения, то существует решение $y(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{Y}(x, \varepsilon) \leq y(x, \varepsilon) \leq \overline{Y}(x, \varepsilon) \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1. \quad (5)$$

Для задачи (1), (2) при условии (3) можно найти нижнее и верхнее решения для достаточно малых ε в виде

$$\underline{Y} = \overline{y}(x) - \varepsilon z(x, \varepsilon), \quad \overline{Y} = \overline{y}(x) + \varepsilon z(x, \varepsilon), \quad z(x, \varepsilon) = A + \exp\left\{-\frac{kx}{\varepsilon}\right\} + \exp\left\{-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right\}, \quad (6)$$

где A и k – достаточно большие положительные числа. В самом деле, условие 1°), очевидно, выполнено. Проверим выполнение условий 3°) и 2°). Имеем

$$\underline{Y}'(0, \varepsilon) = \overline{y}'(0) + k - k \exp\left\{-\frac{k}{\varepsilon}\right\}$$

и, следовательно, $\underline{Y}'(0, \varepsilon) \geq 0$ при достаточно большом k и достаточно малых ε . Аналогично проверяются остальные неравенства из 3°). Перейдем к условию 2°):

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \overline{Y} &= \varepsilon^2 \overline{Y}'' - f(x, \overline{Y}) = \varepsilon^2 \overline{y} + \varepsilon k^2 \left(\exp\left\{-\frac{kx}{\varepsilon}\right\} + \exp\left\{-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right\} \right) \\ &\quad - f(x, \overline{y}(x)) - \overline{f}_y(x) \varepsilon \left(A + \exp\left\{-\frac{kx}{\varepsilon}\right\} + \exp\left\{-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right\} \right) + O(\varepsilon^2) \\ &= -\varepsilon \left(\overline{f}_y(x) A - (k^2 - \overline{f}_y(x)) \left(\exp\left\{-\frac{kx}{\varepsilon}\right\} + \exp\left\{-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right\} \right) \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в силу (3) неравенство $L_\varepsilon \overline{Y} \leq 0$ выполнено при достаточно большом A и достаточно малых ε за счет слагаемого $-\varepsilon \overline{f}_y(x) A$. Аналогично проверяется условие $L_\varepsilon \underline{Y} \geq 0$.

Итак, функции (6) являются нижним и верхним решениями задачи (1), (2); поэтому существует решение $y(x, \varepsilon)$ этой задачи, удовлетворяющее неравенствам (5), откуда следует, что $y(x, \varepsilon) = \overline{y}(x) + O(\varepsilon)$, и теорема 1 доказана.

Сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно получить более точное чем (4) асимптотическое представление для решения $y(x, \varepsilon)$. А именно, вне сколь угодно малых, но не зависящих от ε , δ -окрестностей граничных точек $x = 0$ и $x = 1$ имеет место равенство

$$y(x, \varepsilon) = \overline{y}(x) + O(\varepsilon^2). \quad (7)$$

Чтобы доказать это, нужно видоизменить нижнее и верхнее решения следующим образом. Вместо слагаемого $A\varepsilon$ нужно ввести гладкую функцию, которая равна $A\varepsilon$ в $(\delta/2)$ -окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$, равна $A\varepsilon^2$ вне δ -окрестностей этих точек, и изменяется монотонно от $A\varepsilon$ до $A\varepsilon^2$ на отрезках $[\delta/2, \delta]$ и $[1 - \delta, 1 - \delta/2]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы рассмотрели случай краевых условий (2). Можно брать и другие краевые условия, например, $y(0) = y(1) = 0$. В этом случае с помощью метода дифференциальных неравенств можно доказать существование решения $y(x, \varepsilon)$, имеющего асимптотическое представление

$$y(x, \varepsilon) = \overline{y}(x) + \Pi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \Pi_1\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon), \quad (8)$$

где Π_0 и Π_1 – пограничные функции. Построение нижнего и верхнего решения в этом случае несколько усложняется (см., например, [3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Приведенное доказательство теоремы 1 существенно опирается на условие (3); это условие обеспечивает выполнение неравенств $L_\varepsilon \underline{Y} \geq 0$, $L_\varepsilon \overline{Y} \leq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Решение задачи (1), (2), вообще говоря, не единственно. Вырожденное уравнение может иметь несколько корней, удовлетворяющих условию (3), и тогда для каждого такого корня существует решение задачи (1), (2), удовлетворяющее условию (4). Кроме того, наряду с решениями, удовлетворяющими условию (4), задача (1), (2) может иметь решение с асимптотикой вида (8), т.е. с пограничными слоями в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$, а также решение с внутренними переходными слоями (контрастные структуры) типа ступеньки или всплеска [1]. Существование таких решений и построение их асимптотик существенно опирается, как и в рассмотренном случае, на условие (3). Подчеркнем, что неравенство $\overline{f}_y(x) > 0$ должно выполняться во всех точках отрезка $0 \leq x \leq 1$.

2. Постановка задачи. Целью данной работы является рассмотрение случая, когда в некоторой точке нарушается условие (3), что связано с пересечением корней вырожденного уравнения.

I. Пусть вырожденное уравнение $f(x, y) = 0$ имеет два корня $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, причем существует $x_0 \in (0, 1)$ такое, что

- а) $y_1(x) > y_2(x)$ при $0 \leq x < x_0$, $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, $y_1(x) < y_2(x)$ при $x_0 < x \leq 1$;
- б) $y'_2(x_0) > y'_1(x_0)$.

Условие I показывает, что в точке x_0 корни пересекаются. Поэтому

$$f_y(x_0, y_1(x_0)) = f_y(x_0, y_2(x_0)) = 0. \quad (9)$$

II. Пусть

$$\begin{aligned} f_y(x, y_1(x)) &> 0 \quad \text{при } 0 \leq x < x_0, & f_y(x, y_1(x)) &< 0 \quad \text{при } x_0 < x \leq 1, \\ f_y(x, y_2(x)) &< 0 \quad \text{при } 0 \leq x < x_0, & f_y(x, y_2(x)) &> 0 \quad \text{при } x_0 < x \leq 1. \end{aligned}$$

Условие II показывает, что в точке x_0 на каждом из корней $y_1(x)$ и $y_2(x)$ производная f_y меняет знак, т.е. в точке x_0 меняется тип устойчивости корней вырожденного уравнения. Поэтому такой случай мы называем случаем смены устойчивости.

Образует функцию

$$\widehat{y}(x) = \begin{cases} y_1(x), & 0 \leq x \leq x_0, \\ y_2(x), & x_0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

В силу Ib) эта функция имеет в точке x_0 разрыв (скачок) первой производной, причем $\widehat{y}'(x_0 + 0) - \widehat{y}'(x_0 - 0) > 0$. В силу II $\widehat{f}_y(x) \equiv f_y(x, \widehat{y}(x)) > 0$ при $x \neq x_0$, а в силу (9) $\widehat{f}_y(x_0) = 0$, т.е. в точке x_0 нарушается условие (3).

Поставим вопрос: существует ли решение $y(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) такое, что

$$y(x, \varepsilon) = \hat{y}(x) + O(\varepsilon^\beta), \beta > 0?$$

Положительный ответ на этот вопрос будет получен с помощью метода дифференциальных неравенств при еще двух условиях.

III. $\hat{f}_{yy}(x_0) \equiv f_{yy}(x_0, \hat{y}(x_0)) > 0$.

IV. $\hat{f}_y(x) \equiv f_y(x, \hat{y}_0(x)) \geq M|x - x_0|$, где M – положительное число.

Простейшим примером функции $f(x, y)$, которая удовлетворяет условиям II–IV, является квадратичная относительно переменной y функция $f(x, y) = (y - y_1(x))(y - y_2(x))$ в случае, когда корни $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют условию I.

Отметим, что начальная задача для сингулярно возмущенных уравнений в случае смены устойчивости рассматривалась в [4] и [5]. Используемый в [4] метод специфичен именно для начальных задач и не пригоден для краевой задачи. В [5] использован метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. При этом требовалось, чтобы $\hat{y}(x)$ было нижним решением, а процедура построения верхнего решения такова, что к краевым задачам она не применима.

3. Построение верхнего решения. Прежде всего заметим, что построить нижнее и верхнее решения в таком же виде, как при доказательстве теоремы 1, т.е. в виде

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \hat{y}(x) - z(x, \varepsilon), \quad \bar{Y} = \hat{y}(x) + z(x, \varepsilon), \\ z(x, \varepsilon) &= A\varepsilon^\beta + \varepsilon \left(\exp \left\{ -\frac{kx}{\varepsilon} \right\} + \exp \left\{ -\frac{k(1-x)}{\varepsilon} \right\} \right), \end{aligned}$$

где $\beta > 0$, невозможно по двум причинам.

Во-первых, функция $\hat{y}(x)$ имеет разрыв производной в точке x_0 , причем $\hat{y}'(x_0 + 0) - \hat{y}'(x_0 - 0) > 0$ в силу Iб). Такой (положительный) скачок производной в отдельных точках допустим для нижнего решения, но не допустим для верхнего решения (см. [6]). Во-вторых, поскольку $\hat{f}_y(x_0) = 0$, а $\hat{f}_{yy}(x_0) > 0$, вблизи точки x_0 указанная функция $\underline{Y}$ не будет, вообще говоря, удовлетворять требуемому неравенству $L_\varepsilon \underline{Y} \geq 0$.

Таким образом, построение нижнего и верхнего решений в случае смены устойчивости является более сложной проблемой.

Мы построим сначала верхнее решение в некоторой δ -окрестности точки x_0 , где δ достаточно мало, но не зависит от ε , а затем укажем, как продолжить это решение на весь отрезок $[0, 1]$. С этой целью сгладим функцию $\hat{y}(x)$ с помощью известной процедуры, которая применялась ранее в задачах с негладкими членами асимптотики (см., например, [7]). Введем переменную

$$\xi = \frac{x - x_0}{x^\alpha},$$

где α – положительное число, которое будет выбрано ниже. Положим

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} \exp\{-s^2\} ds,$$

и вместо $\hat{y}(x)$ введем всюду гладкую функцию

$$\tilde{y}(x) = y_1(x)\omega(-\xi) + y_2(x)\omega(\xi). \quad (10)$$

Используя равенство $\omega(-\xi) + \omega(\xi) = 1$, получаем при $x \leq x_0$ (т.е. при $\xi \leq 0$)

$$\tilde{y}(x) = y_1(x) + (y_2(x) - y_1(x))\omega(\xi) = y_1(x) + O(x - x_0)\omega(\xi) = y_1(x) + O(\varepsilon^\alpha).$$

Аналогично, при $x \geq x_0$ имеем $\tilde{y}(x) = y_2(x) + O(\varepsilon^\alpha)$. Таким образом, $\tilde{y}(x) = \hat{y}(x) + O(\varepsilon^\alpha)$. Нетрудно заметить, что $\tilde{y}(x) \leq \hat{y}(x)$, т.е. процедура сглаживания дает кривую $\tilde{y}(x)$, расположенную ниже $\hat{y}(x)$.

В δ -окрестности точки x_0 верхнее решение будем искать в виде

$$\bar{Y} = \tilde{y}(x) + A\varepsilon^\beta, \quad (11)$$

где $0 < \beta \leq \alpha$, $A > 0$. При достаточно большом A получаем неравенство $\bar{Y} > \hat{y}(x)$.

Покажем, что можно выбрать α , β и A так, что в δ -окрестности точки x_0 будет выполнено условие $L_\varepsilon \bar{Y} \leq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \bar{Y} &\equiv \varepsilon^2 \bar{Y}'' - f(x, \bar{Y}) \\ &= \varepsilon^2 (y_1''(x)\omega(-\xi) + y_2''(x)\omega(\xi)) + \varepsilon^{2-\alpha} \frac{2}{\sqrt{\pi}} (y_2'(x) - y_1'(x)) \exp\{-\xi^2\} \\ &\quad + \varepsilon^{2-2\alpha} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (y_1(x) - y_2(x)) \xi \exp\{-\xi^2\} \\ &\quad - \left(f(x, \hat{y}_0(x)) + \hat{f}_y(x)(A\varepsilon^\beta + O(\varepsilon^\alpha)) + \frac{1}{2} \hat{f}_{yy}(x)(A\varepsilon^\beta + O(\varepsilon^\alpha))^2 + o(\varepsilon^{2\beta}) \right) \\ &= O(\varepsilon^{2-\alpha}) - \hat{f}_y(x)(A\varepsilon^\beta + O(\varepsilon^\alpha)) - \frac{1}{2} \hat{f}_{yy}(x)(A\varepsilon^\beta + O(\varepsilon^\alpha))^2 + o(\varepsilon^{2\beta}). \end{aligned} \quad (12)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (величина $O(\varepsilon^{2-\alpha})$) может иметь любой знак. Второе слагаемое обращается в 0 в точке x_0 и отрицательно в остальных точках. Третье слагаемое будет отрицательным всюду в δ -окрестности точки x_0 , если величину δ взять столь малой, чтобы в δ -окрестности точки x_0 выполнялось неравенство $\hat{f}_{yy}(x) > 0$. Это возможно в силу условия III. При этом третье слагаемое является величиной порядка $A^2\varepsilon^{2\beta}$. Поэтому если $2\beta \leq 2 - \alpha$, то при достаточно большом A и достаточно малом ε третье слагаемое будет доминирующим и обеспечит выполнение неравенства $L_\varepsilon \bar{Y} \leq 0$ в δ -окрестности точки x_0 .

Таким образом, α и β нужно взять удовлетворяющими неравенствам $0 < \beta \leq \alpha$, $2\beta \leq 2 - \alpha$. Отсюда получаем $0 < \beta \leq 2/3$, $\beta \leq \alpha \leq 2 - 2\beta$. Наилучший выбор α и β , минимизирующий отклонение $\bar{Y}$ от $\hat{y}(x)$, таков: $\alpha = \beta = 2/3$.

Итак, в δ -окрестности точки x_0 построено верхнее решение в виде $\bar{Y} = \hat{y}(x) + O(\varepsilon^{2/3})$.

Вне δ -окрестности точки x_0 выполняется неравенство $\hat{f}_y(x) \geq C > 0$, и поэтому здесь можно взять верхнее решение в том же виде, как и при доказательстве теоремы 1, т.е. в виде (6) с заменой $\tilde{y}(x)$ на $\hat{y}(x)$. Чтобы построить всюду гладкое верхнее решение, можно поступить так: в $(\delta/2)$ -окрестности точки x_0 верхнее решение берется в виде (11), вне δ -окрестности – в виде (6), а на отрезках $\delta/2 \leq |x - x_0| \leq \delta$ осуществляется гладкий монотонный переход от одного вида верхнего решения к другому. При этом неравенство $L_\varepsilon \bar{Y} \leq 0$ будет выполнено и на этих отрезках, поскольку вне $(\delta/2)$ -окрестности точки x_0 первое слагаемое в правой части (12) является величиной порядка $O(\varepsilon^2)$, а не $O(\varepsilon^{2-\alpha})$. Кроме того, $\bar{Y}$ будет удовлетворять условию 3°).

Итак, верхнее решение построено.

4. Построение нижнего решения. В качестве главного члена нижнего решения можно взять $\hat{y}(x)$, не сглаживая его, поскольку для нижнего решения допустим положительный скачок производной, какой имеет $\hat{y}(x)$ в точке x_0 . Однако, построить нижнее решение в виде $\underline{Y} = \hat{y}(x) - A\varepsilon^\beta$ не удастся. В самом деле, при таком выборе $\underline{Y}$ получаем

$$L_\varepsilon \underline{Y} = O(\varepsilon^2) + \hat{f}_y(x)A\varepsilon^\beta - \frac{1}{2}\hat{f}_{yy}(x)A^2\varepsilon^{2\beta} + o(\varepsilon^{2\beta}).$$

Во всех точках (кроме x_0 , где $\hat{y}(x)$ недифференцируема) должно выполняться неравенство $L_\varepsilon \underline{Y} \geq 0$. Но так как $\hat{f}_y(x_0) = 0$, вблизи точки x_0 доминирующим является третье слагаемое, а оно в силу III отрицательно.

Всюду, за исключением малых окрестностей граничных точек $x = 0$ и $x = 1$, удастся построить нижнее решение в виде

$$\underline{Y} = \hat{y} - A\varepsilon^\beta + B\varepsilon^{2\alpha}\xi^2 \exp\{-|\xi|\}, \quad \xi = \frac{x - x_0}{\varepsilon^\alpha}, \quad (13)$$

где A и B – достаточно большие положительные числа, причем $B < A$; $0 < \beta \leq 2\alpha$, более точный выбор α и β сделан ниже. Ясно, что при $B < A$ имеем неравенство $\underline{Y} < \hat{y}(x)$. Далее,

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{Y} = & \varepsilon^2(\hat{y}_0''(x) + B(2 - 4|\xi| + \xi^2) \exp\{-|\xi|\}) - \hat{f}_y(x)(B\varepsilon^{2\alpha}\xi^2 \exp\{-|\xi|\} - A\varepsilon^\beta) \\ & - \frac{1}{2}\hat{f}_{yy}(x)(B\varepsilon^{2\alpha}\xi^2 \exp\{-|\xi|\} - A\varepsilon^\beta)^2 + o(\varepsilon^{2\beta}). \end{aligned} \quad (14)$$

Покажем, что можно так выбрать B, A, α, β , что при $0 < x < 1$ ($x \neq x_0$) будет выполнено неравенство $L_\varepsilon \underline{Y} \geq 0$.

Рассмотрим сначала промежутки $0 < |x - x_0| \leq k\varepsilon^\alpha$ (т.е. $0 < |\xi| \leq k$), причем возьмем k столь малым, что $2 - 4|\xi| + \xi^2 > 0$ при $|\xi| \leq k$. Если $\beta > 1$, то два последних слагаемых в правой части (14) являются величинами порядка $o(\varepsilon^2)$. Второе слагаемое положительно, но оно сколь угодно мало вблизи точки x_0 (так как $\hat{f}_y(x_0) = 0$) и потому не является главным вблизи x_0 . Первое же слагаемое является величиной порядка ε^2 и поэтому при достаточно большом B и достаточно малых ε обеспечивает выполнение неравенства $L_\varepsilon \underline{Y} \geq 0$ на промежутках $0 < |x - x_0| \leq k\varepsilon^\alpha$. Таким образом, последнее слагаемое в выражении (13) для $\underline{Y}$ играет определяющую роль в малой (порядка ε^α) окрестности точки x_0 .

Вне этой окрестности точки x_0 , т.е. при $|x - x_0| > k\varepsilon^\alpha$, доминирующим станет второе слагаемое в правой части (14). В самом деле, в силу условия IV при $|x - x_0| > k\varepsilon^\alpha$ имеем

$$\hat{f}_y(x) \geq M|x - x_0| > Mk\varepsilon^\alpha$$

и, следовательно, для второго слагаемого в правой части (14) получаем оценку

$$-\hat{f}_y(x)(-A\varepsilon^\beta + B\varepsilon^{2\alpha}\xi^2 \exp\{-|\xi|\}) \geq Mk(A - B)\varepsilon^{\alpha+\beta}.$$

Если $\alpha + \beta \leq 2$, то при достаточно большом A и достаточно малых ε второе слагаемое становится доминирующим и обеспечивает выполнение неравенства $L_\varepsilon \underline{Y} \geq 0$ всюду при $|x - x_0| > k\varepsilon^\alpha$.

Таким образом, чтобы построить нижнее решение в виде (13), нужно взять α и β , удовлетворяющие неравенствам $0 < \beta \leq 2\alpha$, $\beta > 1$, $\alpha + \beta \leq 2$. Отсюда получаем

$1 < \beta \leq 4/3$, $\beta/2 \leq \alpha \leq 2 - \beta$. Наилучший выбор α и β , обеспечивающий наименьшее отклонение $\underline{Y}$ от $\hat{y}(x)$, таков: $\beta = 2\alpha = 4/3$. При этом выборе α и β имеем $\underline{Y} = \hat{y}(x) - O(\varepsilon^{4/3})$. Заметим, что такое $\underline{Y}$ не удовлетворяет, вообще говоря, условию 3°). Поэтому в сколь угодно малых, но не зависящих от ε , δ -окрестностях граничных точек $x = 0$ и $x = 1$ возьмем $\underline{Y}$ в виде (6), вне δ -окрестностей этих точек – в виде (13), а на отрезках $[\delta, 2\delta]$ и $[1 - 2\delta, 1 - \delta]$ произведем гладкое сопряжение этих функций. При этом неравенство $L_\varepsilon \underline{Y} \geq 0$ будет выполнено всюду и, кроме того, $\underline{Y}$ будет удовлетворять условию 3°).

Так как $\underline{Y} < \hat{y}(x)$, а $\bar{Y} > \hat{y}(x)$, то $\underline{Y} < \bar{Y}$, т.е. выполнено условие 1°). Таким образом, построенные функции $\underline{Y}$ и $\bar{Y}$ являются нижним и верхним решениями задачи (1), (2).

5. Основной результат. Построенное верхнее решение $\bar{Y}$ отличается от $\hat{y}(x)$ на величину порядка ε всюду на отрезке $[0, 1]$, за исключением малой δ -окрестности точки x_0 , где разность $\bar{Y} - \hat{y}(x)$ является величиной порядка $\varepsilon^{2/3}$. Нижнее решение $\underline{Y}$ отличается от $\hat{y}(x)$ на величину порядка $\varepsilon^{4/3}$ всюду, кроме малых окрестностей точек $x = 0$ и $x = 1$, где разность $\hat{y} - \underline{Y}$ является величиной порядка ε . Отсюда вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Если выполнены условия I–IV, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение $y(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) такое, что $y(x, \varepsilon) = \hat{y}(x) + O(\varepsilon^{2/3})$ в δ -окрестности точки x_0 и $y(x, \varepsilon) = \hat{y}(x) + O(\varepsilon)$ в остальной части отрезка $[0, 1]$.

Воспользовавшись замечанием 1, можно написать более точное асимптотическое представление (7) для $y(x, \varepsilon)$ вне δ -окрестностей точек $x = x_0$, $x = 0$ и $x = 1$: $y(x, \varepsilon) = \hat{y}(x) + O(\varepsilon^2)$.

6. Случай зависимости функции f от ε . Выше рассмотрен случай, когда функция f не зависит от ε . Если же $f = f(x, y, \varepsilon)$ и функция $f(x, y, 0)$ удовлетворяет условиям I–IV, то существенную роль играет знак производной $\hat{f}_\varepsilon$ в точке x_0 . Рассмотрим два случая.

1) $\hat{f}_\varepsilon(x_0) \equiv f_\varepsilon(x_0, \hat{y}(x_0), 0) < 0$.

В этом случае в δ -окрестности точки x_0 можно построить верхнее решение в виде

$$\bar{Y} = \tilde{y}(x) + A\sqrt{\varepsilon} = \hat{y}(x) + O(\sqrt{\varepsilon}) + A\sqrt{\varepsilon},$$

где A – достаточно большое число, а $\tilde{y}(x)$ определяется формулой (10), причем $\xi = (x - x_0)/\sqrt{\varepsilon}$. Действительно, вместо равенства (12) имеем

$$L_\varepsilon \bar{Y} = O(\varepsilon^{3/2}) - \hat{f}_y(x)(A\sqrt{\varepsilon} + O(\sqrt{\varepsilon})) - \hat{f}_\varepsilon(x)\varepsilon - \frac{1}{2}\hat{f}_{yy}(x)(A\sqrt{\varepsilon} + O(\sqrt{\varepsilon}))^2, \quad (15)$$

откуда видно, что при достаточно большом A и достаточно малых ε в δ -окрестности точки x_0 (где $\hat{f}_{yy}(x) > 0$) неравенство $L_\varepsilon \bar{Y} \leq 0$ будет выполнено за счет члена $\frac{1}{2}\hat{f}_{yy}(x)A^2\varepsilon$.

Вне δ -окрестности точки x_0 верхнее решение можно построить в виде (6) с заменой $\bar{y}(x)$ на $\hat{y}(x)$.

Нижнее решение $\underline{Y}$ на всем отрезке $[0, 1]$ можно взять также в виде (6) с заменой $\bar{y}(x)$ на $\hat{y}(x)$. При этом в δ -окрестности точки x_0 (где $\hat{f}_\varepsilon(x) < 0$) неравенство $L_\varepsilon \underline{Y} \geq 0$ будет выполнено при достаточно малых ε за счет члена $-\hat{f}_\varepsilon(x)\varepsilon$ (см. (15)), а вне этой δ -окрестности – за счет члена $\hat{f}_y(x)A\varepsilon$. Заметим, что если $\hat{f}_\varepsilon(x) < 0$ на всем отрезке $[0, 1]$, то в качестве нижнего решения можно взять $\hat{y}(x)$.

Указанные нижнее и верхнее решения позволяют сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Если $f = f(x, y, \varepsilon)$, функция $f(x, y, 0)$ удовлетворяет условиям I–IV и $\hat{f}_\varepsilon(x_0) < 0$, то при достаточно малых ε существует решение $y(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) такое, что $y(x, \varepsilon) = \hat{y}(x) + O(\sqrt{\varepsilon})$ в δ -окрестности точки x_0 и $y(x, \varepsilon) = \hat{y}(x) + O(\varepsilon)$ в остальной части отрезка $[0, 1]$.

Отметим, что в рассмотренном случае в отличие от случая $f = f(x, y)$ вне δ -окрестностей точек $x = x_0$, $x = 0$ и $x = 1$ равенство $y(x, \varepsilon) = \hat{y}(x) + O(\varepsilon^2)$ уже не имеет места. Чтобы получить более точную асимптотику $y(x, \varepsilon)$, нужно добавить следующий член разложения, который в данном случае можно определить как решение квадратного уравнения

$$\frac{1}{2} \hat{f}_{yy}(x) y_1^2 + \hat{f}_y(x) y_1 + \hat{f}_\varepsilon(x) \varepsilon = 0,$$

причем нужно взять корень

$$y_1(x, \varepsilon) = -2\varepsilon \hat{f}_\varepsilon(x) \left(\hat{f}_y(x) + \sqrt{\hat{f}_y^2(x) - 2\hat{f}_{yy}(x)\hat{f}_\varepsilon(x)\varepsilon} \right)^{-1}.$$

Нетрудно заметить, что $y_1(x, \varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$ в малой δ -окрестности точки x_0 и $y_1(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ вне δ -окрестности точки x_0 . Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Если выполнены условия теоремы 3, то при достаточно малых ε существует решение $y(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) такое, что

$$y(x, \varepsilon) = \begin{cases} \hat{y}(x) + y_1(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{3/4}) & \text{в } \delta\text{-окрестности точки } x_0, \\ \hat{y}(x) + O(\varepsilon) & \text{в } \delta\text{-окрестностях точек } x = 0 \text{ и } x = 1, \\ \hat{y}(x) + y_1(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^2) & \text{на отрезках } [\delta, x_0 - \delta] \text{ и } [x_0 + \delta, 1 - \delta]. \end{cases}$$

Для доказательства этой теоремы можно построить соответствующие нижнее и верхнее решения, причем в δ -окрестности точки x_0 удастся построить их в виде

$$\underline{Y} = \hat{y}(x) + y_1(x, \varepsilon) - A\varepsilon^{3/4}, \quad \bar{Y} = \hat{y}(x) + \tilde{y}_1(x, \varepsilon) + A\varepsilon^{3/4},$$

где A – достаточно большое число, $\tilde{y}$ и $\tilde{y}_1$ получаются из $\hat{y}$ и y_1 по формуле (10), причем $\xi = (x - x_0)/\varepsilon^{3/4}$.

2) $\hat{f}_\varepsilon(x_0) > 0$.

В этом случае может не существовать решения $y(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) такого, что

$$y(x, \varepsilon) = \hat{y}(x) + O(\varepsilon^\beta), \quad \beta > 0. \quad (16)$$

ПРИМЕР. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 y'' &= y \left(y - x + \frac{1}{2} \right) + \varepsilon, \quad 0 < x < 1, \\ y'(0) &= y'(1) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно убедиться в том, что $f(x, y, 0) = y(y - x + 1/2)$ удовлетворяет всем условиям I–IV. В частности, уравнение $f(x, y, 0) = 0$ имеет два корня $y_1 = 0$ и $y_2 = x - 1/2$, пересекающиеся в точке $x_0 = 1/2$. В данном примере

$$\hat{y}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

а производная $f_\varepsilon = 1 > 0$.

Пусть $y(x)$ – решение задачи (17) (зависимость y от ε для краткости не указываем). Рассмотрим отрезок $I = \{x : 1/2 - \sqrt{\varepsilon} \leq x \leq 1/2 + \sqrt{\varepsilon}\}$. На этом отрезке

$$f(x, y, \varepsilon) = \left(y - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon \geq \frac{3}{4}\varepsilon$$

и, следовательно, $y''(x) = \varepsilon^{-2}f \geq 3\varepsilon^{-1}/4$. Поэтому $y'(x)$ возрастает на отрезке I и, значит, либо сохраняет знак, либо меняет его в какой-то одной точке отрезка. Допустим, что $y'(x)$ обращается в 0 в точке x_1 . Пусть $x_1 \leq 1/2$. Рассмотрим отрезок $[x_1, 1/2 + \sqrt{\varepsilon}/2]$ (если $x_1 > 1/2$, то нужно рассмотреть отрезок $[1/2 - \sqrt{\varepsilon}/2, x_1]$). Применяя формулу конечных приращений, получаем

$$y'\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right) - y'(x_1) = y''(\theta)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} - x_1\right) \geq \frac{3}{4}\varepsilon^{-1}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2},$$

откуда $y'(1/2 + \sqrt{\varepsilon}/2) \geq 3\varepsilon^{-1/2}/8$. Отсюда следует, что $y'(x) \geq 3\varepsilon^{-1/2}/8$ при $1/2 + \sqrt{\varepsilon}/2 \leq x \leq 1/2 + \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому

$$y\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\varepsilon}\right) - y\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right) = y'(\theta_1)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \geq \frac{3}{16}.$$

Мы получили, что на отрезке $[1/2 + \sqrt{\varepsilon}/2, 1/2 + \sqrt{\varepsilon}]$ решение $y(x)$ изменяется на конечную величину, большую $3/16$. В то же время $\hat{y}(x)$ изменяется на этом отрезке на величину $\sqrt{\varepsilon}/2$. Следовательно, на этом отрезке не может быть выполнено равенство $y(x) - \hat{y}(x) = O(\varepsilon^\beta)$, где $\beta > 0$. Таким же образом можно доказать, что последнее равенство не имеет места, если $y'(x)$ сохраняет свой знак на отрезке I . Итак, задача (17) не имеет решения $y(x, \varepsilon)$, удовлетворяющего условию (16).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
- [2] Гудков В. В., Клоков Ю. А., Лепин А. Я., Пономарёв В. Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1973.
- [3] Нефёдов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 31. № 4. С. 719–722.
- [4] Lebowitz N. R., Shaar R. J. Exchange of stabilities in autonomous systems // Stud. Appl. Math. 1975. V. 54. № 3. P. 229–259.
- [5] Nefedov N., Schneider K., Schuppert A. Jumping Behavior in Singularly Perturbed Systems Modelling Bimolecular Reactions. Preprint № 137. Berlin: WIAS, 1994.
- [6] Jackson L. K. Subfunctions and second-order ordinary differential inequalities // Adv. Math. 1968. V. 2. P. 308–363.
- [7] Бутузов В. Ф., Нестеров А. В. О некоторых сингулярно возмущенных задачах с негладкими погранфункциями // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 4. С. 786–789.